3. Inhomogene likningssystem.

Problemet er nå: Løs likningssystemet

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$$

med start-tilstand $\mathbf{y}(0)$.

Vi har tidligere satt opp to "oppskrifter" for å løse det tilhørende homogene likningssystemet. Dessverre fins det ikke noen enkle standard oppskrifter for *inhomogene* likningssystem. Vi må *forstå* en eller annen teknikk. Og disse teknikkene kan være arbeidskrevende.

Jeg skal presentere to slike teknikker, og skal etter beste evne prøve å få fram gangen i løsningen.

3.1. Ubestemte koeffisienters metode.

Når vi bruker denne metoden, får vi bruk for denne setningen:

Et system av inhomogene lineære første ordens differensiallikninger er gitt på formen

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$$

Den generelle løsningen av dette likningssystemet er gitt ved

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x)$$

der $\mathbf{y}_h(x)$ er løsningen av det tilhørende homogene likningssystemet mens $\mathbf{y}_p(x)$ er en partikulær løsning.

Det er enkelt å vise (ved innsetting) at

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x)$$

virkelig er løsning av det gitte likningssettet (prøv!). Det er verre å vise at det ikke fins andre løsninger, og vi skal ikke gjennomføre dette beviset.

Hvordan skal vi finne en partikulær løsning $\mathbf{y}_p(x)$? Vi skal benytte samme framgangsmåte som når vi løser inhomogene *n*'te ordens lineære differensiallikninger: Vi prøver med en løsning av samme form som $\mathbf{g}(x)$, og prøver å bestemme de koeffisientene som inngår i vår "prøveløsning". Men vi må være forsiktige når vi setter opp "prøveløsning": *Alle* typer funksjoner som inngår i *ett* av elementene i $\mathbf{g}(x)$, må inngå i *alle* elementene i $\mathbf{y}_p(x)$.

Jeg skal illustrere framgangsmåten med et eksempel..

***Eksempel 3.1*: ** Løs likningssystemet

$$y_1' = 2y_1 - 3y_2, \qquad y_1(0) = 5$$
$$y_2' = -y_1 \qquad + 3e^{2x}, \quad y_2(0) = -2$$

Løsning: Dette likningssystemet kan skrives på matriseform slik:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{2x} \end{bmatrix}.$$

Den homogene likningen blir

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y}.$$

Denne likningen har vi allerede løst i Eksempel 2.1. Der fant vi at

$$\mathbf{y}_h(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 x} = \underline{C_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x}}.$$

Så må vi finne en partikulær løsning $\mathbf{y}_p(x)$. Siden $\mathbf{g}(x)$ inneholder et e^{2x} - ledd, prøver vi en partikulær løsning

$$\mathbf{y}_p(x) = \begin{bmatrix} Ae^{2x} \\ Be^{2x} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_p'(x) = \begin{bmatrix} 2Ae^{2x} \\ 2Be^{2x} \end{bmatrix}.$$

Setter inn i det gitte likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 2Ae^{2x} \\ 2Be^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Ae^{2x} \\ Be^{2x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Ae^{2x} - 3Be^{2x} \\ -Ae^{2x} + e^{2x} \end{bmatrix}$$

Dette gir de to likningene

$$2Ae^{2x} = 2Ae^{2x} - 3Be^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad -3Be^{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{B = 0}$$
$$2Be^{2x} = -Ae^{2x} + 3e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad 2B = -A + 3 \quad \Leftrightarrow \quad A = 3 - 2B = 3 - 0 = \underline{3}$$

Da er vi ved veis ende:

$$\mathbf{y}_p(x) = \begin{bmatrix} Ae^{2x} \\ Be^{2x} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 3e^{2x} \\ 0 \end{bmatrix}}.$$

Dette gir

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x) = C_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x} + \begin{bmatrix} 3e^{2x} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + 3e^{2x} \\ C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} \end{bmatrix}}}.$$

Til slutt finner vi konstantene C_1 og C_2:

$$y_1(0) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad -3C_1 e^0 + C_2 e^0 + 3e^0 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad -3C_1 + C_2 = 2.$$

$$y_2(0) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 e^0 + C_2 e^0 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 = -2 .$$

Trekker disse likningene fra hverandre, og får

$$-4C_1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1 = -1} .$$

Da blir

$$C_2 = -2 - C_1 = -2 - (-1) = \underline{-1} .$$

Løsningen blir da:

$$y_1(x) = -3C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + 3e^{2x} = -3(-1)e^{3x} + (-1)e^{-x} + 3e^{2x} = \underline{\underline{3e^{3x} - e^{-x} + 3e^{2x}}} .$$

$$y_2(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} = \underline{\underline{-e^{3x} - e^{-x}}} .$$

3.2. Dekopling.

Metoden ovenfor kan føre til mye omstendelig regning. Dersom du er flink til å manipulere matriser, og dessuten er flink til å integrere, (eller har dataverktøy som kan hjelpe deg), vil du sikkert foretrekke metoden nedenfor.

