1. Optimering.

Optimering er en fellesbetegnelse for ***maksimering*** og ***minimering***. Vi skal altså finne eventuelle maksimums- og minimumsverdier for en funksjon innenfor funksjonens definisjonsområde. En fellesbetegnelse for maksimums- og minimumsverdier er ***ekstremal-verdier***.

La meg starte med et par definisjoner:

Gitt en funksjon *f* med definisjonsmengde D_f. Da sier vi at:

- $x_{\max}$ er et ***maksimumspunkt*** for *f* dersom $f(x_{\max}) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
  Funksjonsverdien $f(x_{\max})$ kalles ***maksimalverdien*** til *f*.
- $x_{\min}$ er et ***minimumspunkt*** for *f* dersom $f(x_{\min}) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
  Funksjonsverdien $f(x_{\min})$ kalles ***minimalverdien*** til *f*.

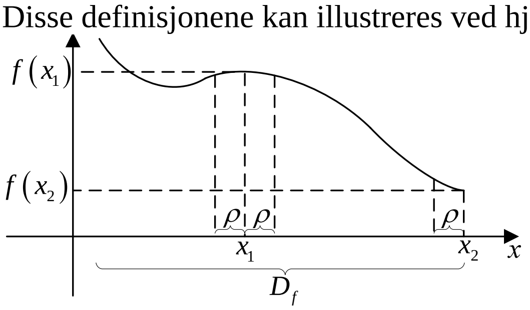
Definisjonene ovenfor gjelder den absolutt største og absolutt minste verdien for *f* i D_f. Disse verdiene kalles også ***globale*** eller ***absolutte*** ekstremalverdier. Men vi er ofte interessert i å kartlegge ”humper” og ”dumper” på funksjonsgrafen. Slike ”humper” og ”dumper” kaller vi ***lokale ekstremalverdier*** med tilhørende ***lokale ekstremalpunkter***. (Ordet ”optimal” brukes også istedenfor ”ekstremal”).

Vi prøver oss med en definisjon av slike lokale ekstremalpunkter og -verdier:

Gitt en funksjon *f* med definisjonsmengde D_f. La $x_1 \in D_f$, $x_2 \in D_f$.
Da sier vi at:

- x_1 er et ***lokalt maksimumspunkt*** for *f* dersom det fins et tall $\rho > 0$ slik at
  $f(x_1) \geq f(x)$ for alle $x \in [x_1 - \rho, x_1 + \rho] \cap D_f$.
  Funksjonsverdien $f(x_1)$ er en ***lokal maksimalverdi*** til *f*.
- x_2 er et ***lokalt minimumspunkt*** for *f* dersom det fins et tall $\rho > 0$ slik at
  $f(x_2) \leq f(x)$ for alle $x \in [x_2 - \rho, x_2 + \rho] \cap D_f$.
  Funksjonsverdien $f(x_2)$ er en ***lokal minimalverdi*** til *f*.

Disse definisjonene kan illustreres ved hjelp av figuren nedenfor til venstre.



Der ser vi at vi kan legge en liten omegn rundt x_1 slik at $f(x) \leq f(x_1)$ for alle *x*-verdier innenfor denne omegnen. Derfor er x_1 et *lokalt* maksimums-punkt for *f*. Det spiller ingen rolle at vi kan få større funksjonsverdier dersom vi har *x*-verdier utenfor denne omegnen.

Punktet x_2 er et endepunkt for definisjonsmengden, og er selv med i definisjonsmengden. Vi ser at det er mulig å legge en liten omegn rundt x_2 slik at $f(x_2) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$ som ligger innenfor denne omegnen. Derfor er x_2 et *lokalt* minimumspunkt for *f*.

