3. Sammenfallende egenverdier.

Vi har et system av *n* homogene differenslikninger

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

der **A** er en $n \times n$-matrise. Du husker sikkert at likningssystemet har løsningen

$$\mathbf{x}_k = C_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + C_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \cdots + C_n \lambda_n^k \mathbf{v}_n$$

der λ_1, λ_2, …, λ_n er egenverdiene til **A** og $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ er de tilhørende egenvektorene. Men denne løsningen forutsetter at **A** har *n* lineært uavhengige egenvektorer. Dersom to eller flere av egenverdiene er like, kan det hende at **A** ikke har *n* lineært uavhengige egenvektorer. Hva gjør vi da?

Vi skal begrense oss til den vanligste situasjonen: **A** har to like egenverdier $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Du husker sikkert at noen ganger fins det to lineært uavhengige egenvektorer selv om vi har to like egenverdier. Da har vi ingen problemer. Men nå skal vi anta at vi bare kan finne *en* egenvektor **v** til λ.

For å få komplett løsning av likningssystemet i dette tilfellet, gjetter vi på at løsningen kan inneholde et ledd av formen

$$\mathbf{x}_k = C\left(\lambda^k \left(k\mathbf{v} + \mathbf{u}\right)\right).$$

Her er λ den doble egenverdien, og $\mathbf{v}$ er den tilhørende egenvektoren. For å finne **u**, setter vi dette leddet inn i den opprinnelige differenslikningen:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad C\left(\lambda^{k+1}\left((k+1)\mathbf{v} + \mathbf{u}\right)\right) = \mathbf{A} \cdot C\left(\lambda^k \left(k\mathbf{v} + \mathbf{u}\right)\right).$$

Her kan vi forkorte bort $C\lambda^k$, og står da igjen med

$$\lambda\left((k+1)\mathbf{v} + \mathbf{u}\right) = \mathbf{A} \cdot \left(k\mathbf{v} + \mathbf{u}\right) \quad \Leftrightarrow \quad k\lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{u} = k\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}.$$

Men siden λ og **v** er egenverdi og egenvektor til **A**, er $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$. Dermed faller første ledd på begge sider av likhetstegnet bort, og vi står igjen med

$$\lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}.$$

Her har vi funnet nøkkelen til løsning på problemet vårt:

Dersom **A** er en $n \times n$-matrise der to av egenverdiene er like, og det kun fins *en* egenverdi **v** til disse like egenverdiene, kan løsningen av differensliknings-systemet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

skrives

$$\mathbf{x}_k = C_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + C_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \cdots + C_{n-1} \lambda^k \mathbf{v} + C\left(\lambda^k \left(k\mathbf{v} + \mathbf{u}\right)\right)$$

der λ er de to like egenverdiene, og **u** er en vektor som tilfredsstiller kravet

$$\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}.$$

Dette må vi illustrere med et eksempel:

Eksempel 3.1: Løs dette systemet av differenslikninger:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_k, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1500 \\ 1500 \\ 1500 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Her er

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Egenverdier:

$$\begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0.9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 0 \\ 0.2 & 0.5-\lambda \end{vmatrix}(0.9-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \big((0.5-\lambda)(0.5-\lambda)-0\big)(0.9-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0.5-\lambda)^2(0.9-\lambda) = 0$$

Vi får egenverdien $\lambda_1 = \underline{0.9}$ og de to sammenfallende egenverdiene $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = \underline{0.5}$.

Finner først egenvektoren til $\lambda_1 = 0.9$:

$$\left.\begin{aligned} (0.5-0.9)x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0.2x_1 + (0.5-0.9)x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + (0.9-0.9)x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} -0.4x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 && (1) \\ 0.2x_1 - 0.4x_2 + 0x_3 &= 0 && (2) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Av (1) ser vi at $x_1 = 0$. Da ser vi av (2) at $x_2 = \frac{1}{2}x_1 = 0$.

Av (3) ser vi at x_3 kan velges fritt, og jeg setter $x_3 = t_1$.

