2. Homogene likningssystem.

2.1. Den generelle løsningsmetoden.

Vi skal starte med å løse ***homogene*** system av lineære 1.ordens differensiallikninger med konstante koeffisienter, d.v.s. likningssystem av typen $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y}$. Slike likningssystem løses med følgende oppskrift:

Gitt likningssystemet

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y}$$

med start-tilstand $\mathbf{y}(0)$.

Her er $\mathbf{A}$ er en $n\times n$-matrise som har egenverdiene $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ med tilhørende lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n$.

Da kan løsningen av likningssystemet skrives på formen

$$\mathbf{y}(x) = C_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 x} + C_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n\mathbf{v}_ne^{\lambda_n x}$$

Hvis start-tilstanden $\mathbf{y}(0)$ er kjent, kan konstantene $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ bestemmes.

Vi kan også finne løsningen slik:

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{y}(0).$$

Her er

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

Beviset for setningen finner du i et eget vedlegg.

***Eksempel 2.1*:** Bruk matriseteknikk til å løse likningssystemet

$$y_1' = 2y_1 - 3y_2, \qquad y_1(0) = 4$$
$$y_2' = -y_1, \qquad y_2(0) = 0$$

Løsning: Likningssystemet kan skrives

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finner egenverdiene til **A**:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(-\lambda) - (-1)(-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\lambda + \lambda^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Egenverdiene er altså $\underline{\lambda_1 = 3}$ og $\underline{\lambda_2 = -1}$.

Finner egenvektorene:

$$\lambda_1 = 3: \quad \begin{matrix} (2-3)x_1 - 3x_2 = 0 \\ -1x_1 + (0-3)x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 - 3x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -3x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\lambda_2 = -1: \quad \begin{matrix} (2-(-1))x_1 - 3x_2 = 0 \\ -1x_1 + (0-(-3))x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 - 3x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Den generelle løsningen er da

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 x} = \underline{C_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x}}.$$

Finner C_1 og C_2:

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -3C_1 + C_2 = 4 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{matrix}$$

Trekker likningene fra hverandre, og får

$$-4C_1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{-1}$$

som videre gir

$$C_1 + C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -C_1 = -(-1) = \underline{1}.$$

Alt i alt blir løsningen

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3x} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3e^{3x} + e^{-x} \\ -e^{3x} + e^{-x} \end{bmatrix}}}.$$

Som kontroll skal vi regne ut

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{y}(0).$$

Vi har allerede regnet ut egenverdier og egenvektorer, og skriver direkte opp:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{M} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{-3-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}}.$$

Det er likegyldig hvilke verdier vi velger for t_1 og t_2 når vi setter opp egenvektorene fordi disse konstantene etter hvert vil forkortes bort. Vi har derfor satt $t_1 = t_2 = 1$ ovenfor. Da blir

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3e^{3x} & e^{-x} \\ e^{3x} & e^{-x} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3e^{3x} + e^{-x} \\ -e^{-3x} + e^{-x} \end{bmatrix}}}$$

Dette er samme løsning som før.

Løs **Oppgave 2.1** og **Oppgave 2.2**.

I eksemplet ovenfor og i oppgavene har vi bare fått reelle egenverdier. Men i praksis kommer du også ut for kompleks konjugerte egenverdier. Dette fører til at løsningene består av sinus- og cosinusledd istedenfor eksponentialledd. Du finner detaljer i et tilleggsnotat.

Vi har hele tiden forutsatt at likningssystemets matrise har n lineært uavhengige egenvektorer. En sjelden gang er dette ikke tilfelle. Jeg har laget et tilleggsnotat der jeg viser hvordan du kan finne løsning av likningssystemet i slike tilfeller.

Hvis du vil ha større utfordringer, bør du fortsette med system av *inhomogene* differensial-likninger.