2. Økonomiske anvendelser av derivasjon.

Økonomer er svært opptatte av maksimering og minimering. Bedriftsøkonomene benytter da matematiske modeller for inntekter og kostnader, og vil gjerne innrette seg slik at overskuddet (profitten) blir størst mulig. Sosialøkonomene er mer interessert i å få størst mulig nytte av de tilgjengelige ressursene. Uansett problemstilling benyttes derivasjon i stor grad. I dette lille notatet skal jeg bare antyde noe om hvordan derivasjon kan anvendes, og vil konsentrere meg om bedriftsøkonomiske anvendelser. Dette skyldes bl.a. at jeg må begrense meg til problemer med kun *en* variabel. I de fleste praktiske situasjonene (spesielt innenfor sosialøkonomi) må vi imidlertid benytte funksjoner av flere variable. Men det ligger utenfor rammen av dette lille notatet.

2.1. Kostnader, inntekter og profitt.

Når vi skal lage modeller over produksjonskostnader, er det vanlig å starte med noen *faste kostnader* som påløper uavhengig av hvor mange enheter som produseres, i alle fall innen visse grenser. Dette kan være renter på lån, avskrivninger, kommunale avgifter, husleie, kostnader til lys og oppvarming, osv. osv. Slike kostnader skal vi kalle K_0.

Så har vi kostnader som er proporsjonale med antall enheter som produseres. Dersom vi produserer *x* enheter, og kostnadene pr enhet er K_1, får vi nå en ***kostnadsfunksjon***

$$K(x) = K_0 + K_1 x .$$

Nå er det vanlig å anta at med store produksjonsserier oppnår man rasjonaliseringsgevinster. Kostnadsfunksjonen blir da

$$K(x) = K_0 + K_1 x - K_2 x^2$$

der K_2 er så liten at leddet $K_2 x^2$ først får betydning når *x* er relativt stor.

Men hvis *x* blir for stor (vi produserer mer enn vi egentlig har kapasitet til), risikerer vi at det påløper ekstra kostnader til overtidslønn, ekstra slitasje fordi vi ikke får tid til å vedlikeholde produksjonsutstyret, eller liknende. Vi må derfor foreta enda en justering av kostnads-funksjonen, og benytter

$$K(x) = K_0 + K_1 x - K_2 x^2 + K_3 x^3$$

der K_3 er et svært lite tall slik at leddet $K_3 x^3$ først får betydning når *x* blir svært stor.

Koeffisientene K_0, K_1, K_2 og K_3 må tilpasses til forholdene i den enkelte bedrift.

Så skal vi se på inntektene ved salg av produktene. Dersom salgsprisen pr enhet er lik *p*, er ***inntektsfunksjonen***

$$I(x) = p \cdot x$$

der *x* er antall solgte enheter.

Det er vanlig å anta at alle produserte enheter blir solgt. Da er *overskuddet* (*profitten*) gitt ved en ***profittfunksjon***

$$\pi(x) = I(x) - K(x) = p \cdot x - \left(K_0 + K_1 x - K_2 x^2 + K_3 x^3\right)$$
$$= -K_0 + (p - K_1)x + K_2 x^2 - K_3 x^3$$

Vi vil nå innrette oss slik at profitten blir størst mulig. For å finne maksimalpunktet for profittfunksjonen, deriverer vi slik eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 2.1: En kostnadsfunksjon er gitt ved

$$K(x) = 400 + 60x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{120}x^3,$$

mens salgsprisen pr enhet er $p = 90$. Anta at alle produserte enheter blir solgt. Finn den produksjonsmengden x som gir størst profitt.

