2.3. Sammenfallende egenverdier.

Vi har et system av *n* homogene differensiallikninger

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

der **A** er en $n \times n$-matrise. Du husker sikkert at likningssystemet har løsningen

$$\mathbf{y}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\mathbf{v}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}\mathbf{v}_n$$

der λ_1, λ_2, …, λ_n er egenverdiene til **A** og $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ er de tilhørende egenvektorene. Men denne løsningen forutsetter at **A** har *n* lineært uavhengige egenvektorer. Dersom to eller flere av egenverdiene er like, kan det hende at **A** ikke har *n* lineært uavhengige egenvektorer. Hva gjør vi da?

Vi skal begrense oss til den vanligste situasjonen: **A** har to like egenverdier $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Du husker sikkert at noen ganger fins det to lineært uavhengige egenvektorer selv om vi har to like egenverdier. Da har vi ingen problemer. Men nå skal vi anta at vi bare kan finne *en* egenvektor **v** til λ.

For å få komplett løsning av likningssystemet i dette tilfellet, gjetter vi på at løsningen kan inneholde et ledd av formen

$$\mathbf{y}_k = C\left(e^{\lambda x}(x\mathbf{v} + \mathbf{u})\right).$$

Her er λ den doble egenverdien, og $\mathbf{v}$ er den tilhørende egenvektoren. For å finne **u**, setter vi dette leddet inn i den opprinnelige differensiallikningen:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad C\left(\lambda e^{\lambda x}(x\mathbf{v} + \mathbf{u}) + e^{\lambda x}\mathbf{v}\right) = \mathbf{A} \cdot C\left(e^{\lambda x}(x\mathbf{v} + \mathbf{u})\right).$$

Her kan vi forkorte bort $Ce^{\lambda x}$, og står da igjen med

$$\lambda(x\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot (x\mathbf{v} + \mathbf{u}) \quad \Leftrightarrow \quad x\lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v} = x\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}.$$

Men siden λ og **v** er egenverdi og egenvektor til **A**, er $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$. Dermed faller første ledd på begge sider av likhetstegnet bort, og vi står igjen med

$$\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

Her har vi funnet nøkkelen til løsning på problemet vårt:

Dersom **A** er en $n \times n$-matrise der to av egenverdiene er like, og det kun fins *en* egenvektor **v** til disse like egenverdiene, kan løsningen av differensiallikningssystemet

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

skrives

$$\mathbf{y}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\mathbf{v}_2 + \cdots + C_{n-1} e^{\lambda x}\mathbf{v} + C\left(e^{\lambda x}(x\mathbf{v} + \mathbf{u})\right)$$

der λ er de to like egenverdiene, og **u** er en vektor som tilfredsstiller kravet

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

Dette må vi illustrere med et eksempel:

Eksempel 2.3: Løs dette systemet av differensiallikninger:

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 - 4y_2 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 2 \end{aligned}.$$

Løsning: Likningssystemet kan skrives på formen

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}.$$

Finner egenverdier til **A**:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-2-\lambda)(-4-\lambda)+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad 8+2\lambda+4\lambda+\lambda^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2+6\lambda+9=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+3)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \underline{-3}$$

Vi har altså bare en egenverdi. Finner egenvektor(er):

$$\begin{aligned} (-2-(-3))x_1 + 1x_2 &= 0 \\ -1x_1 + (-4-(-3))x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2.$$

Dette gir en egenvektor

$$\mathbf{v} = \underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Oppskriften i ramma gir at vi nå må finne en vektor **u** som tilfredsstiller kravet

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} - (-3)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} u_1 + u_2 &= -1 \\ -u_1 - u_2 &= 1 \end{aligned}$$

Her kan vi for eksempel velge $u_2 = 0$ som gir $u_1 = -1$ slik at

$$\mathbf{u} = \underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}.$$

Dermed har vi funnet den generelle løsningen

$$\mathbf{y} = C_1 e^{-3x} \cdot \mathbf{v} + Ce^{-3x}(x\mathbf{v}+\mathbf{u}) = C_1 e^{-3x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + Ce^{-3x} \left(x \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \underline{e^{-3x} \begin{bmatrix} -C_1 - Cx - C \\ C_1 + Cx \end{bmatrix}}.$$

Finner konstantene:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad e^0 \begin{bmatrix} -C_1 - C\cdot 0 - C \\ C_1 + C \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Av den nederste likningen får vi direkte at $C_1 = \underline{2}$.

Den øverste likningen gir nå

$$-C_1 - C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = -C_1 - 1 = -2 - 1 = \underline{-3}.$$

Dermed er løsningen

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = e^{-3x} \begin{bmatrix} -2+3x+3 \\ 2-3x \end{bmatrix} = \underline{\underline{e^{-3x} \begin{bmatrix} 1+3x \\ 2-3x \end{bmatrix}}}.$$

Oppgave 2.4.