2. Komplekse egenverdier.

Når vi skriver et system av differenslikninger på formen

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k \, ,$$

der **A** har bare reelle elementer, forekommer det at **A** får kompleks konjugerte egenverdier

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \, .$$

Da har vi tidligere vist at de tilhørende egenvektorene også er kompleks konjugerte, og vi skriver dem

$$\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{w} \, .$$

Disse egenverdiene og egenvektorene fører til at løsningen av likningssystemet får ledd av formen

$$C_1 \lambda_1^{\ k} \mathbf{v}_1 + C_2 \lambda_2^{\ k} \mathbf{v}_2 \, .$$

Nå kan vi selvfølgelig bruke leddene slik de står uten å bry oss om at de er komplekse. Men for å få noe meningsfylt ut av dem, må de omformes slik at vi bare får reelle ledd. Denne prosessen kan være vanskelig dersom vi ikke er vant til å regne med komplekse tall. For å hjelpe deg på vei, skal jeg sette opp disse retningslinjene:

Når overgangsmatrisen **A** har en kompleks egenverdi

$$\lambda = \alpha + i\beta \, ,$$

starter du med å finne en kompleks egenvektor

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$$

til denne egenverdien, der **u** og **w** er reelle vektorer.
Så skriver du egenverdien på den eksponentielle formen

$$\lambda = R \cdot e^{i\theta} \, .$$

Beregn en vektor

$$\mathbf{y} = \lambda^k \cdot \mathbf{v} = \left(R \cdot e^{i\theta}\right)^k \cdot \mathbf{v} = R^k \cdot e^{ik\theta} \cdot \mathbf{v} = R^k \cdot \left(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\right)(\mathbf{u} + i\mathbf{w}) \, ,$$

og splitt denne opp i en realdel og en imaginærdel.
Løsningen av differenslikningen vil da inneholde leddene

$$C_1 \cdot \mathrm{Re}(\mathbf{y}) + C_2 \cdot \mathrm{Im}(\mathbf{y}) \, .$$

I et lite vedlegg finner du en utledning som viser hvorfor oppskriften er riktig.

Vi skal nå se på et eksempel som illustrerer hva dette innebærer.

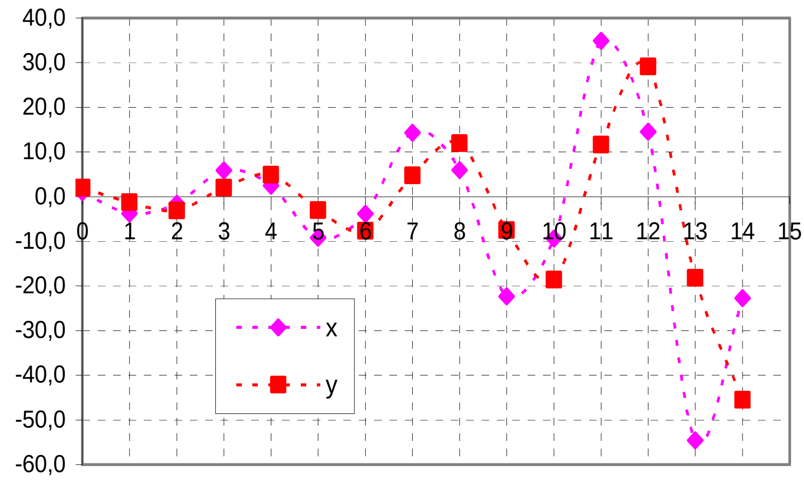
Eksempel 2.1. Vi har gitt dette systemet av differenslikninger:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \tfrac{5}{4} x_k - \tfrac{5}{2} y_k \\ y_{k+1} &= \tfrac{5}{4} x_k - \tfrac{5}{4} y_k \end{aligned} \, , \quad \begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 2 \end{aligned}$$

a) Bruk regneark til å finne de 14 første verdiene av *x* og *y*.
b) Finn en formel for å løse likningssystemet.

Løsning: Du finner regnearket som vedlegg. Tabell over verdiene og graf er vist nedenfor:

k	x	y
0	1,0	2,0
1	-3,8	-1,3
2	-1,6	-3,1
3	5,9	2,0
4	2,4	4,9
5	-9,2	-3,1
6	-3,8	-7,6
7	14,3	4,8
8	6,0	11,9
9	-22,4	-7,5
10	-9,3	-18,6
11	34,9	11,6
12	14,6	29,1
13	-54,6	-18,2
14	-22,7	-45,5



Vi merker oss at grafene tyder på at vi får svingninger med periode 4, og med stadig større amplitude. Det ser også ut til at y-svingningene er litt forsinket i forhold til x-svingningene. La oss se om vi klarer å bekrefte disse funnene ved å finne en formel for løsningen.

