2.2. Komplekse egenverdier.

Når vi skriver et system av differensiallikninger på formen

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}\,,$$

der **A** har bare reelle elementer, forekommer det at **A** får kompleks konjugerte egenverdier

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta\,.$$

Da har vi tidligere vist at de tilhørende egenvektorene også er kompleks konjugerte, og vi skriver dem

$$\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{w}\,.$$

Disse egenverdiene og egenvektorene fører til at løsningen av likningssystemet får ledd av formen

$$C_1 e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\mathbf{v}_2\,.$$

Nå kan vi selvfølgelig bruke leddene slik de står uten å bry oss om at de er komplekse. Men for å få noe meningsfylt ut av dem, må de omformes slik at vi bare får reelle ledd. Denne prosessen kan være vanskelig dersom vi ikke er vant til å regne med komplekse tall. For å hjelpe deg på vei, skal jeg sette opp disse retningslinjene:

Når overgangsmatrisen **A** har en kompleks egenverdi

$$\lambda = \alpha + i\beta\,,$$

starter du med å finne en kompleks egenvektor

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$$

til denne egenverdien, der **u** og **w** er reelle vektorer.
Definer en vektor

$$\mathbf{y} = e^{(\alpha+i\beta)x}\cdot\mathbf{v} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}\cdot\mathbf{v} = e^{\alpha x}\cdot\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right)(\mathbf{u} + i\mathbf{w})\,,$$

og splitt denne opp i en realdel og en imaginærdel.
Løsningen av differenslikningen vil da inneholde leddene

$$C_1\cdot\operatorname{Re}(\mathbf{y}) + C_2\cdot\operatorname{Im}(\mathbf{y})\,.$$

I et lite vedlegg finner du en utledning som viser hvorfor oppskriften er riktig.

Vi skal nå se på et eksempel som illustrerer hva dette innebærer.

Eksempel 2.2: Finn den generelle løsningen til likningssystemet

$$y_1' = 4y_1 - 3y_2$$
$$y_2' = 3y_1 + 4y_2$$

Løsning: Vi starter som før med å skrive likningssystemet på matriseform:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Så følger vi vanlig prosedyre, og finner egenverdier og tilhørende egenvektorer til matrisen:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4-\lambda)^2 + 9 = 0$$

Her er det lettest å flytte 9-tallet over på andre siden av likhetstegnet og trekke kvadratrota:

$$(4-\lambda)^2 = -9 \quad \Leftrightarrow \quad 4-\lambda = \pm 3i \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \underline{4 \pm 3i}\,.$$

Det er tilstrekkelig å finne den ene egenvektoren. Den andre blir kompleks konjugert. Vi nøyer oss derfor med å finne egenvektoren tilknyttet $\lambda = 4+3i$. Vi får

$$\begin{aligned} \left(4-(4+3i)\right)x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 3x_1 + \left(4-(4+3i)\right)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -i3x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 3ix_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = ix_2$$

Dette gir en egenvektor

$$\mathbf{v} = \underline{\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}.$$

Ifølge oppskriften i ramma skal vi nå definere

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= e^{\alpha x} \cdot \left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right)(\mathbf{u} + i\mathbf{w}) = e^{4x} \cdot \left(\cos(3x) + i\sin(3x)\right)\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= e^{4x}\left(\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cos(3x) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin(3x)\right) + i\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\sin(3x) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos(3x)\right)\right) \\ &= \underline{e^{4x}\left(\begin{bmatrix} -\sin(3x) \\ \cos(3x) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} \cos(3x) \\ \sin(3x) \end{bmatrix}\right)} \end{aligned}$$

Dermed blir løsningen av likningssystemet

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} &= C_1 \cdot \mathrm{Re}(\mathbf{y}) + C_2 \cdot \mathrm{Im}(\mathbf{y}) = C_1 \cdot e^{4x} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(3x) \\ \cos(3x) \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^{4x} \cdot \begin{bmatrix} \cos(3x) \\ \sin(3x) \end{bmatrix} \\ &= \underline{e^{4x} \cdot \begin{bmatrix} -C_1\sin(3x) + C_2\cos(3x) \\ C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

Dersom vi kjenner startverdiene til y_1 og y_2, kan vi også finne konstantene C_1 og C_2.

Av dette uttrykket ser vi at løsningen blir en svingning der amplituden vokser som e^{4x}, og perioden T er gitt ved

$$3T = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad T = \tfrac{2}{3}\pi\,.$$

Oppgave 2.3.