System av lineære, homogene 1. ordens differenslikninger.

1.1. Den generelle løsningen.

Vi har tidligere sett hvordan et system av to lineære 1.ordens differenslikninger kan omformes til en 2.ordens differenslikning ved en slags eliminasjonsteknikk. Denne metoden er plundrete, og nærmest ubrukelig når vi har større likningssystem. Vi skal nå se hvordan slike problem kan løses ved hjelp av matriseregning.

Vi skal starte med et eksempel som vil forfølge oss gjennom store deler av dette notatet.

Eksempel 1.1: På et isolert område (for eksempel ei øy) er det en harebestand og en revebestand. Antall harer i år *k* skal vi kalle H_k, og antall rever i år *k* skal vi kalle R_k. I startåret ($k=0$) er det $R_0 = 800$ rever og $H_0 = 1200$ harer. Videre antar vi at bestandene utvikler seg slik:

$$R_{k+1} = 0.4R_k + 0.3H_k$$
$$H_{k+1} = -0.4R_k + 1.2H_k$$

a) Forklar med ord hva disse likningene innebærer.

b) Bruk for eksempel regneark til å finne bestandsstørrelsene i 15 år framover.

Løsning:

a) Disse likningene kan tolkes slik:
Den øverste likningen viser utviklingen av revebestanden. Dersom det ikke er harer til stede i år *k* ($H_k = 0$), vil revebestanden neste år være 0.4 ganger årets revebestand. Hver hare vil i gjennomsnitt gi 0.3 ekstra rever neste år.

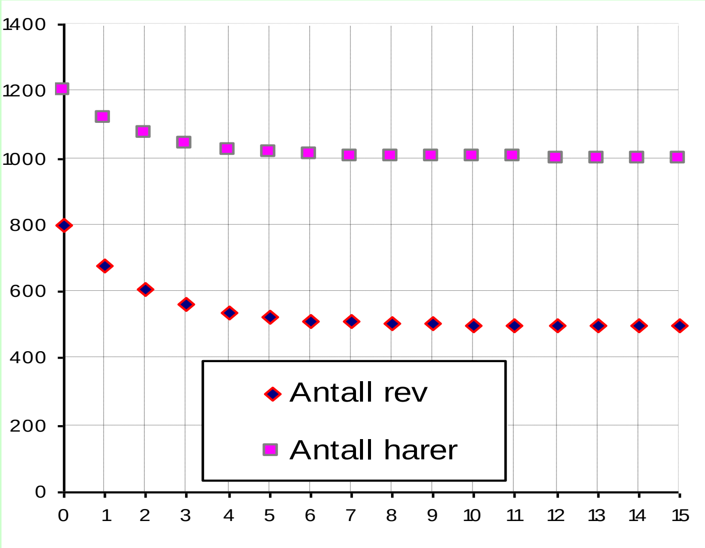
Den nederste likningen viser utviklingen av harebestanden. Dersom det ikke er rever til stede i år *k* ($R_k = 0$), vil harebestanden neste år være 1.2 ganger årets bestand. Hver rev vil i gjennomsnitt redusere harebestanden med 0.4 individer.

b) Vi prøver først å regne for hand:

År (*k*)	Rever (R_k)	Harer (H_k)
0	$R_0 = 800$	$H_0 = 1200$
1	$R_1 = 0.4R_0 + 0.3H_0$ $= 0.4 \cdot 800 + 0.3 \cdot 1200 = 680$	$H_1 = -0.4R_0 + 1.2H_0$ $= -0.4 \cdot 800 + 1.2 \cdot 1200 = 1120$
2	$R_2 = 0.4R_1 + 0.3H_1$ $= 0.4 \cdot 680 + 0.3 \cdot 1120 = 608$	$H_2 = -0.4R_1 + 1.2H_1$ $= -0.4 \cdot 680 + 1.2 \cdot 1120 = 1072$
3	$R_3 = 0.4R_2 + 0.3H_2$ $= 0.4 \cdot 608 + 0.3 \cdot 1072 \approx 565$	$H_3 = -0.4R_2 + 1.2H_2$ $= -0.4 \cdot 608 + 1.2 \cdot 1072 \approx 1043$
4	osv…	osv…

Vi gir opp å regne for hand, og benytter heller et regneark. Resultatene er vist på neste side. Der ser du at bestandene stabiliserer seg på omtrent 500 rever og 1000 harer i løpet av ca. 10 år.