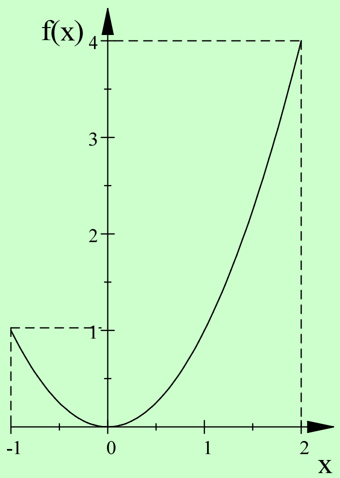
La oss et øyeblikk vende tilbake til de *absolutte* maksimums- og minimumspunktene. Kan vi være sikre på at en funksjon alltid har maksimums- og minimumspunktet med tilhørende maksimal- og minimalverdier? Setningen nedenfor gir svaret:

Dersom en funksjon *f* er definert på et *lukket* intervall $[a, b]$ (eller en union av slike lukkede intervall), vil funksjonen alltid ha både maksimums- og minimumspunkter.

Dersom D_f *ikke* er et lukket intervall, *kan* funksjonen ha maksimums- og/eller minimums-punkter. Men vi kan ikke være sikker. La oss illustrere disse påstandene med et eksempel:

Eksempel 1.1: Vi har gitt funksjonen $f(x) = x^2$. Har denne funksjonen maksimums- og minimumspunkter i disse tilfellene:
a) $D_f = [-1, 2]$.
b) $D_f = \langle -1, 2]$.
c) $D_f = [-1, 2\rangle$.
d) $D_f = \langle -1, 2\rangle$.

Løsning: Vi starter med å tegne grafen til *f*, se figuren nedenfor til venstre.



a) Når $D_f = [-1, 2]$, er begge endepunktene med i definisjonsmengden. Da har *f* et lokalt maksimum når $x = -1$, et lokalt og absolutt minimum når $x = 0$, og et lokalt og absolutt maksimum når $x = 2$.
b) Når $D_f = \langle -1, 2]$, er ikke endepunktet $x = -1$ med i definisjonsmengden. Da kan ikke *f* ha noe lokalt maksimumspunkt her, selv om vi kan komme så nær dette punktet vi bare vil. Derimot har vi et lokalt og absolutt minimum når $x = 0$, og et lokalt og absolutt maksimum når $x = 2$.
c) Når $D_f = [-1, 2\rangle$, er ikke endepunktet $x = 2$ med i definisjonsmengden. Da kan ikke *f* ha noe maksimumspunkt her, selv om vi kan komme så nær dette punktet vi bare vil. Derimot har vi et lokalt og absolutt minimum når $x = 0$, og et lokalt maksimum når $x = -1$.
d) Når $D_f = \langle -1, 2\rangle$, er ingen av endepunktene med i definisjonsmengden. Vi har derfor ingen maksimumspunkter i dette tilfellet. Men vi har fremdeles det lokale og globale minimumspunktet når $x = 0$.

Vi summerer opp dette eksemplet, og ser at vi alltid har både maksimums- og minimumspunkter når definisjonsmengden er *lukket* slik som i a). Når definisjonsmengden *ikke* er lukket, *kan* vi ha både maksimums- og minimumspunkter slik som i b). Men vi er ikke garantert at slike punkter eksisterer, noe vi ser i c) og d).

En systematisk jakt på ekstremalpunkter krever skikkelig verktøy. Vi benytter da at:

Vi har *kandidater* til ekstremalpunkter til en funksjon $y = f(x)$ i disse punktene:

- For x-verdier der $f'(x) = 0$ fordi tangenten til grafen da er horisontal.
- I endepunktene av D_f, forutsatt at disse endepunktene er med i D_f.
- For x-verdier der $f'(x)$ ikke eksisterer.

I tillegg til disse kandidatene for ekstremalpunkter er det nyttig å ha en oversikt over når funksjonen er voksende og når den er avtakende. Da benytter du at:

f er *voksende* når $f'(x) > 0$.

f er *avtakende* når $f'(x) < 0$.

Nå har du det verktøyet du trenger. Du starter med å derivere funksjonen, og setter den deriverte lik null. Da finner du *kandidater* til ekstremalpunkter. Nå kan du avgjøre om disse kandidatene er maksimums- eller minimums-punkter (eller ingen av delene) ved skaffe deg oversikt over *fortegnet* til $f'(x)$. Der hvor $f'(x)$ er positiv, er f voksende. Og der hvor $f'(x)$ er negativ, er f avtakende.