Løsning: Vi setter opp profittfunksjonen

$$\pi(x) = I(x) - K(x) = 90x - \left(400 + 60x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{120}x^3\right) = \underline{-\tfrac{1}{120}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 30x - 400}.$$

Deriverer:

$$\pi'(x) = -\tfrac{1}{40}x^2 + x + 30.$$
$$\pi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{40}x^2 + x + 30 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{40}\right) \cdot 30}}{2 \cdot \left(-\tfrac{1}{40}\right)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{-\tfrac{1}{20}} = \begin{cases} -20 \cdot (-1+2) = -20 \\ -20 \cdot (-1-2) = 60 \end{cases}$$

Siden vi må ha $x \geq 0$, er $x = 60$ eneste brukbare kandidat for maksimal profitt. Ser at

$$\pi''(x) = -\tfrac{1}{20}x + 1$$

slik at

$$\pi''(60) = -\tfrac{1}{20} \cdot 60 + 1 = -2.$$

Dermed vet jeg at profittfunksjonen er konkav rundt $x = 60$, slik at profitten er størst når $x = \underline{\underline{60}}$.

Oppgave 2.1.

2.2. Grensekostnad, -inntekt og -profitt.

En økonom vil definere ***grensekostnad*** som kostnadsøkingen ved å produsere *en* enhet til. Når vi benytter matematiske modeller, gjør vi det litt annerledes:

La $K(x)$ være kostnadene ved å produsere x enheter. La $\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x)$ være kostnadsøkingen når antall produserte enheter øker med Δx. Da defineres ***grensekostnaden*** som

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}.$$

Den oppmerksomme leser vil kjenne igjen uttrykket i ramma ovenfor som den deriverte av kostnadsfunksjonen. Nå definerer vi ***grenseinntekt*** og ***grenseprofitt*** på helt tilsvarende måte:

Grensekostnaden er $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta K(x)}{\Delta x} = K'(x)$.

Grenseinntekten er $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta I(x)}{\Delta x} = I'(x)$.

Grenseprofitten er $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta \pi(x)}{\Delta x} = \pi'(x)$.

Når vi husker at

$$\pi(x) = I(x) - K(x)$$

får vi ved derivasjon at

$$\pi'(x) = I'(x) - K'(x).$$

Vi vet at profitten er størst når $\pi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I'(x) = K'(x)$. Dermed har vi vist en av de mest fundamentale sammenhengene innenfor bedriftsøkonomi:

Profitten er størst når grenseinntekten er lik grensekostnaden.

En våken leser vil forhåpentlig murre litt nå. Selv om $\pi'(x) = 0$, er det jo ikke sikkert at profitten er *størst*. Den kan jo hende at profitten er *minst*! Men med de kostnads- og inntekts-funksjonene vi opererer med, kan du i **Oppgave 2.2** vise at vi i praksis kan være sikre på at profitten virkelig er *størst* når grenseinntekten er lik grensekostnaden.

En annen viktig størrelse er ***enhetskostnaden***, som er de samlede kostnader delt på antall produserte enheter. Med andre ord:

Enhetskostnaden $E(x) = \dfrac{K(x)}{x}$.

Ikke bland sammen enhetskostnad og grensekostnad!

Det er god bedriftsøkonomi å innrette seg slik at enhetskostnaden blir minst mulig. Da er

$$E'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K'(x)\cdot x - K(x)\cdot 1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K'(x)\cdot x - K(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad K'(x) = \frac{K(x)}{x}$$

Med andre ord:

Enhetskostnaden er minst når enhetskostnaden er lik grensekostnaden.

Også her vil nok vår skeptiske leser kreve bevis for at vi virkelig får *minst* og ikke *størst* enhetskostnad når grensekostnad er lik enhetskostnad. Men med vår kostnadsfunksjon får vi:

$$E(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{K_0}{x}+K_1-K_2x+K_3x^2$$

slik at

$$E'(x)=-\frac{K_0}{x^2}-K_2+2K_3x\,.$$

Av dette uttrykket ser vi at når x er liten, blir $E'(x)$ negativ slik at enhetskostnaden avtar når x øker. Men når x er tilstrekkelig stor, vil leddet $2K_3x$ dominere slik at enhetskostnaden vokser når x øker. Altså må $E(x)$ ha en minimumsverdi for en og kun en verdi av x, og det er nettopp den x-verdien vi finner ved å sette grensekostnad lik enhetskostnad.

