## *6. Sammenheng mellom endringshastigheter.*

I mange praktiske situasjoner er en størrelse *y* avhengig av en annen størrelse *x*. Så endrer *x* seg, og vi vet hvor fort *x* endrer seg. Hvor fort vil da *y* endre seg?

Slike problem kan formuleres mer matematisk: Anta at vi kjenner en sammenheng mellom *x* og *y*. La *t* være symbol for *tid*. Da vil $\frac{dx}{dt}$ angi hvor fort *x* endrer seg når *t* øker, d.v.s. at $\frac{dx}{dt}$ er et mål for endringshastigheten til *x*. På samme måte blir $\frac{dy}{dt}$ et mål for endringshastigheten til *y*. Finn en sammenheng mellom $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$.

Slike problem kan løses på flere måter. Jeg skal demonstrere to metoder:

**Metode 1:** Dersom vi kjenner en matematisk sammenheng mellom *x* og *y*, for eksempel på formen $y = f(x)$, kan vi derivere med kjerneregelen:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Dette gir en sammenheng mellom $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$.

Samme framgangsmåte kan også brukes dersom sammenhengen mellom *x* og *y* er implisitt gitt.

**Metode 2:** Når *x* endres med en *liten* størrelse $\Delta x$ vil *y* endres med en *liten* størrelse $\Delta y$. Dersom det er mulig å sette opp en sammenheng mellom *endringene* $\Delta x$ og $\Delta y$, kan vi deretter prøve å finne en sammenheng mellom $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ og $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Så lar vi $\Delta t \to 0$, og vi har en sammenheng mellom $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$.

Senere skal vi bruke denne metoden til å sette opp differensiallikninger.

Jeg vil vise begge disse metodene med et eksempel:

***Eksempel 6.1*:** En oppblåst ballong har form som ei kule med radius *r*. På grunn av en lekkasje siver det ut luft av ballongen.

a) Hvor raskt endres radien når du vet hvor raskt lufta siver ut av ballongen?
b) Hvor raskt endres radien i det øyeblikk radien er 10cm, og det siver ut 2.0 liter luft per minutt?

*Løsning*: Det første problemet er å oversette opplysningene til matematisk språkdrakt:

- "Hvor raskt radien endres" må oversettes til $\frac{dr}{dt}$ (radiens endringshastighet målt i for eksempel cm/minutt).
- "Hvor raskt lufta siver ut av ballongen" må oversettes til $\frac{dV}{dt}$ (volumets endringshastighet målt i for eksempel $cm^3$/minutt).

Problemet består altså i å finne en sammenheng mellom $\frac{dr}{dt}$ og $\frac{dV}{dt}$. Jeg skal benytte de to metodene etter tur.

**Metode 1:** Jeg vet at volumet til ei kule er

$$V(r) = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Jeg deriverer med hensyn på tiden *t*, og får

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(r)}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \tfrac{4}{3}\pi\cdot 3r^2\cdot\frac{dr}{dt} = \underline{4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}}.$$

Denne likningen gir oss den ønskede sammenhengen mellom $\frac{dr}{dt}$ og $\frac{dV}{dt}$.

Av opplysningene i b) vet vi at

$$\frac{dV}{dt} = -2.0\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

(minus fordi volumet avtar når det siver luft ut av ballongen), og at $r = 0.10\text{m}$. Da får vi:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4\pi(0.10\text{m})^2}\cdot\left(-2.0\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}^3}{\text{min}}\right) \approx \underline{\underline{-0.016\,\frac{\text{m}}{\text{min}}}}.$$

Det vil si at i det øyeblikk radien er 10 cm, reduseres radien med en hastighet på 1.6 cm/min. Denne hastigheten vil imidlertid endres etter hvert som radien endres.

**Metode 2:** Nå benytter jeg at overflaten av ei kule er

$$A(r) = 4\pi r^2.$$

Når radien *r* endres med en *liten* størrelse $\Delta r$, blir volumendringen

$$\Delta V \approx A(r)\cdot\Delta r = 4\pi r^2\cdot\Delta r$$

(volum = grunnflate ganger høyde). Så deler vi med et *kort* tidsintervall $\Delta t$ og får

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \approx 4\pi r^2\cdot\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Når nå $\Delta t \to 0$, vil denne sammenhengen gå mot

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}$$

som er det samme som vi fikk med metode 1. Den videre regningen er den samme som med metode 1.

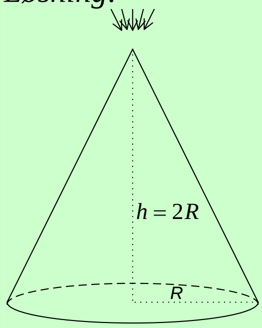
Legg merke til en viktig detalj: Selv om du kjenner en del opplysninger (som i del b av eksemplet), må du finne en generell sammenheng mellom endringshastighetene før du benytter disse opplysningene. Dersom du setter inn de kjente opplysningene for tidlig, risikerer du at du ikke får utført de nødvendige derivasjonene.

