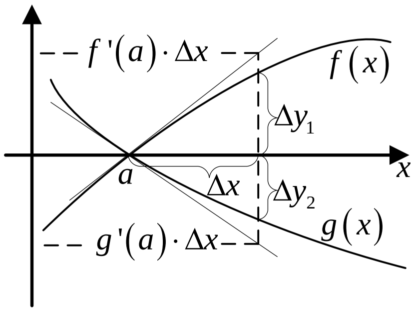
4. Bestemmelse av grenseverdier (L'Hôpitals regel).

Vi har tidligere sett at vi kan få problemer med å bestemme grenseverdier av formen "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$". L'Hôpitals regel er et nyttig redskap til å bestemme slike grenseverdier. Vi skal først se på "$\frac{0}{0}$"-formen.

La f og g være to funksjoner som begge er deriverbare for $x = a$.
Dersom $f(a) = 0$ og $g(a) = 0$, er

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bevis-skisse: Figuren nedenfor til venstre viser grafene til to funksjoner f og g som er slik at $f(a) = 0$ og $g(a) = 0$. La x være et punkt nær a slik at $x = a + \Delta x$ der Δx er svært liten.
Siden vi har forutsatt at $f(a) = 0$, gir tilvekstformelen at



$$f(x) = \Delta y_1 \approx f'(a)\cdot\Delta x.$$

Siden $g(a) = 0$, gir et tilsvarende resonnement at

$$g(x) = \Delta y_2 \approx g'(a)\cdot\Delta x.$$

Da blir

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(x)\cdot\Delta x}{g'(x)\cdot\Delta x} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Jo mindre Δx er, jo bedre blir tilnærmelsen. Når $\Delta x \to 0$, kan vi erstatte $\approx$ med =. Da får vi

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

som vi skulle vise.

Dersom også $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ blir et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, deriverer vi bare teller og nevner en gang til.

***Eksempel 4.1*:** Bruk L'Hôpitals regel til å bestemme disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

Løsning:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}\left(=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(2x)\cdot 2}{1}=\frac{2\cos 0}{1}=\frac{2\cdot 1}{1}=\underline{\underline{2}}.$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\left(=\frac{1-\cos 0}{0^2}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0-(-\sin x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\left(=\frac{\sin 0}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1-0}=\frac{\frac{1}{1}}{1}=\underline{\underline{1}}.$

Oppgave 4.1.

Hittil har vi brukt L'Hôpitals regel på "$\frac{0}{0}$"-uttrykk. Men det fins en variant av L'Hôpitals regel som gjelder for "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk. Den ser slik ut:

La f og g være to funksjoner som begge er deriverbare når $x\to a$, og som begge går mot $\pm\infty$ når $x\to a$. Da er

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Et formelt bevis er kronglete. Men du finner en skisse til et litt lurvete bevis i et vedlegg.

Hittil har vi forutsatt at x går mot en endelig verdi a. Men L'Hôpitals regel gjelder også dersom $x\to\pm\infty$ slik setningene nedenfor angir. Først en variant som gjelder for "$\frac{0}{0}$"-uttrykk:

La f og g være to funksjoner som begge er deriverbare når $x\to\pm\infty$, og der $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=0$.
Da er

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Så en variant som gjelder for "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk:

La f og g være to funksjoner som begge er deriverbare når $x\to\pm\infty$, og som begge går mot $\pm\infty$ når $x\to\pm\infty$. Da er

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Heller ikke her tar vi med noe bevis, men ser heller på eksempler:

Eksempel 4.2: Bruk L'Hôpitals regel til å bestemme grenseverdien

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

Løsning:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \left(= \dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2x} \left(= \dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2} \to \infty$.

Denne grenseverdien eksisterer ikke.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} \left(= \dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \underline{\underline{0}}$.

Eksemplene ovenfor illustrerer en generell regel: Når $x \to \pm\infty$ vil e^x-faktorer dominere over x^n-faktorer, som igjen vil dominere over $\ln x$-faktorer.

Oppgave 4.2.

Vær nøye med å kontrollere at du virkelig har et "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk før du bruker L'Hôpitals regel. Hvis du for eksempel skal beregne

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x},$$

får du

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

slik at denne grenseverdien ikke eksisterer. Du må ikke begynne å derivere teller og nevner i slike situasjoner.

Vi har flere former for ubestemte uttrykk som vi ikke har sett på hittil. En av dem er "$0 \cdot \infty$"-uttrykk. Slike uttrykk må omformes til enten "$\frac{\infty}{\infty}$" eller "$\frac{0}{0}$"-formen. Ofte er flere forskjellige omforminger mulig, og det gjelder å velge den som gir enklest regninger. Hvis du er riktig uheldig, bruker du en omforming som bare gjør problemet verre og verre.

Eksempel 4.3: Bruk L'Hôpitals regel til å bestemme disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \cdot \ln x)$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan x\right)$

Løsning:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \cdot \ln x) \left(= 0 \cdot (-\infty)\right)$.