2.3. Elastisiteter.

Når det er en sammenheng mellom to størrelser x og y, vil en liten endring av den ene størrelsen føre til at også den andre størrelsen endres. Økonomene definerer da:

Elastisiteten av y med hensyn på x er

$$\mathrm{El}_x(y)=\frac{\text{relativ endring av } y}{\text{relativ endring av } x}=\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}$$

Når vi lager matematiske modeller, er det naturlig å anta at y er en funksjon av x slik at $y=y(x)$. Da er det naturlig å revidere definisjonen av ***elastisitet*** slik:

Elastisiteten av y med hensyn på x er

$$\mathrm{El}_x(y)=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\cdot\frac{x}{y}=\frac{dy(x)}{dx}\cdot\frac{x}{y(x)}$$

All erfaring tilsier at det er en sammenheng mellom prisen p på en vare og omsetningen x. Settes prisen p ned, vil x øke. Vi ser da bort fra noen sære ”status”-varer der en øking av prisen på visse merkevarer gir økt status for de som bruker denne merkevaren, slik at pris-øking faktisk kan gi *økt* omsetning av denne merkevaren.

Vi har definert inntektsfunksjonen som $I(x)=p\cdot x$. Men hvis x avhenger av p, er det mer naturlig å skrive

$$I(p)=p\cdot x(p)\,.$$

Anta at vi fritt kan fastsette prisen p selv, og vil innrette oss slik at inntekten blir størst mulig. Da vil vi fastsette p slik at

$$I'(p)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1\cdot x(p)+p\cdot\frac{dx(p)}{dp}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{p}{x(p)}\cdot\frac{dx(p)}{dp}=-1\,.$$

Størrelsen $\frac{p}{x(p)} \cdot \frac{dx(p)}{dp}$ kalles gjerne ***priselastisiteten***, og gir forholdet mellom relativ endring av omsetning *x* og relativ endring av pris *p*. Vi ser at:

Dersom omsetningen $x(p)$ avhenger av prisen *p*, er inntekten $I(p) = p \cdot x(p)$ størst når ***priselastisiteten*** $\frac{p}{x(p)} \cdot \frac{dx(p)}{dp} = -1$.

Eksempel 2.2: Et fotball-lag har erfart at når billettprisen er 100 kr pr billett, kommer det 3000 tilskuere til hver kamp. Laget har også funnet ut at hver gang billettprisen økes med 10 kr, reduseres tilskuertallet med 200.

a) Finn tilskuertallet *x* som funksjon av billettprisen *p*.

b) Finn den billettprisen som gir størst inntekt.

Løsning:

a) Når *x* reduseres med 200 hver gang *p* øker med 10, må vi ha en lineær sammenheng mellom *x* og *p*:

$$x - x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta p}(p - p_0) \quad \Leftrightarrow \quad x - 3000 = \frac{-200}{10}(p - 100)$$

$$\Leftrightarrow \quad x(p) = -20(p-100) + 3000 = -20p + 2000 + 3000 = \underline{\underline{-20p + 5000}}$$

b) Inntekten er størst når priselastisiteten er lik -1:

$$\frac{p}{x(p)} \cdot \frac{dx(p)}{dp} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{-20p + 5000} \cdot (-20) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -20p = 20p - 5000$$

$$\Leftrightarrow \quad -40p = -5000 \quad \Leftrightarrow \quad p = \underline{\underline{125}}$$

Eksempel 2.3: Vis at dersom omsetningen *x* avhenger av prisen *p* som

$$x(p) = \frac{A}{p^a},$$

er priselastisiteten konstant lik $-a$.

Løsning: Vi setter

$$x(p) = A \cdot p^{-a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx(p)}{dp} = A \cdot (-a) \cdot p^{-a-1}.$$

Priselastisiteten blir da

$$\frac{p}{x(p)} \cdot \frac{dx(p)}{dp} = \frac{p}{\frac{\cancel{A}}{p^a}} \cdot \cancel{A}(-a)\,p^{-a-1} = p \cdot p^a (-a)\,p^{-a-1} = p^{1+a-a-1} \cdot (-a) = p^0 \cdot (-a) = \underline{\underline{-a}}.$$

Oppgave 2.3