7. Logaritmisk derivasjon.

Dette er en teknikk som spesielt egner seg til å derivere uttrykk av formen

$$y = \left(f(x)\right)^{g(x)}.$$

Du starter da med å ta logaritmen på begge sider av likhetstegnet:

$$\ln y = \ln\left(\left(f(x)\right)^{g(x)}\right) = g(x) \cdot \ln\left(f(x)\right).$$

Så deriverer du, og bruker kjerneregelen:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{dg(x)}{dx} \cdot \ln\left(f(x)\right) + g(x) \cdot \left(\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}\right).$$

Nå gjenstår det bare å derivere $f(x)$ og $g(x)$ og multiplisere med y, og du har funnet y'.

***Eksempel 7.1*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = x^x$

b) $y = f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

c) $y = f(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{-x}$

Løsning:

a)

$$\ln y = \ln\left(x^x\right) = x \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y' = y(\ln x + 1) = \underline{\underline{x^x \cdot (\ln x + 1)}}$$

b)

$$\ln y = \ln\left((\cos x)^{\sin x}\right) = \sin x \cdot \ln(\cos x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) = \underline{\underline{(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)}}$$

c)

$$y = f(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{-x} = \left(\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-x} = \underline{\left(x^2+1\right)^{-\frac{x}{2}}}$$

$$\ln y = \ln\left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{x}{2}}\right) = -\tfrac{x}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\tfrac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) - \tfrac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = -\tfrac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) - \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$y' = y\left(-\tfrac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) - \frac{x^2}{x^2+1}\right) = \underline{\underline{\left(x^2+1\right)^{-\frac{x}{2}}\left(-\tfrac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) - \frac{x^2}{x^2+1}\right)}}$$

Logaritmisk derivasjon kan også benyttes når du skal derivere et produkt eller en brøk, selv om du også kan benytte de vanlige derivasjonsreglene. Se eksemplene nedenfor.

***Eksempel 7.2*:** Deriver disse funksjonene med logaritmisk derivasjon.

a) $y = f(x) = \left(x^2 - 2\right)^3 \cdot \sqrt{x+4}$

b) $y = f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1 - \sin^3 x}$

Løsning:

a)
$$\ln y = \ln\left(\left(x^2-2\right)^3 \cdot (x+4)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(x^2-2\right)^3 + \ln(x+4)^{\frac{1}{2}} = \underline{3\ln\left(x^2-2\right) + \tfrac{1}{2}\ln(x+4)}$$
$$\frac{1}{y}\cdot y' = 3\cdot\frac{1}{x^2-2}\cdot 2x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}\cdot 1 = \frac{6x}{x^2-2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}$$
$$y' = y\left(\frac{6x}{x^2-2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}\right) = \underline{\underline{\left(x^2-2\right)^3 \cdot \sqrt{x+4}\left(\frac{6x}{x^2-2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}\right)}}$$

b)
$$\ln y = \ln\left(\frac{\cos^2 x}{1-\sin^3 x}\right) = \ln\left(\cos^2 x\right) - \ln\left(1-\sin^3 x\right) = \underline{2\ln(\cos x) - \ln\left(1-\sin^3 x\right)}$$
$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x) - \frac{1}{1-\sin^3 x}\left(-3\sin^2 x\cdot\cos x\right) = \frac{-2\sin x}{\cos x} + \frac{3\sin^2 x\cdot\cos x}{1-\sin^3 x}$$
$$y' = y\left(\frac{-2\sin x}{\cos x} + \frac{3\sin^2 x\cdot\cos x}{1-\sin^3 x}\right) = \underline{\underline{\frac{\cos^2 x}{1-\sin^3 x}\cdot\left(\frac{-2\sin x}{\cos x} + \frac{3\sin^2 x\cdot\cos x}{1-\sin^3 x}\right)}}$$

Du ser sikkert at disse svarene kan omformes på mange måter, og kanskje også forenkles litt.

`Oppgave 7.1`.

Logaritmisk derivasjon kan også brukes til å utlede flere av de generelle derivasjonsreglene på en forbløffende enkel måte:

***Eksempel 7.3*:** Bruk logaritmisk derivasjon til å vise at disse derivasjonsreglene gjelder:

a) $y = f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n\cdot x^{n-1}$ for alle $n \in \mathbb{R}$.

b) $y = f(x) = u(x)\cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'\cdot v + u\cdot v'$

c) $y = f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

Løsning:

a)
$$y = f(x) = x^n \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \ln\left(x^n\right) = n\cdot\ln x$$
$$\frac{1}{y}\cdot y' = n\cdot\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y' = n\cdot\frac{1}{x}\cdot y = n\cdot\frac{1}{x}\cdot x^n = \underline{\underline{n\cdot x^{n-1}}}$$

Legg merke til at alle overgangene gjelder for alle $n \in \mathbb{R}$.

b) $y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{v} \cdot v'$$

$$y' = y\left(\frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{v} \cdot v'\right) = u \cdot v\left(\frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{v} \cdot v'\right) = \underline{\underline{u' \cdot v + u \cdot v'}}$$

c)

$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{u} \cdot u' - \frac{1}{v} \cdot v'$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{1}{u} \cdot u' - \frac{1}{v} \cdot v'\right) = \frac{u}{v} \cdot \left(\frac{1}{u} \cdot u' - \frac{1}{v} \cdot v'\right) = \frac{1}{v} \cdot u' - \frac{u}{v^2} \cdot v' = \underline{\underline{\frac{u' \cdot v' - u' \cdot v'}{v^2}}}$$