Eksemplene nedenfor viser hvordan vi benytter dette verktøyet til å finne ekstremalpunkter:

Eksempel 1.2: Finn eventuelle lokale og globale ekstremalpunkter til funksjonen

$$y = f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 24x}{12x + 8}, \; D_f = \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{2}{3}\right\}.$$

Løsning: Vi starter med å derivere funksjonen:

$$y' = \frac{\left(3x^2 - 12x + 24\right)\left(12x + 8\right) - \left(x^3 - 6x^2 + 24x\right)\cdot 12}{\left(12x + 8\right)^2}$$

$$= \frac{36x^3 + 24x^2 - 144x^2 - 96x + 288x + 192 - 12x^3 + 72x^2 - 288x}{\left(12\left(x + \tfrac{2}{3}\right)\right)^2}$$

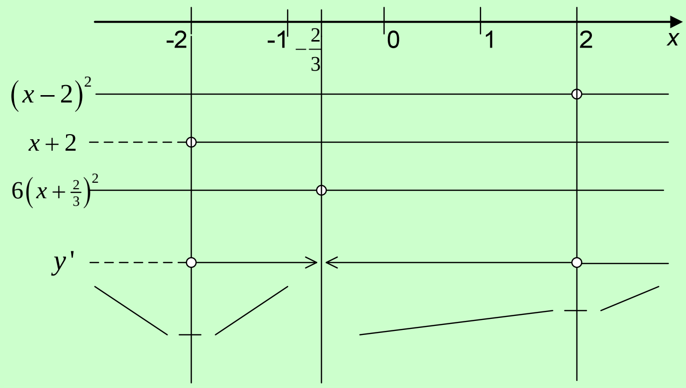
$$= \frac{24x^3 - 48x^2 - 96x + 192}{12^2\left(x + \tfrac{2}{3}\right)^2} = \frac{24\left(x^3 - 2x^2 - 4x + 8\right)}{12^2\left(x + \tfrac{2}{3}\right)^2} = \underline{\frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{6\left(x + \tfrac{2}{3}\right)^2}}$$

Med litt smartness kan telleren faktoriseres slik:

$$x^3-2x^2-4x+8=\left(x^3-2x^2\right)-\left(4x-8\right)=x^2\left(x-2\right)-4\left(x-2\right)$$
$$=\left(x-2\right)\left(x^2-4\right)=\left(x-2\right)\left(\left(x+2\right)\left(x-2\right)\right)=\underline{\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)}$$

Dermed har vi at

$$y'=\underline{\frac{\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)}{6\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}}.$$



Vi ser direkte at $y'=0$ når $x=-2$ eller når $x=2$. For å avgjøre om dette er maksimal- eller minimalpunkter, setter vi opp fortegnslinja til y' slik det er gjort til venstre. De intervallene der en faktor er positiv, er markert med hel strek. De intervallene der en faktor er negativ, er markert med stiplet linje. Punkter der en faktor er lik null, er markert med en null.

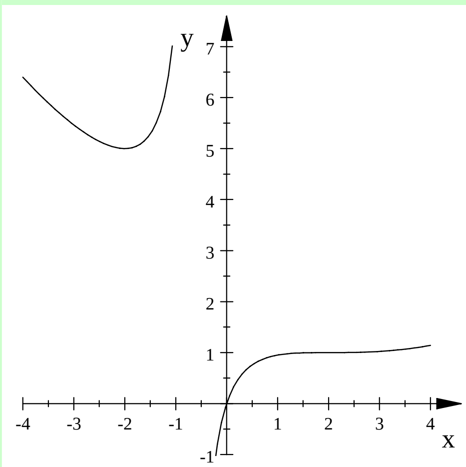
I den nederste linja for y' er det avmerket at y' ikke er definert når $x=-\frac{2}{3}$. Dessuten er det tegnet inn linjer som antyder når funksjonen er voksende, når den er avtakende, og når grafen har horisontal tangent.