Vi starter som vanlig med å skrive likningssystemet på matriseform:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_k .$$

Finner egenverdiene til matrisen:

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{4}-\lambda & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{5}{4}-\lambda\right)\left(-\tfrac{5}{4}-\lambda\right)-\tfrac{5}{4}\cdot\left(-\tfrac{5}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\tfrac{25}{16}-\tfrac{5}{4}\lambda+\tfrac{5}{4}\lambda+\lambda^2+\tfrac{25}{8}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2+\tfrac{25}{16}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lambda=\pm\tfrac{5}{4}i}=\underline{\tfrac{5}{4}e^{\pm i\cdot\frac{\pi}{2}}}$$

Vi får altså to kompleks konjugerte egenverdier. Vi benytter den ene til å finne en egenvektor:
$\lambda = \frac{5}{4}i$:

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{5}{4}-\tfrac{5}{4}i\right)x-\tfrac{5}{2}y&=0 \\ \tfrac{5}{4}x+\left(-\tfrac{5}{4}-\tfrac{5}{4}i\right)y&=0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} (1-i)x-2y&=0 \\ x-(1+i)y&=0 \end{aligned}$$

Disse to likningene er tilsynelatende ikke like. Men se hva som skjer dersom vi multipliserer den øverste likningen med $(1+i)$. Da får vi:

$$\begin{aligned} &(1+i)(1-i)x-2(1+i)y=0 \\ \Leftrightarrow\quad &(1^2-i^2)x-2(1+i)y=0 \\ \Leftrightarrow\quad &(1+1)x-2(1+i)y=0 \\ \Leftrightarrow\quad &x-(1+i)y=0 \end{aligned}$$

Likningene er altså like selv som det ikke så slik ut i utgangspunktet. Vi får nå at

$$x=(1+i)y$$

som gir egenvektor

$$\mathbf{v} = t\underline{\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}} = t\underline{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}.$$

Da blir

$$\mathbf{x} = R^k e^{ik\theta} \cdot \mathbf{v} = \left(\tfrac{5}{4}\right)^k e^{ik\cdot\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\tfrac{5}{4}\right)^k \left(\cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\tfrac{5}{4}\right)^k \left(\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot i\sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)\right) + i\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \left(\tfrac{5}{4}\right)^k \left(\begin{bmatrix} \cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} + i\cdot\begin{bmatrix} \sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}\right)$$

slik at løsningen blir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_k = C_1 \cdot \mathrm{Re}(\mathbf{x}) + C_2 \cdot \mathrm{Im}(\mathbf{x})$$

$$\underline{= C_1 \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^k \left(\begin{bmatrix} \cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}\right) + C_2 \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^k \left(\begin{bmatrix} \sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}\right)}$$

Til slutt finner vi konstantene C_1 og C_2:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{5}{4}\right)^0 \left(C_1\begin{bmatrix} \cos 0 - \sin 0 \\ \cos 0 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} \sin 0 + \cos 0 \\ \sin 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 = 2 \end{bmatrix}$$

Nederste linje i likningen ovenfor gir direkte at

$$C_1 = 2.$$

Øverste linje gir deretter

$$C_1 + C_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = 1 - C_1 = 1 - 2 = -1.$$

Da får vi løsningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_k = \left(\tfrac{5}{4}\right)^k \left(2\cdot\left(\begin{bmatrix} \cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix} \sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$\underline{\underline{= \left(\tfrac{5}{4}\right)^k \left(\begin{bmatrix} \cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) - 3\sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \\ 2\cos\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}\right)}}$$

En kontroll med regneark viser at denne formelen gir de samme tallfølgene som den rekursive løsningen.

Som du ser, er det temmelig mye arbeid og temmelig kronglet arbeid for å komme fram til den komplette løsningen. I praksis gjennomfører vi sjelden alt dette arbeidet. Men hvis du ser hvordan løsningen avhenger av egenverdiene og egenvektorene, vil du se noen generelle trekk som det kan være lurt å være oppmerksom på:

- Dersom du får komplekse egenverdier, vil løsningen representere et svingende system.

- Modulus til egenverdien skal opphøyes i *k*. Det fører til at svingningene dempes dersom modulus er mindre enn 1, har stabil amplitude dersom modulus er lik 1, og øker dersom modulus er større enn 1 (som i vårt eksempel).

- Vi finner perioden i svingningene ved å sette

  $$k \cdot \theta = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\theta}.$$

  I vårt eksempel får vi at perioden er gitt ved

  $$k = \frac{2\pi}{\theta} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

  som stemmer med grafene.

Løs **Oppgave 2.1**.