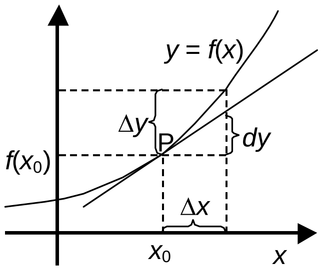
3. Tilvekstformel og differensial.

3.1. Tilvekstformelen.



Figuren til venstre viser grafen til en funksjon $y = f(x)$.
Punktet P har koordinatene $(x_0,\ f(x_0))$.

Vi gir x et lite tillegg Δx. Dersom vi går langs *grafen til f*, får f et tillegg Δy når x får et tillegg Δx. Men dersom vi går langs *tangenten* i P, får y et tillegg dy når x får et tillegg Δx.

Vi vet at den deriverte av f i punktet P er lik stigningstallet til tangenten i P. Av figuren ser vi at dersom vi går langs *tangenten* i P, er stigningstallet

$$a = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy}{\Delta x} \quad \Leftrightarrow \quad dy = \frac{df(x_0)}{dx} \cdot \Delta x .$$

Men dersom Δx er svært liten, vil tangenten være svært nær funksjonsgrafen. Vi gjør ikke noen alvorlig feil dersom vi setter $\Delta y \approx dy$. Da får vi at

Vi har en funksjon $y = f(x)$. Et punkt P på grafen har koordinatene $(x_0, f(x_0))$. Anta at y får et tillegg Δy når x får et tillegg Δx. Dersom Δx er svært liten, har vi at

$$\Delta y \approx \frac{df(x_0)}{dx} \cdot \Delta x .$$

Denne formelen kaller vi ***tilvekstformelen***.

***Eksempel 3.1*:** En terning har sidekant x_0. På grunn av oppvarming øker lengden av sidekanten med Δx. Finn en tilnærmet formel for hvor mye volumet av terningen øker.

Løsning: Volumet av terningen er

$$V(x) = x^3 .$$

Tilvekstformelen gir at volumøkingen blir

$$\Delta V \approx \frac{dV(x_0)}{dx} \cdot \Delta x = \underline{\underline{3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x}} .$$

Merknad 1: Vi kan kontrollere resultatet ved å finne en *eksakt* formel. Før oppvarmingen var volumet

$$V_0 = x_0^{\ 3} .$$

Etter oppvarmingen er terningens volum blitt

$$V = (x_0 + \Delta x)^3 = x_0^{\ 3} + 3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 .$$

Volum*økingen* er da

$$\Delta V = V - V_0 = \left(x_0^{\ 3} + 3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right) - x_0^{\ 3}$$
$$= \underline{3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}$$

Men vi har forutsatt at Δx er svært liten sammenliknet med x_0. Da kan vi se bort fra de to siste leddene (de blir mikroskopiske), slik at vi sitter igjen med at

$$\Delta V \approx 3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x\,,$$

som er samme resultat som vi fant ved hjelp av tilvekstformelen.

Merknad 2: Vi er ofte mer interessert i den *relative* (eller prosentvise) tilveksten enn i den absolutte tilveksten. Vi definerer:

Dersom en størrelse y_0 får en tilvekst Δy, er den relative tilveksten

$$\frac{\Delta y}{y_0}.$$

I vårt eksempel blir den relative tilveksten

$$\frac{\Delta V}{V_0} \approx \frac{3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x}{x_0^{\ 3}} = \underline{3\frac{\Delta x}{x_0}}.$$

Vi ser at den relative volumøkingen er 3 ganger så stor som den relative økingen i sidelengde. Dette innebærer at hver gang sidelengden øker med 1%, vil volumet øke med (omtrent) 3%.

Merknad 3: Dersom økingen i sidelengde (og i volum) skyldes en temperaturøking ΔT, kan vi vise eksperimentelt at

$$\Delta x \approx \alpha \cdot x_0 \cdot \Delta T$$

der α er en konstant som kalles *den lineære utvidelseskoeffisienten*, og at

$$\Delta V \approx \gamma \cdot V_0 \cdot \Delta T$$

der γ er en konstant som kalles *volum-utvidelseskoeffisienten*.

