2. Grunnleggende derivasjonsregler.

Vi skal nå se på de grunnleggende derivasjonsreglene. For oversiktens skyld vil jeg i dette notatet konsentrere meg om selve reglene med noen eksempler, og legge opp lenker til utledningene av reglene.

Jeg skal ta utgangspunkt i skrivemåten $y = f(x)$, og skal benytte y' og $f'(x)$ som symbol for den deriverte istedenfor den mer kompliserte (men mer korrekte) skrivemåten $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{df(x)}{dx}$.

2.1. Generelle derivasjonsregler.

På grunnlag av definisjonen av derivasjon kan vi utlede reglene nedenfor:

La *u* og *v* være to funksjoner som er deriverbare i *x*.
La *c* være en konstant.
Da gjelder:

1) $y = c \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot u'(x)$

2) $y = u(x) + v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x) + v'(x)$

3) $y = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

4) $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

Utledningene finner du i et vedlegg.

2.2. Derivasjon av spesielle funksjoner.

Reglene foran er generelle regler som alltid gjelder. Men vi trenger også formler for derivasjon av spesielle funksjonstyper. Vi skal ta disse funksjonstypene etter tur.

2.2.1. Potensfunksjoner.

En *potensfunksjon* er en funksjon av typen

$$y = f(x) = c \cdot x^n$$

der *c* er en konstant. Den enkleste potensfunksjonen får vi ved å sette $n = 0$. Da blir

$$y = f(x) = c = \text{konstant}\,.$$

En konstant funksjon har pr definisjon stigningstall lik null. Da er også den deriverte lik null. Altså:

$$y = f(x) = c = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad y' = 0\,.$$

Så setter vi $n = 1$ og lar $c = 1$, slik at vi ser på funksjonen

$y = f(x) = x$.

Dette er ei rett linje med stigningstall lik 1. Da er også den deriverte lik 1. Dette kan vi også se av definisjonen på derivasjon:

$$y' = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \underline{\underline{1}}.$$

Vi har altså overbevist oss om at:

$$y = f(x) = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1$$

Disse reglene er spesialtilfeller av en generell regel, som er vist i et vedlegg:

$$y = f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1} \text{ for } n = 0, 1, 2, \cdots$$

Sammen med de generelle regnereglene er vi nå i stand til å derivere både polynomfunksjoner og rasjonale funksjoner.

***Eksempel 2.1*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$

b) $y = f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 4)$

c) $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x + 2}$

Løsning:

a) $y' = 2 \cdot 3x^2 - 2x + 0 = \underline{\underline{6x^2 - 2x}}$.

b) Dette problemet kan angripes på to måter:

1) Jeg kan multiplisere ut og derivere etterpå. Da får jeg:

$$y = f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 4) = x^5 + 4x^3 - x^2 - 4$$

$$\Rightarrow \quad y' = 5x^4 + 4 \cdot 3x^2 - 2x - 0 = \underline{\underline{5x^4 + 12x^2 - 2x}}$$

2) Jeg kan bruke regelen for derivasjon av et produkt. Da får jeg:

$$y' = (3x^2 - 0)(x^2 + 4) + (x^3 - 1)(2x + 0) = 3x^4 + 12x^2 + 2x^4 - 2x$$

$$= \underline{\underline{5x^4 + 12x^2 - 2x}} .$$

c) $$y' = \frac{(2x-3+0)(x+2)-(x^2-3x+1)(1+0)}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{(2x^2+4x-3x-6)-(x^2-3x+1)}{(x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{x^2+4x-7}{(x+2)^2}}}$$

Oppgave 2.1.

Vi har hittil forutsatt at n er et helt, positivt tall. Men ved å benytte logaritmisk derivasjon kan vi vise at formelen gjelder for alle $n \in \mathbb{R}$. Dette er en svært nyttig utvidelse av bruksområdet for formelen.

Vi summerer opp:

$$y = f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1} \text{ for alle } n \in \mathbb{R}.$$

***Eksempel 2.2*: Deriver disse funksjonene:**

a) $y = f(x) = \sqrt{x}$

b) $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$

Løsning:

a) $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}.$

b) Jeg kan bruke regelen for derivasjon av en brøk. Det er imidlertid lettere å gjøre slik:

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad y' = (-2)\cdot x^{-2-1} = -2\cdot x^{-3} = \underline{\underline{\frac{-2}{x^3}}}.$$

Oppgave 2.2.