Vi kan nå slå fast at punktet $x=-2$ er et lokalt minimumspunkt, med minimalverdi

$$f\left(-2\right)=\frac{\left(-2\right)^3-6\cdot\left(-2\right)^2+24\cdot\left(-2\right)}{12\cdot\left(-2\right)+8}=\frac{-8-24-48}{-24+8}=\frac{-80}{-16}=\underline{\underline{5}}.$$

Dette er åpenbart ikke noe absolutt minimum, siden vi kan få lavere funksjonsverdier for eksempel ved å sette inn $x=0$.

Til vår overraskelse ser vi at punktet $x=2$ verken er minimums- eller maksimumspunkt. Det er et ***terrassepunkt***.



Funksjonsuttrykket kan omformes til

$$y=f\left(x\right)=\frac{x^3-6x^2+24x}{12x+8}=\frac{x^2-6x+24}{12+\frac{8}{x}}.$$

Siden leddet x^2 i teller vil dominere når $x\to\pm\infty$, ser vi at

$$\lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)\to\infty.$$

Dermed har ikke funksjonen noe veldefinert absolutt minimums- eller maksimumspunkt.

Vi summerer opp: Funksjonen har et lokalt minimumspunkt $x=-2$ med minimalverdi $y=5$. Den har ingen lokale maksimumspunkt. Den har ikke absolutte maksimums- eller minimumspunkt.

Noen ganger er vi også interessert i å vite når $f'(x)$ er voksende og når den er avtakende. Vi innser at når $f'(x)$ er voksende, må $f''(x) > 0$. Da vil også grafen vende sin innhule side *opp*. Vi sier at *f* er ***konveks***.

Når $f'(x)$ er avtakende, må $f''(x) < 0$. Da vil grafen vende sin innhule side *ned*. Vi sier at *f* er ***konkav***.

Funksjonen har et ***vendepunkt*** når den skifter mellom å være konveks og konkav. Dette forekommer oftest når $f''(x) = 0$. Men det kan også forekomme i et ***knekkpunkt***, d.v.s. et punkt der *f* er kontinuerlig samtidig som $f'(x)$ ikke eksisterer.

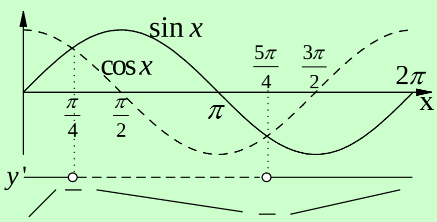
Vi summerer opp:

- *f* er ***konveks*** (innhul side opp) når $f''(x) > 0$.
  Funksjonen har derfor et *minimumspunkt* når $f'(x) = 0$ samtidig som $f''(x) > 0$.
- *f* er ***konkav*** (innhul side ned) når $f''(x) < 0$.
  Funksjonen har derfor et *maksimumspunkt* når $f'(x) = 0$ samtidig som $f''(x) < 0$.
- *f* har et ***vendepunkt*** når den skifter mellom å være konveks og konkav.

***Eksempel 1.3*: ** Finn eventuelle ekstremalpunkter og vendepunkter for funksjonen
$$y = f(x) = e^{-x} \cdot \sin x, \; x \in [0, 2\pi].$$

Løsning: Vi starter med å derivere:
$$y' = -e^{-x} \cdot \sin x + e^{-x} \cdot \cos x = \underline{e^{-x}(\cos x - \sin x)}.$$
Vi vet at $e^{-x} > 0$ for alle *x*. Da får vi:
$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = 1.$$
Innenfor definisjonsområdet er nå $x = \underline{\tfrac{\pi}{4}}$ eller $x = \tfrac{\pi}{4} + \pi = \underline{\tfrac{5}{4}\pi}$.