Men tilvekstformelen gir at

$$\Delta V \approx 3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x \approx 3x_0^{\ 2} \cdot \alpha x_0 \Delta T = 3\alpha x_0^{\ 3} \Delta T = 3\alpha \cdot V_0 \cdot \Delta T\,.$$

Dette medfører at vi må ha

$$\gamma \approx 3\alpha$$

noe som også bekreftes eksperimentelt.

Eksempel 3.2: Fra fysikken har vi at når et legeme kastes ut med startfart v_0 under en vinkel θ med horisontalplanet, er den horisontale kastevidden gitt ved

$$s = \frac{v_0^{\ 2}}{2g}\sin(2\theta)$$

der g er tyngdens akselerasjon. Finn en tilnærmet formel for den relative økingen i kastevidde når utkastvinkelen er $\theta_0 = 30^\circ$ og øker med en liten størrelse $\Delta\theta$.

Løsning: Vi oppfatter strekningen *s* som funksjon av θ, d.v.s.

$$s = f(\theta) = \frac{v_0^{\,2}}{2g}\sin(2\theta).$$

Ved hjelp av kjerneregelen får vi at

$$\Delta s \approx \frac{df(\theta)}{d\theta}\Delta\theta = \frac{v_0^{\,2}}{2g}\cos(2\theta)\cdot 2\cdot\Delta\theta = \frac{v_0^{\,2}}{g}\cos(2\theta)\cdot\Delta\theta.$$

Den relative økingen i kastevidde blir da

$$\frac{\Delta s}{s_0} \approx \frac{\frac{v_0^{\,2}}{g}\cos(2\theta_0)\cdot\Delta\theta}{\frac{v_0^{\,2}}{2g}\sin(2\theta_0)} = 2\cdot\frac{\cos(2\theta_0)}{\sin(2\theta_0)}\cdot\Delta\theta = 2\cdot\frac{\cos(2\cdot 30^\circ)}{\sin(2\cdot 30^\circ)}\cdot\Delta\theta = 2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\cdot\Delta\theta = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\Delta\theta}}$$

Merk at $\Delta\theta$ må oppgis i radianer, siden derivasjonsreglene for de trigonometriske funksjonene forutsetter at vinklene er gitt i radianer.

Oppgave 3.1.

3.2. Differensial.

La oss gå tilbake til sammenhengen

$$dy = \frac{df(x_0)}{dx}\cdot\Delta x$$

der Δx er øking i *x*-verdi, mens dy er øking i *y*-verdi når vi går langs *tangenten* til funksjonsgrafen i P. Økingen i funksjonsverdi dersom vi får langs *grafen*, har vi kalt Δy. Vi skal nå la Δx være så liten at vi med god samvittighet kan sette $\Delta y = dy$. For å markere dette, erstatter vi også Δx med dx. Da har vi at

$$dy = \frac{df(x_0)}{dx}\cdot dx$$

der vi antar at dx er så liten at vi ikke bryr oss om at vi egentlig går langs tangenten til grafen istedenfor langs grafen selv. Størrelsen *dy* kalles gjerne ***differensialet til funksjonen f***. det er vanlig å sløyfe referansen til punktet x_0, og bare skrive

$$dy = \frac{df(x)}{dx}\cdot dx.$$

I uttrykket ovenfor er $\frac{d}{dx}$ *ett derivasjonssymbol* som angir at vi skal derivere $f(x)$, mens *dy* på venstre side av likhetstegnet og *dx* helt til høyre kan oppfattes som (meget små) størrelser. Mer presist er *dy* øking i funksjonsverdi når *x* øker med en svært liten størrelse *dx*, og du går langs tangenten. Da kan vi dele på *dx* på begge sider av likhetstegnet, og får

$$dy = \frac{df(x)}{dx}\cdot dx \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Størrelsen $\frac{dy}{dx}$ kan altså oppfattes som en brøk som er lik den deriverte av $y = f(x)$. Dette er bakgrunnen for at vi noen ganger oppfatter $\frac{dy}{dx}$ som en brøk, og noen ganger som symbol for at $y = f(x)$ skal deriveres med hensyn på *x*.