Gitt likningssystemet

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$$

Her er $\mathbf{A}$ en $n \times n$-matrise som har egenverdiene $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ med tilhørende lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n$.

Likningssystemet løses etter følgende oppskrift:

1. Definer
$$\mathbf{M} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] .$$
2. Beregn
$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} .$$
3. Bestem komponentene z_i i en vektor $\mathbf{z}$ ved
$$z_i(x) = e^{\lambda_i x} \left(\int f_i(x) e^{-\lambda_i x}\, dx + C_i \right) .$$
4. Løsningen av likningssettet er da
$$\mathbf{y} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{z} = \underline{\underline{\mathbf{v}_1 z_1 + \mathbf{v}_2 z_2 + \cdots + \mathbf{v}_n z_n}} .$$

Løsningen inneholder konstanter $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ som kan bestemmes dersom vi kjenner en start-tilstand $\mathbf{y}(0)$.

Beviset for at oppskriften virker finner du i vedlegget, der du også ser hvorfor metoden har fått betegnelsen "dekopling".

Vi tester ut denne oppskriften med samme eksempel som ovenfor:

***Eksempel 3.2*:** Løs likningssystemet

$$y_1' = 2y_1 - 3y_2\,, \qquad y_1(0) = 5$$
$$y_2' = -y_1 \qquad + 3e^{2x}\,, \qquad y_2(0) = -2$$

Løsning: Skriver likningssettet på matriseform slik:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{2x} \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{2x} \end{bmatrix}.$$

Vi har tidligere funnet egenverdier og egenvektorer til **A**:

- Egenverdi $\lambda_1 = 3$ med egenvektor $\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Egenverdi $\lambda_2 = -1$ med egenvektor $\mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Det er likegyldig hvilke verdier vi velger for t_1 og t_2 fordi disse konstantene etter hvert vil forkortes bort. Vi setter $t_1 = t_2 = 1$, og får

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{-3-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}}.$$

Da blir

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^{2x} \\ \frac{9}{4}e^{2x} \end{bmatrix}.$$

Så finner vi z_1 og z_2:

$$z_1(x) = e^{\lambda_1(x)}\left(\int f_1(x) \cdot e^{-\lambda_1 x}\,dx + C_1\right) = e^{3x}\left(\int \tfrac{3}{4}e^{2x} \cdot e^{-3x}\,dx + C_1\right)$$
$$= e^{3x}\left(\tfrac{3}{4}\int e^{-x}\,dx + C_1\right) = e^{3x}\left(\tfrac{3}{4}\left(-e^{-x}\right) + C_1\right)$$
$$= \underline{-\tfrac{3}{4}e^{2x} + C_1 e^{3x}}$$

$$z_2(x) = e^{\lambda_2(x)}\left(\int f_2(x)\cdot e^{-\lambda_2 x}\,dx + C_2\right) = e^{-x}\left(\int \tfrac{9}{4}e^{2x}\cdot e^{-(-x)}\,dx + C_2\right)$$

$$= e^{-x}\left(\tfrac{9}{4}\int e^{3x}\,dx + C_2\right) = e^{-x}\left(\tfrac{9}{4}\cdot\tfrac{1}{3}e^{3x} + C_2\right)$$

$$= \underline{\tfrac{3}{4}e^{2x} + C_2 e^{-x}}$$

Da blir

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}_1 z_1 + \mathbf{v}_2 z_2$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}\left(-\tfrac{3}{4}e^{2x} + C_1 e^{3x}\right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\tfrac{3}{4}e^{2x} + C_2 e^{-x}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \tfrac{9}{4}e^{2x} - 3C_1 e^{3x} + \tfrac{3}{4}e^{2x} + C_2 e^{-x} \\ -\tfrac{3}{4}e^{2x} + C_1 e^{3x} + \tfrac{3}{4}e^{2x} + C_2 e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + 3e^{2x} \\ C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} \end{bmatrix}}}$$

Dette er samme resultat som vi fant i Eksempel 3.1. Konstantene bestemmes på samme måte som før.

Legg merke til at metoden ovenfor gir *komplett* løsning av likningssystemet, ikke bare en partikulær løsning.

Løs Oppgave 3.1.