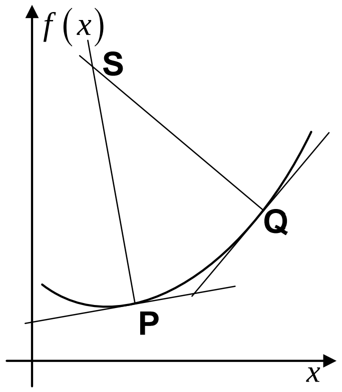
8. Krumning og krumningsradius.



Noen ganger er vi interessert i å vite hvor mye grafen til en funksjon krummer i et bestemt punkt. For å finne et mål for krumningen, kan vi gå fram som vist på figuren til venstre.

Der ser du grafen til en funksjon $y = f(x)$. Vi merker av et punkt P på grafen, tegner inn tangenten til grafen i P, og oppreiser normalen til denne tangenten i P. Så velger vi et nytt punkt Q på grafen nær P, trekker tangenten i Q og oppreiser normalen til denne tangenten i Q. De to normalene skjærer hverandre i punktet S. Dette punktet kan oppfattes som sentrum for en sirkel som har PS som radius.

Så lar vi Q gli mot P langs grafen. Grenseverdien for avstanden PS når Q faller sammen med P skal vi kalle ***krumningsradien*** til *f* i P. Punktet S blir da ***krumningssenteret***, og sirkelen med sentrum i S og krumningsradien som radius kalles ***krumningssirkelen***.

I et vedlegg er det vist at:

Krumningsradien ρ til en funksjon $y = f(x)$ er gitt ved

$$\rho = \left| \frac{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|.$$

Av figuren ser du at jo mer grafen krummer, jo mindre blir krumningsradien. Vi definerer derfor en størrelse som vi kaller ***krumning***, som blir større jo mer grafen krummer. Denne størrelsen definerer vi slik:

Krumningen κ til en funksjon $y = f(x)$ er

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \left| \frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{2}{3}}} \right|.$$

Det er vanlig å bruke absoluttverdien i uttrykkene for ρ og κ fordi en radius er et positivt tall. Men dersom vi fjerner absoluttverditegnene og regner med fortegn, vil et positivt fortegn bety at krumningssirkelen ligger over grafen. Et negativt fortegn betyr at krumningssirkelen ligger under grafen.

La oss se på et par eksempler:

***Eksempel 8.1*:** Finn krumningsradien til disse funksjonene:

a) $y = f(x) = x^2$ i punktet $(0, 0)$.

b) $y = f(x) = \ln x$ i punktet $(1, 0)$.

Løsning:

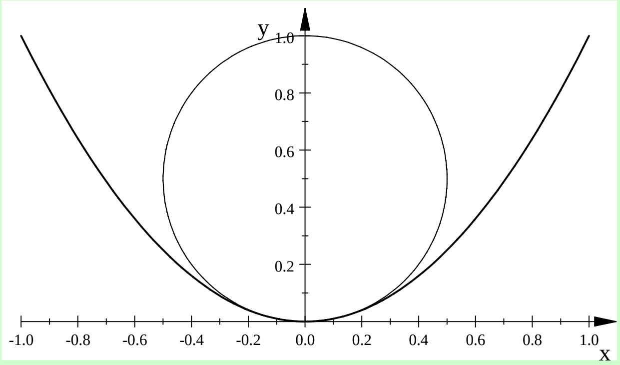
a) $y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y'' = 2$.

$$\rho = \left| \frac{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right| = \left| \frac{\left(1+(2x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right|.$$

Setter inn $x = 0$ og får

$$\rho = \left| \frac{(1+0)^{\frac{3}{2}}}{2} \right| = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Grafen til $y = x^2$ er vist til høyre sammen med krumningssirkelen.



b) $y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\Rightarrow \quad y'' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Istedenfor å sette inn disse uttrykkene i formelen for ρ, er det lettere å beregne verdiene av y' og y'' i punktet $(1, 0)$ før innsettingen:

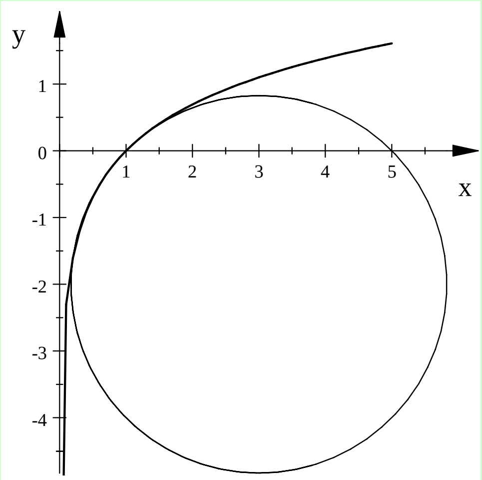
$y' = \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1.$

$y'' = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1^2} = -1.$

Da får vi

$$\rho = \left| \frac{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right| = \left| \frac{\left(1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-1} \right|$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$



Grafen til $y = \ln x$ sammen med krumningssirkelen.

Merk at dersom vi regner med fortegn, vil ρ bli positiv i eksempel a) og negativ i eksempel b). Dette stemmer med at krumningssirkelen ligger over grafen til *f* dersom $\rho > 0$ og under grafen til *f* dersom $\rho < 0$.

Oppgave 8.1.