Prøver omformingen

$$x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln x}{x^{-1}}.$$

Dette gir

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}\cdot\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{-1}=\underline{\underline{0}}.$$

Jeg kunne også prøvd omformingen

$$x\cdot\ln x=\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}=\frac{x}{\left(\ln x\right)^{-1}}.$$

Men her vil derivasjon av teller og nevner gi

$$\frac{1}{-\left(\ln x\right)^{-2}\cdot\frac{1}{x}}=-x\cdot\left(\ln x\right)^2$$

som er et verre problem enn det vi startet med. Dersom vi prøver å gjenta bruken av L'Hôpitals regel, blir uttrykket bare verre og verre.

b) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x\right)\left(=0\cdot\infty\right).$$

Jeg prøver omformingen

$$\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)\tan x=\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}{\cos x}.$$

Da blir

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1\cdot\sin x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x}{-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(-1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x}{\sin x}\right)=-1-\frac{0\cdot 0}{1}=\underline{\underline{-1}}$$

Oppgave 4.3.

En annen form for ubestemte uttrykk er "$\infty-\infty$"-formen. Her kan vi prøve å omforme til "$\frac{\infty}{\infty}$" eller "$\frac{0}{0}$"-formen, for eksempel ved å samle uttrykket på en fellesnevner slik som neste eksempel viser:

Eksempel 4.4: Finn

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

Løsning: Direkte innsetting av $x=0$ gir et "$\infty-\infty$"-uttrykk. Vi omformer derfor slik:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x\cdot\sin x}\left(=\frac{\sin 0-0}{0\cdot\sin 0}=\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{1\cdot\sin x+x\cdot\cos x}\left(=\frac{\cos 0-1}{1\cdot\sin 0+0\cdot\cos 0}=\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x-0}{\cos x+\left(1\cdot\cos x+x\cdot\left(-\sin x\right)\right)}$$

$$=\frac{-\sin 0-0}{\cos 0+\left(1\cdot\cos 0+0\cdot\left(-\sin 0\right)\right)}=\frac{0}{1+1-0}=\frac{0}{2}=\underline{\underline{0}}$$

Oppgave 4.4.

Vi skal til slutt se på grenseverdier for uttrykk av formen

$$y = f(x) = \left(u(x)\right)^{v(x)}.$$

Da forekommer det at $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ gir uttrykk av formen "0^0", "∞^0" eller "1^∞". Alle disse formene har til felles at grenseverdien avhenger av om grunntallet eller eksponenten vil dominere når $x \to a$.

For å kunne bruke L'Hôpitals regel, omformer vi slik:

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a}\left(e^{\ln y}\right) = e^{\lim\limits_{x\to a}(\ln y)} = e^L \text{ der } L = \lim_{x\to a}(\ln y).$$

Når $y = u^v$ (der det er underforstått at både u og v er funksjoner av x), blir

$$L = \lim_{x\to a}(\ln y) = \lim_{x\to a}\left(\ln\left(u^v\right)\right) = \lim_{x\to a}(v\cdot \ln u).$$

Hvis vi er heldige og dyktige, kan vi bruke L'Hôpitals regel til å finne denne grenseverdien. Deretter blir $\lim\limits_{x\to a} y = e^L$.

Vi summerer opp:

Dersom $\lim\limits_{x\to a}\left(\left(u(x)\right)^{v(x)}\right)$ gir uttrykk av formen "0^0", "∞^0" eller "1^∞", beregner vi først

$$L = \lim_{x\to a}\left(\ln\left(u^v\right)\right) = \lim_{x\to a}(v\cdot \ln u).$$

Deretter blir

$$\lim_{x\to a}\left(\left(u(x)\right)^{v(x)}\right) = e^L.$$

Eksempel 4.5: Finn disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+1)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$

Løsning:

a) Dette er et "0^0"-uttrykk. Da blir

$$L = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x^x\right) = \lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = 0$$

ifølge Eksempel 4.3a. Dermed har vi at

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^L = e^0 = \underline{\underline{1}}.$$

b) Dette er et "1^∞"-uttrykk. Da blir

$$L=\lim_{x\to0^+}\left(\ln\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\left(x+1\right)\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(x+1\right)}{x}\left(=\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{0+1}=\underline{1}$$

Dermed har vi at

$$\lim_{x\to0^+}\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}=e^L=e^1=\underline{\underline{e}}.$$

(Dette bør ikke komme som noen overraskelse dersom du kjenner definisjonen på tallet *e*).

c) Dette er et "∞^0"-uttrykk. Da blir

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\ln\left(\left(\tan x\right)^{\cos x}\right)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\cos x\cdot\ln\left(\tan x\right)\right)\left(=0\cdot\ln\infty=0\cdot\infty\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\left(\tan x\right)}{\left(\cos x\right)^{-1}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\cancel{\frac{1}{\cos^2 x}}}{\left(-1\right)\cdot\cancel{\left(\cos x\right)^{-2}}\cdot\left(-\sin x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{0}{1^2}=\underline{0}$$

Dermed har vi at

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\tan x\right)^{\cos x}=e^L=e^0=\underline{\underline{1}}.$$

Oppgave 4.5.