1. Problemstillingen.

Vi har tidligere sett hvordan et system av to lineære 1.ordens differensiallikninger kan omformes til en 2.ordens differensiallikning. Men metoden var kronglet, og lite egnet dersom vi har system med mer enn to likninger. Vi skal nå se hvordan vi kan løse slike system av *n* lineære 1.ordens differensiallikninger med matrisemetoder. Vi skal begrense oss til likninger med konstante koeffisienter. Et slikt system kan for eksempel se slik ut:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 3y_2, & y_1(0) &= 5 \\ y_2' &= -y_1 \qquad + 3e^{2x}, & y_2(0) &= -2 \end{aligned}$$

Som vanlig er y' en forenklet skrivemåte for $\dfrac{dy}{dx}$. Du ser sikker at dette likningssystemet kan skrives på matriseform slik:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{2x} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Noen ganger kommer vi bort i likningssystem med mer enn to ukjente funksjoner og mer enn to likninger. Et slikt likningssystem med *n* ukjente funksjoner og *n* lineære, første ordens differensiallikninger ser slik ut:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + g_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + g_2(x) \\ &\dots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + g_n(x) \end{aligned}$$

Her er alle koeffisientene a_{11}, a_{12}, … , a_{nn} konstanter, og jeg skriver bare *y* istedenfor $y(x)$ overalt. Dette likningssystemet kan skrives på matriseform slik:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}$$

Et slikt likningssystem kan vi skrive mer kompakt slik:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{g}(x).$$

Dersom $\mathbf{g}(x) = 0$ slik at likningssystemet blir $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$, sier vi at likningssystemet er ***homogent***. I motsatt fall er likningssystemet ***inhomogent***. Vi skal starte med å løse homogene likninger, og skal deretter løse inhomogene likninger med matrisemetoder.