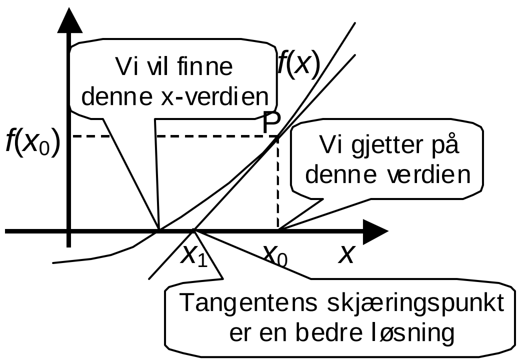
5. Numerisk løsing av likninger (Newtons metode).

I praktisk arbeid kommer vi ofte bort i likninger som ikke lar seg løse eksakt. Da må vi benytte en eller annen metode for å finne en tilnærmet løsning. Vi sier at vi løser likningen ***numerisk***.

Det er utviklet mange slike metoder. De fleste krever at du først gjetter på en løsning. Deretter beregnes en ny løsning av likningen som forhåpentlig er bedre enn den første gjetningen. Med utgangspunkt i den nye (og bedre) løsningen kan du beregne en enda mer nøyaktig løsning. Og slik fortsetter du inntil løsningene ser ut til å stabilisere seg. Men hvis du er uheldig med valg av start-løsning (eller hvis likningen er spesielt ekkel) *kan* du risikere at de nye løsningene kommer stadig lengre vekk fra riktig verdi istedenfor å komme stadig nærmere.

Du må også være klar over at disse metodene vanligvis kun finner *en* løsning selv om likningen har flere løsninger.

Alle kalkulatorer og dataprogram som kan løse likninger, benytter en eller annen slik metode. Vi skal nå se på ***Newtons metode*** som kanskje er den vanligste.



Metoden forutsetter at likningen er på formen

$$f(x) = 0$$

(merk nullen på høyre side av likhetstegnet). Vi tegner grafen til $f(x)$, og ønsker å finne den *x*-verdien der grafen skjærer *x*-aksen. Dette er illustrert på figuren til venstre.

For å finne denne *x*-verdien, gjetter vi først på et skjæringspunkt som vi skal kalle x_0. Vi beregner funksjonsverdien $f(x_0)$, og merker av punktet P med koordinater $(x_0,\ f(x_0))$. Så trekker vi tangenten til grafen i P. Likningen til denne tangenten er

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Denne tangenten vil normalt skjære *x*-aksen i et punkt x_1 som er en bedre løsning av likningen enn vår første gjetning x_0. Vi finner dette punktet ved å sette inn $y = 0$ i tangent-likningen. Vi får da:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}.$$

Denne prosessen kan vi gjenta inntil vi får skjæringspunkt for tangenten som er tilstrekkelig nær grafens skjæringspunkt med *x*-aksen. Vi får da nye skjæringspunkter slik:

$$\underline{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}, \qquad \underline{x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}}, \qquad \text{osv…}$$

Vi summerer opp:

Vi kan finne stadig bedre tilnærmede løsninger av likningen

$$f(x)=0$$

ved å gjette på en startløsning x_0, og deretter rekursivt finne stadig bedre løsninger ved hjelp av formelen

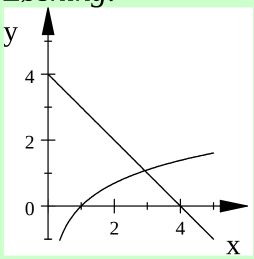
$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

***Eksempel 5.1*: Løs likningen**

$$\ln x = 4-x$$

numerisk med Newtons metode.

Løsning:



Vi starter med å skissere grafene til $y=\ln x$ og $y=4-x$ i samme koordinatsystem som vist til venstre. Vi ser at grafene skjærer hverandre nær $x=x_0=3$, som blir utgangspunkt for de videre beregningene. Selv en unøyaktig skisse vil vanligvis gi bra nok startverdi. Så omformer vi likningen til

$$\ln x + x - 4 = 0$$

og danner funksjonen

$$f(x)=\ln x + x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=\tfrac{1}{x}+1.$$

En følge av stadig bedre (håper vi…) løsninger får vi av den rekursive likningen

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\ln x_n + x_n - 4}{\frac{1}{x_n}+1}.$$

Vi setter i gang:

$$x_1=x_0-\frac{\ln x_0+x_0-4}{\frac{1}{x_0}+1}=3-\frac{\ln 3+3-4}{\frac{1}{3}+1}=\underline{2.92604}.$$

$$x_2=x_1-\frac{\ln x_1+x_1-4}{\frac{1}{x_1}+1}=2.92604-\frac{\ln(2.92604)+2.92604-4}{\frac{1}{2.92604}+1}=\underline{2.92627}.$$

$$x_3=x_2-\frac{\ln x_2+x_2-4}{\frac{1}{x_2}+1}=2.92627-\frac{\ln(2.92627)+2.92627-4}{\frac{1}{2.92627}+1}=\underline{2.92627}.$$

Videre regninger vil ikke gi noen forbedring. Vi har altså funnet løsningen $\underline{\underline{x=2.92627}}$ som bør være korrekt med 6 gjeldende sifre.

En liten sluttmerknad: Den rekursive likningen kan forenkles litt i dette tilfellet:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\ln x_n+x_n-4}{\frac{1}{x_n}+1}=\frac{x_n\left(\frac{1}{x_n}+1\right)-(\ln x_n+x_n-4)}{\frac{1}{x_n}+1}=\frac{1+x_n-\ln x_n-x_n+4}{\frac{1}{x_n}+1}=\underline{\frac{x_n(5-\ln x_n)}{1+x_n}}.$$

Denne formen gir litt mindre tallregning.

Oppgave 5.1.