Da blir egenvektoren

$$\underline{\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Så var det egenvektoren(e) til den doble egenverdien $\lambda = 0.5$:

$$\left.\begin{aligned} (0.5-0.5)x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0.2x_1 + (0.5-0.5)x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + (0.9-0.5)x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 && (1) \\ 0.2x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 && (2) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0.4x_3 &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Av (2) og (3) ser vi direkte at både $x_1 = 0$ og $x_3 = 0$. Velger da $x_2 = t$, og får egenvektoren

$$\underline{\mathbf{v} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}.$$

Altså er det kun *en* egenvektor til den doble egenverdien $\lambda = 0.5$.

For å få komplett løsning til likningssystemet vårt, må vi nå se om det fins en vektor

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$$

som tilfredsstiller likningen $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}$. Setter inn, og får

$$\begin{bmatrix}0.5-0.5 & 0 & 0\\0.2 & 0.5-0.5 & 0\\0 & 0 & 0.9-0.5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=0.5\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{array}{lr}0u_1+0u_2+0u_3=0 & (1)\\0.2u_1+0u_2+0u_3=0.5 & (2)\\0u_1+0u_2+0.4u_3=0 & (3)\end{array}$$

Av (2) får vi nå at $0.2u_1=0.5 \quad\Leftrightarrow\quad u_1=\underline{2.5}$. Av (3) får vi $u_3=\underline{0}$.
Av (1) ser vi at u_2 kan velges fritt, og jeg velger derfor $u_2=0$. Da blir

$$\underline{\underline{\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2.5\\0\\0\end{bmatrix}}}.$$

Den generelle løsningen av likningssystemet blir da

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}_k &= C_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1+C_2\lambda^k\mathbf{v}+C\left(\lambda^k\left(k\mathbf{v}+\mathbf{u}\right)\right)\\ &= C_1\cdot 0.9^k\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+C_2\cdot 0.5^k\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+C\left(0.5^k\left(k\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2.5\\0\\0\end{bmatrix}\right)\right)\\ &= \underline{C_1\cdot 0.9^k\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+C_2\cdot 0.5^k\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+C\cdot 0.5^k\begin{bmatrix}2.5\\k\\0\end{bmatrix}}\end{aligned}$$

Benytter startverdiene til å finne C_1 og C:

$$\begin{bmatrix}1500\\1500\\1500\end{bmatrix}=C_1\cdot 0.9^0\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+C_2\cdot 0.5^0\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+C\cdot 0.5^0\begin{bmatrix}2.5\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5C\\C_2\\C_1\end{bmatrix}.$$

Vi ser direkte at $C_1=C_2=\underline{1500}$, og at $2.5C=1500 \quad\Leftrightarrow\quad C=\underline{600}$.
Dermed er løsningen

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}_k &= 1500\cdot 0.9^k\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+1500\cdot 0.5^k\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+600\cdot 0.5^k\begin{bmatrix}2.5\\k\\0\end{bmatrix}\\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix}1500\cdot 0.5^k\\(1500+600k)\cdot 0.5^k\\1500\cdot 0.9^k\end{bmatrix}}}\end{aligned}$$

Oppgave 3.1.

I eksemplet ovenfor fant vi en "hjelpevektor" **u** i tilknytning til den doble egenverdien λ med tilhørende egenvektor **v**. Kan vi finne en slik "hjelpevektor" til ethvert sett av egenverdi / egenvektor? Svaret er nei. Jeg skal illustrere det med å prøve å finne en slik vektor $\mathbf{u}_1$ til egenverdien $\lambda_1 = 0.9$ og den tilhørende egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi prøver å finne en slik vektor:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0.5-0.9 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5-0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9-0.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0.9 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & -0.4u_1 + 0u_2 + 0u_3 = 0 && (1) \\ \Leftrightarrow \quad & 0.2u_1 - 0.4u_2 + 0u_3 = 0 && (2) \\ & 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 = 0.9 && (3) \end{aligned}$$

Vi ser at den nederste likningen aldri er oppfylt. Altså er det ikke mulig å finne en vektor $\mathbf{u}_1$ som gir et ledd av formen $C\left(\lambda_1^k \left(k\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1\right)\right)$ i løsningen av differenslikningen.