År	Antall rev	Antall harer
0	800	1200
1	680	1120
2	608	1072
3	565	1043
4	539	1026
5	523	1016
6	514	1009
7	508	1006
8	505	1003
9	503	1002
10	502	1001
11	501	1001
12	501	1000
13	500	1000
14	500	1000
15	500	1000



Du innser sikkert at det er temmelig tungvint å beregne bestandsstørrelsene langt fram i tid på denne måten. Det er mye gunstigere å finne en formel for bestandsstørrelsene som vi kan bruke til å finne ut om bestandene vil dø ut eller om de vil stabilisere seg, og i så fall på hvilke nivåer. Vi kan også finne ut hvor fort endringene vil skje, og hvor lang tid det vil ta før bestandene eventuelt vil stabilisere seg.

For å finne en slik formel, starter vi med å skrive likningene for bestandsutviklingen på matriseform slik:

$$\begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_k , \qquad \begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 800 \\ 1200 \end{bmatrix} .$$

Vi kan nå innføre en *bestandsvektor*

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_k$$

og en *overgangsmatrise*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} .$$

Da kan likningssystemet skrives

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k , \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 800 \\ 1200 \end{bmatrix} .$$

Skrivemåten ovenfor gjelder ikke bare for vårt eksempel med harer og rever. Vi slår derfor fast at:

Ethvert system av lineære homogene 1.ordens differenslikninger kan skrives på formen

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k$$

der $\mathbf{x}_k$ angir tilstanden i periode k og **A** er en kvadratisk overgangsmatrise.

La oss se nærmere på hva dette innebærer. Dersom vi setter $k = 0$, får vi

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0$$

Dersom vi setter $k = 1$, får vi

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 \right) = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{x}_0 .$$

Og setter vi $k = 2$, får vi

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{x}_0 \right) = \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{x}_0 .$$

Og slik kan vi fortsette. Du innser sikkert at vi får den generelle formelen

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{x}_0 .$$

Vi kan altså finne en formel for bestandene i år k ved å beregne $\mathbf{A}^k$ og deretter multiplisere med start-tilstanden $\mathbf{x}_0$. Men hvordan skal vi enklest beregne $\mathbf{A}^k$? Svaret finer vi i teorien for *diagonalisering*. Du husker sikkert at

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{M}^{-1}$$

der egenverdiene til **A** samles i ***egenverdi-matrisen***

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

mens de tilhørende egenvektorene samles i ***egenvektor-matrisen***

$$\mathbf{M} = \left[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n \right].$$

Da får vi den formelen vi er ute etter:

Når et system av differenslikninger er skrevet på formen

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k$$

kan løsningen av likningssystemet skrives på formen

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0$$

der λ_i er egenverdiene til matrisen **A**, mens

$$\mathbf{M} = \left[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n \right]$$

har de tilhørende egenvektorene som kolonnevektorer.

Når du beregner egenvektorene, er det helt likegyldig hvilke konstanter du velger foran egenvektorene. Grunnen er at når du setter opp egenvektor-matrisen **M**, beregner $\mathbf{M}^{-1}$ og multipliserer sammen, vil disse konstantene forkortes bort. Du kan derfor velge konstanter slik at egenvektorene blir så "pene" som mulig.

Oppskriften i ramma ovenfor forutsetter at matrisen **A** har *n* lineært uavhengige egenvektorer. I de aller fleste tilfeller vil denne forutsetningen være oppfylt. Vi skal senere se hvordan vi kan finne en løsning selv om denne forutsetningen ikke er oppfylt.

Men først skal vi gå tilbake til våre rever og harer fra det innledende eksemplet.

Eksempel 1.2: Løs likningssystemet

$$\begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_k, \qquad \begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 800 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

og påvis at løsningen går mot en stabil verdi når $k \to \infty$.

