1.3. Markov-kjeder.

Vi bruker ofte system av differenslikninger der tilstandene er *andeler* (eller prosentandeler). Da viser det seg at summene av elementene i hver kolonnevektor i overgangsmatrisen alltid blir lik 1. Slike system leder til ***Markov-kjeder***. Nedenfor ser du et eksempel.

***Eksempel 1.4*:** I en meningsmåling svarte 50% av de spurte ”ja” til et bestemt spørsmål, 30% svarte ”nei” mens 20% svarte ”vet ikke”. En måned senere blir undersøkelsen gjentatt. Da viser det seg at:

- 90% av de som sist svarte ”ja” svarer fremdeles ”ja”, mens 10% nå svarer ”vet ikke”.
- Av de som sist svarte ”nei” svarer fremdeles 80% ”nei”, 10% svarer ”vet ikke” mens 10% har endret standpunkt til ”ja”.
- Av ”vet ikke”-gruppen svarer 70% fremdeles ”vet ikke”, 20% svarer nå ”ja” mens 10% nå svarer ”nei”.

Hvordan vil fordelingen av ”ja”, ”nei” og ”vet ikke” bli dersom overgangene mellom disse gruppene holdes konstant?

Løsning: Vi starter med å ordne opplysningene slik at vi ser *endringene til* hver gruppe:

Til	Fra		
	”ja”	”nei”	”vet ikke”
”ja”	0.9	0.1	0.2
”nei”	0	0.8	0.1
”vet ikke”	0.1	0.1	0.7

Vi innfører nå disse variablene:

x er andelen av de spurte som svarer ”ja”.
y er andelen av de spurte som svarer ”nei”.
z er andelen av de spurte som svarer ”vet ikke”.

Vi kan nå sette opp disse differenslikningene:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 0.9x_k + 0.1y_k + 0.2z_k \\ y_{k+1} &= 0.0x_k + 0.8y_k + 0.1z_k \\ z_{k+1} &= 0.1x_k + 0.1y_k + 0.7z_k \end{aligned}$$

Disse likningene kan skrives på matriseform slik:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_k$$

Ved å innføre tilstandsvektoren

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

og overgangsmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

kan dette skrives på formen

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k .$$

For å løse dette likningssettet, må jeg finne egenverdier og tilhørende egenvektorer. Jeg gjør det med dataverktøy, og får:

Egenverdier:

$$\lambda_1 = 1.0 \qquad \lambda_2 = 0.8 \qquad \lambda_3 = 0.6$$

Tilhørende egenvektorer:

$$\mathbf{v}_1 = C_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Da setter vi opp løsningen slik:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_k = C_1 \cdot \lambda_1^k \cdot \mathbf{v}_1 + C_2 \cdot \lambda_2^k \cdot \mathbf{v}_2 + C_3 \cdot \lambda_3^k \cdot \mathbf{v}_3$$

$$\underline{= C_1 \cdot 1.0^k \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \cdot 0.8^k \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \cdot 0.6^k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

Dersom vi kun er interessert i å finne forholdet mellom *x*, *y* og *z* når $k \to \infty$, kan vi merke oss at $0.8^k \to 0$ og $0.6^k \to 0$ når $k \to \infty$, slik at

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to C_1 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ når } k \to \infty .$$

Siden summen av elementene er 8, betyr dette at når $k \to \infty$ vil

$$x \to \tfrac{5}{8} = 0.625,$$

$$y \to \tfrac{1}{8} = 0.125,$$

$$z \to \tfrac{2}{8} = 0.25.$$

Dersom vi ønsker å finne konstantene på grunnlag av start-tilstanden, gjør vi dette ved å benytte at

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.30 \\ 0.20 \end{bmatrix},$$

og får ved innsetting av $k = 0$ i løsningsformelen at

$$C_1 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.30 \\ 0.20 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 5C_1 - C_2 + C_3 &= 0.50 \\ C_1 + C_2 + C_3 &= 0.30 \\ 2C_1 + 0C_2 - 2C_3 &= 0.20 \end{aligned}$$

Legger sammen likningene, og får

$$8C_1 = 1.00 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1 = 0.125}.$$

Av den siste likningen følger nå

$$2C_3 = 2C_1 - 0.20 \quad \Leftrightarrow \quad C_3 = 0.125 - 0.10 = \underline{0.025}.$$

Til slutt gir den midterste likningen

$$C_2 = 0.30 - C_1 - C_3 = 0.30 - 0.125 - 0.025 = \underline{0.15}.$$

Settes dette inn i løsningen, får vi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_k = 0.125 \cdot 1.0^k \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.15 \cdot 0.8^k \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.025 \cdot 0.6^k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0.625 \\ 0.125 \\ 0.250 \end{bmatrix} + 0.8^k \cdot \begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.6^k \cdot \begin{bmatrix} 0.025 \\ 0.025 \\ -0.05 \end{bmatrix}}}$$

Prøv deg selv på en slik Markov-kjede i Oppgave 1.3.