2.2.2. Trigonometriske funksjoner.

Ramma nedenfor oppsummerer derivasjonsreglene for de trigonometriske funksjonene:

$$y = f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x.$$
$$y = f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x.$$
$$y = f(x) = \tan x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

De to første reglene er vist i et vedlegg. Den siste er vist i eksemplet nedenfor:

Eksempel 2.3: Utled derivasjonsregelen for $\tan x$ på grunnlag av derivasjonsreglene for $\sin x$ og $\cos x$.

Løsning: $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{u^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}}.$$

I eksemplene nedenfor er det vist hvordan vi kan kombinere disse reglene med de generelle derivasjonsreglene:

***Eksempel 2.4*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = x \cdot \sin x$

b) $y = f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

c) $y = f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

Løsning:

a) $y' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \underline{\underline{\sin x + x \cdot \cos x}}$

b) $$y' = \frac{(0 - (-\sin x)) \cdot x^2 - (1 - \cos x) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 \sin x - 2x + 2x \cos x}{x^4} = \underline{\underline{\frac{x \sin x + 2\cos x - 2}{x^3}}}$$

c) $$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x - \tan x \cdot 1}{x^2} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x}{x^2 \cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{x - \sin x \cdot \cos x}{x^2 \cos^2 x}}}$$

Oppgave 2.3.

2.2.3. Inverse trigonometriske funksjoner.

I avsnittet om derivasjon av inverse funksjoner skal vi vise hvordan vi kan komme fram til disse derivasjonsformlene for inverse trigonometriske funksjoner. De kommer spesielt til nytte når vi skal integrere.

$$y = f(x) = \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$y = f(x) = \arccos(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$y = f(x) = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

2.2.4. Eksponential- og logaritmefunksjoner.

Grunntallet *e* i eksponentialfunksjonen

$$y = f(x) = e^x$$

er valgt spesielt slik at stigningstallet til tangenten skal være lik funksjonsverdien i tangerings-punktet (se vedlegg). Dette gir en svært enkel derivasjonsregel:

$$y = f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x$$

Den tilsvarende derivasjonsregelen for naturlige logaritmer er også enkel, og blir utledet i avsnittet om derivasjon av inverse funksjoner:

$$y = f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$$

Dersom vi bruker et generelt grunntall *a* istedenfor *e*, blir reglene:

$$y = f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad y' = a^x \cdot \ln a$$

$$y = f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

***Eksempel 2.5*: Deriver disse funksjonene:**

a) $y = f(x) = x \cdot \ln x$

b) $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

Løsning:

a) $y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \underline{\underline{\ln x + 1}}$.

b) $y' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \dfrac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \underline{\underline{\dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}}} = \underline{\underline{\dfrac{1 - \ln x^2}{x^3}}}$.

Oppgave 2.4.

2.2.5. Hyperbolske funksjoner.
De deriverte av de hyperbolske funksjonene følger direkte av definisjonene av disse funksjonene:

$$y = f(x) = \sinh(x) = \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh(x).$$
$$y = f(x) = \cosh(x) = \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh(x).$$
$$y = f(x) = \tanh(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Du ser vel likheten med derivasjonsformlene for de trigonometriske funksjonene?

***Eksempel 2.6*: Vis at derivasjonsregelen for $y = \tanh(x)$ stemmer.**

Løsning: $$y = f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)}{\tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$y' = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\cosh^2(x)}}}$$

Hvis du nå tror at du kan derivere, tar du fryktelig feil. Det fins en mengde mer sammensatte funksjoner som du ikke kan derivere med disse grunnleggende reglene. Du må nok lære deg noen derivasjonsteknikker – og du må lære dem godt.

Men før du går løs på disse teknikkene, bør du ta en titt på høyere ordens deriverte.

Deretter skal vi ta de mer avanserte teknikkene i denne rekkefølgen:

Kjerneregelen.
Derivasjon av inverse funksjoner.
Implisitt derivasjon.
Logaritmisk derivasjon.

Flere steder skal vi illustrere bruken av disse teknikkene med å utlede formler som vi foreløpig bare har ført opp uten bevis.