Løsning: Her er

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix}.$$

Jeg finner først egenverdiene og egenvektorene til **A**:

$$\begin{vmatrix} 0.4-\lambda & 0.3 \\ -0.4 & 1.2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0.4-\lambda)(1.2-\lambda) - (-0.4)\cdot 0.3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.48 - 1.6\lambda + \lambda^2 + 0.12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.6 = 0$$

$$\lambda = \frac{1.6 \pm \sqrt{2.56-2.4}}{2} = \frac{1.6 \pm 0.4}{2} = \begin{cases} \underline{1.0} \\ \underline{0.6} \end{cases}$$

Egenvektor tilknyttet $\underline{\lambda_1 = 1.0}$:

$$\begin{aligned} (0.4-1.0)R + 0.3H &= 0 \\ -0.4R + (1.2-1.0)H &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -0.6R + 0.3H &= 0 \\ -0.4R + 0.2H &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad H = 2R$$

Velger $R = t_1 \quad \Leftrightarrow \quad H = 2R = 2t_1$ slik at egenvektoren blir

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ 2t_1 \end{bmatrix} = \underline{t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}.$$

Egenvektor tilknyttet $\underline{\lambda_2 = 0.6}$:

$$\begin{aligned} (0.4-0.6)R + 0.3H &= 0 \\ -0.4R + (1.2-0.6)H &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -0.2R + 0.3H &= 0 \\ -0.4R + 0.6H &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad R = \tfrac{3}{2}H$$

Velger $H = 2t_2 \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{3}{2}H = 3t_2$ slik at egenvektoren blir

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t_2 \\ 2t_2 \end{bmatrix} = \underline{t_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}.$$

I denne problemstillingen kan vi velge t_1 og t_2 fritt. Vi setter $t_1 = t_2 = 1$, slik at egenvektor-matrisen blir

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \iff \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{2-6}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Egenverdi-matrisen blir

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} \iff \mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.6^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6^k \end{bmatrix}.$$

Vi kan altså sette at

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6^k \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 800 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 0 & 1\cdot 0 + 3\cdot 0.6^k \\ 2\cdot 1 + 2\cdot 0 & 2\cdot 0 + 2\cdot 0.6^k \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -2\cdot 800 + 3\cdot 1200 \\ 2\cdot 800 - 1\cdot 1200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3\cdot 0.6^k \\ 2 & 2\cdot 0.6^k \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2000 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3\cdot 0.6^k \\ 2 & 2\cdot 0.6^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 500 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 500 + 300\cdot 0.6^k \\ 1000 + 200\cdot 0.6^k \end{bmatrix}}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \end{bmatrix} + 0.6^k \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix}}}$$

Når $k \to \infty$, vil $0.6^k \to 0$. Da vil

$$\begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_k \to \begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

som viser at bestandene stabiliserer seg med 500 rever og 1000 harer.

1.2. En alternativ formel for løsningen.

Selv om formelen

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0$$

ser besnærende enkel ut, har den en liten svakhet: Den forutsetter at vi kjenner start-tilstanden $\mathbf{x}_0$. Hva gjør vi dersom vi ikke kjenner $\mathbf{x}_0$? Vi lager en liten vri på formelen:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 = \left(\mathbf{M} \cdot \mathbf{D}^k\right) \cdot \left(\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0\right).$$

Her blir

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^{\,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{\,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\,k}\mathbf{v}_1 & \lambda_2^{\,k}\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n^{\,k}\mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

Når vi multipliserer sammen $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_0$, får vi en kolonnevektor. Vi setter rett og slett

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}.$$

der C_1, C_2, …, C_n er konstanter. Vi får da

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= \mathbf{M}\cdot\mathbf{D}^k\cdot\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{x}_0 = \left(\mathbf{M}\cdot\mathbf{D}^k\right)\cdot\left(\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{x}_0\right) \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1{}^k\mathbf{v}_1 & \lambda_2{}^k\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n{}^k\mathbf{v}_n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \\
&= \underline{C_1\lambda_1{}^k\mathbf{v}_1 + C_2\lambda_2{}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + C_n\lambda_n{}^k\mathbf{v}_n}
\end{aligned}$$

Vi setter også denne formelen i ramme:

> Når et system av differenslikninger er skrevet på formen
> $$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_k$$
> kan løsningen av likningssystemet skrives på formen
> $$\mathbf{x}_k = C_1\lambda_1{}^k\mathbf{v}_1 + C_2\lambda_2{}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + C_n\lambda_n{}^k\mathbf{v}_n$$
> der λ_i er egenverdiene til matrisen **A**, mens $\mathbf{v}_i$ er de tilhørende egenvektorene.