Så undersøker vi fortegnet til den deriverte for å avgjøre hva som er maksimums- og hva som er minimumspunkt. Det er ofte vanskelig å sette opp fortegnslinje for trigonometriske uttrykk. En metode er å merke av de *x*-verdiene der uttrykket er lik null, og deretter beregne fortegnet i ett punkt i hvert intervall mellom disse nullpunktene. Da vil fortegnet være det samme i hele intervallet. I dette tilfellet er det imidlertid enklere å tegne grafene til $\sin x$ (hel strek) og $\cos x$ (stiplet) i samme koordinatsystem, slik det er gjort nedenfor til venstre. Da får vi at:



$$\cos x - \sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x > \sin x$$
når
$$0 < x < \tfrac{\pi}{4} \text{ og når } \tfrac{5}{4}\pi < x < 2\pi.$$
Siden e^{-x} alltid er positiv, får vi den fortegnslinja for y' som er tegnet inn nederst på figuren.

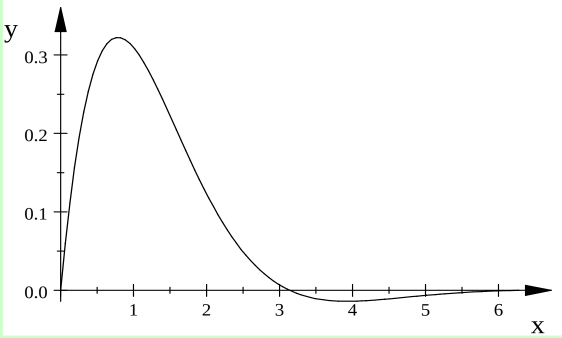
Her er det faktisk lettere å benytte y'' for å avgjøre hva som er maksimums- og hva som er minimumspunkt. Vi får

$$y' = e^{-x}(\cos x - \sin x) \quad \Rightarrow \quad y'' = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = \underline{-2e^{-x}\cos x}.$$

Siden faktoren $-2e^{-x}$ alltid blir negativ, ser vi at:

$y'' < 0$ slik at vi får et *maksimalpunkt* når $x = \frac{\pi}{4}$.

$y'' > 0$ slik at vi får et *minimalpunkt* når $x = \frac{5}{4}\pi$.



Vi får vendepunkt når $y'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0$. Innenfor definisjonsmengden betyr det at vi får vendepunkt når $\underline{\underline{x = \frac{\pi}{2}}}$ og når $\underline{\underline{x = \frac{3}{2}\pi}}$.

Vi ser hvordan disse resultatene stemmer overens med grafen som er tegnet til venstre.

Til slutt må vi summere opp de optimal-punktene og -verdiene vi finner.

Siden begge ytterpunktene er med i definisjonsmengden, får vi:

Lokale minimumspunkter

$\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = \frac{5}{4}\pi}}$

med minimalverdier henholdsvis

$$f(0) = e^{-0}\sin(0) = \underline{\underline{0}}$$

og

$$f\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) = e^{-\frac{5}{4}\pi}\sin\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) \approx \underline{\underline{-0.014}}.$$

Lokale maksimumspunkter

$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}}}$ og $\underline{\underline{x = 2\pi}}$

med maksimalverdier henholdsvis

$$f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \approx \underline{\underline{0.32}}$$

og

$$f(2\pi) = e^{-2\pi}\sin(2\pi) = \underline{\underline{0}}.$$

Vi får globalt maksimum $\underline{\underline{0.32}}$ for $\underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}}}$, og globalt minimum $\underline{\underline{-0.014}}$ for $\underline{\underline{x = \frac{5}{4}\pi}}$.

Vi får vendepunkter når $\underline{\underline{x = \frac{\pi}{2}}}$ og når $\underline{\underline{x = \frac{3}{2}\pi}}$, med funksjonsverdier henholdsvis

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \approx \underline{\underline{0.21}} \text{ og } f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3}{2}\pi}\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) \approx \underline{\underline{-0.0090}}.$$

Oppgave 1.1, **Oppgave 1.2**.

Disse teknikkene til å finne maksimal- og minimalpunkter er et svært nyttig redskap innen økonomi. Men hvis du ikke er spesielt interessert i økonomiske anvendelser, kan du heller gå løs på differensial og tilvekstformelen.