Hvilken metode er best? Dersom det er mulig å sette opp en sammenheng mellom *x* og *y*, vil jeg anbefale metode 1. Men dersom det ser umulig ut, må du ty til metode 2. Uansett metode: Det vanskeligste punktet er ofte å oversette oppgaveteksten til matematisk språkdrakt der du identifiserer hvilke endringshastigheter som inngår i problemet.

Neste eksempel er nesten et ”standard-eksempel” som forekommer i mange varianter:

***Eksempel 6.2:*** En sandhaug har form av en kjegle med spissen opp. Ved hjelp av et transportband tilføres det hele tiden $1.5\,\text{dm}^3$ sand pr sekund. Kjeglen står på et horisontalt underlag, og er hele tiden formet slik at høyden er dobbelt så stor som radien. Hvor fort øker høyden i det øyeblikket høyden er $2.00\,\text{m}$?

*Løsning:*




Sandhaugen (uten transportband) er vist på figuren til venstre.
Vi ønsker å finne hvor fort høyden øker, d.v.s. at vi vil finne $\frac{dh}{dt}$.

Vi vet at det tilføres $1.5\,\text{dm}^3$ sand pr sekund. Da er $\frac{dV}{dt} = 1.5\frac{\text{dm}^3}{\text{s}}$.

Volumet av en slik kjegle er

$$V = \tfrac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot h\,.$$

Siden vi er ute etter en sammenheng mellom $\frac{dh}{dt}$ og $\frac{dV}{dt}$, er det naturlig å uttrykke volumet ved høyden alene. Nå har vi at

$$h = 2R \quad\Leftrightarrow\quad R = \tfrac{1}{2}h$$

slik at

$$V = \tfrac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot h = \tfrac{1}{3}\cdot\pi\left(\tfrac{1}{2}h\right)^2\cdot h = \underline{\tfrac{1}{12}\pi h^3}\,.$$

Da blir

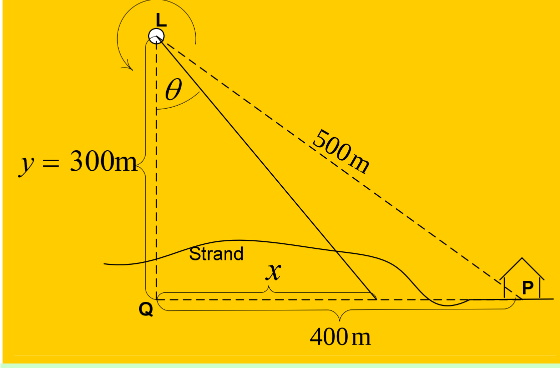
$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(h)}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \tfrac{1}{12}\pi\cdot 3h^2\cdot\frac{dh}{dt} = \tfrac{1}{4}\pi h^2\cdot\frac{dh}{dt} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dh}{dt} = \underline{\frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt}}\,.$$

Nå gjenstår det bare å sette inn de oppgitte verdiene:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{4}{\pi\cdot(2.00\,\text{m})^2}\cdot 1.5\frac{\text{dm}^3}{\text{s}} = \frac{4}{\pi\cdot(2.00\,\text{m})^2}\cdot 1.5\frac{(0.1\text{m})^3}{\text{s}} = \underline{\underline{0.00048\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}}\,.$$

Vi avslutter med et vanskeligere eksempel:

***Eksempel 6.3*:**




Ei roterende fyrlykt L står på en holme 500 m fra Petters hus P. Lykta sender ut en smal lysstråle som roterer en hel omdreining pr minutt. Petter vil gjerne vite hvor fort lysstrålen beveger seg bortover stranda idet den passerer huset hans. Kan du hjelpe ham?

Anta at stranda er rettlinjet ved Petters hus slik skissen til venstre angir, og at ei rett linje PQ langs stranda gir de dimensjonene som er angitt på skissen.

*Løsning:* Vi innfører en størrelse $x$ som er avstanden fra punktet Q til det punktet på stranda der lysstrålen befinner seg. Den farten som lysstrålen har langs stranda må være $\frac{dx}{dt}$ der $t$ er tiden. Den vinkelen som lysstrålen danner med linja LQ kaller vi $\theta$. Siden lysstrålen roterer en omdreining (d.v.s. $2\pi$ radianer) pr minutt, blir rotasjonsfarten

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{60}\,\text{rad/s}\,.$$

For å finne en sammenheng mellom lysstrålens fart $\frac{dx}{dt}$ og rotasjonsfarten $\frac{d\theta}{dt}$, ser vi av figuren at

$$\tan\theta = \tfrac{x}{y} \quad\Leftrightarrow\quad x = y\cdot\tan\theta\,.$$

Vi deriverer denne sammenhengen med hensyn på tiden $t$ (husk at $y$ er konstant), og får

$$\frac{dx}{dt} = \underline{y \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}}.$$

Av figuren ser vi videre at idet lysstrålen passerer Petters hus, er

$$\cos\theta = \tfrac{300}{500} = 0.6.$$

Da er strålens fart langs stranda

$$\frac{dx}{dt} = y \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = 300\text{m} \cdot \frac{1}{0.6^2} \cdot \frac{2\pi}{60}\,\text{rad/s} \approx \underline{\underline{87\text{m/s}}}.$$

Oppgave 6.1.