Du finner en alternativ utledning av denne siste formelen i et lite vedlegg.

Selv om denne formelen er "styggere" enn den forrige, viser det seg at den ofte er enklere i bruk selv om vi kjenner start-tilstanden $\mathbf{x}_0$. For det første slipper du å regne ut $\mathbf{M}^{-1}$. Men den inneholder også mer informasjon. Mange ganger er vi mer interessert i å si noe om hvordan tilstandene vil utvikle seg generelt, og er mindre interessert i å finne en spesiell løsning fra en kjent start-tilstand. Vi ser av denne formelen at dersom vi skal kunne oppnå en stabil tilstand, må en av egenverdiene være lik 1 mens de andre egenverdiene må ha tallverdi mindre enn 1. I den stabile tilstanden er da forholdet mellom x_1, x_2, …, x_n lik forholdet mellom elementene i den egenvektoren som er knyttet til egenverdien med verdi 1. Dersom noen av egenverdiene er større enn 1, vil tilstandene vokse over alle grenser. Dersom noen av egenverdiene er negative, vil disse egenverdiene gi bidrag med vekslende fortegn. Dette kan føre til svingninger.

La oss se hvordan denne siste formelen fungerer for våre harer og rever.

Eksempel 1.3: Løs likningssystemet

$$\begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_k, \qquad \begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 800 \\ 1200 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi benytter at vi allerede har funnet egenverdiene og egenvektorene til **A**:

Egenverdi $\lambda_1 = 1.0$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Egenverdi $\lambda_2 = 0.6$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Da blir

$$\begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_k = C_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + C_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 = C_1 \cdot 1^k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \cdot (0.6)^k \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{C_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \cdot (0.6)^k \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}.$$

Vi finner konstantene C_1 og C_2 ved å benytte at

$$\begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 800 \\ 1200 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \cdot (0.6)^0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + 3C_2 \\ 2C_2 + 2C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 1200 \end{bmatrix}.$$

Dette gir likningssystemet

$$\begin{aligned} C_1 + 3C_2 &= 800 \\ 2C_1 + 2C_2 &= 1200 \end{aligned}.$$

Multipliserer den øverste likningen med 2, og trekker fra den nederste. Får da

$$4C_2 = 400 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_2 = 100}$$

som videre gir

$$C_1 = 800 - 3C_2 = 800 - 3 \cdot 100 = \underline{500}.$$

Altså er løsningen av problemet

$$\begin{bmatrix} R \\ H \end{bmatrix}_k = 500 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 100 \cdot (0.6)^k \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 500 \\ 1000 \end{bmatrix} + 0.6^k \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix}}}$$

Dette er samme formel som vi fant tidligere.

Prøv deg selv på Oppgave 1.1 og Oppgave 1.2.

Slike system av differenslikninger benyttes innen mange fagfelt. Innen økonomi og samfunnsfag er Markov-kjeder mye brukt. Jeg vil anbefale at du går gjennom notatet om Markov-kjeder før du gyver løs på noen gamle eksamensoppgaver.

Noen ganger opplever vi at egenverdiene til **A**-matrisen blir kompleks konjugerte. Dersom du er vant til å regne med komplekse tall, vil ikke det sjenere deg noe. Jeg har likevel laget et lite notat der jeg gir noen tips om hvordan du enklest går fram når du får komplekse egenverdier.

En sjelden gang kan du komme ut for at **A**-matrisen ikke har fullt sett lineært uavhengige egenvektorer. Her finner du et lite notat som omhandler denne situasjonen.