4. Kjerneregelen.

Mange funksjoner er *sammensatte*, slik at de kan oppfattes som $y = f\left(u\left(x\right)\right)$. Et par eksempler:

$$y = f\left(x\right) = e^{-2x} = e^{u} \text{ der } u = -2x.$$

$$y = f\left(x\right) = \sqrt{x^2+1} = \sqrt{u} \text{ der } u = x^2+1.$$

$$y = f\left(x\right) = \ln\left(x-1\right) = \ln u \text{ der } u = x-1.$$

Vi kan også komme bort i mer sammensatte funksjoner, som i eksemplet nedenfor:

$$y = f\left(x\right) = \sqrt{1+\sin^2\left(3x\right)} = \sqrt{u}$$

der

$$u = 1+\sin^2\left(3x\right) = 1+v^2$$

der

$$v = \sin\left(3x\right) = \sin w$$

der

$$w = 3x.$$

Hele poenget med disse operasjonene er at sammensatte funksjoner skal tenkes bygd opp av enklere funksjoner som vi kan derivere. I det siste eksemplet ovenfor ble *y* bygd opp av $w = 3x$, $v = \sin w$, $u = 1+v^2$ og $y = \sqrt{u}$, som alle er funksjoner som vi kan derivere. Og nå kommer vi til hovedpoenget:

Anta at en funksjon kan skrives på formen $y = f\left(x\right) = g\left(u\left(x\right)\right)$ der både *f*, *g* og *u* er deriverbare funksjoner.
Da er

$$y' = \frac{dg\left(u\right)}{du}\cdot\frac{du\left(x\right)}{dx}.$$

Regelen ovenfor kalles ***kjerneregelen***, og er kanskje den derivasjonsteknikken du oftest benytter. Regelen formuleres ofte (litt slurvet) slik:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Denne formuleringen gjør at regelen blir lett å huske. Du skal bare ”skyte inn” *du* i teller og nevner. Regelen blir også lett å utvide, som vi snart skal se.

***Eksempel 4.1*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f\left(x\right) = e^{-2x}$

b) $y = f\left(x\right) = \sqrt{x^2+1}$

c) $y = f\left(x\right) = \ln\left(x-1\right)$

Løsning:

a) $y = e^{-2x} = e^u$ der $u(x) = -2x$.

Da blir

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = e^u \cdot (-2) = \underline{\underline{-2e^{-2x}}}.$$

b) $y = \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ der $u(x) = x^2 + 1$.

Da blir

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2x+0) = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\cdot x = \frac{x}{\sqrt{u}} = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}}.$$

c) $y = \ln(x-1) = \ln u$ der $u(x) = x - 1$.

Da blir

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot(1-0) = \underline{\underline{\frac{1}{x-1}}}.$$

Noen ganger er det gunstig å oppfatte en komplisert funksjon som en kjerne *u* som selv har en kjerne *v* som kanskje selv har en kjerne *w* osv. Da kan kjerneregelen utvides slik:

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

eller

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$$

osv. etter samme system. Se eksemplene nedenfor.

Eksempel 4.2: Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)}$

b) $y = f(x) = \sqrt{1+\sin^2(3x)}$

Løsning:

a) $y = \sqrt{\ln(1+x^2)} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$

der

$$u = \ln(1+x^2) = \ln v$$

der

$$v = 1 + x^2.$$

Da blir

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = \tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{1}{v}\cdot(0+2x) = \frac{1}{\cancel{2}}u^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\cancel{2}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{x}{1+x^2} = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{\ln(1+x^2)}\cdot(1+x^2)}}}$$

b) $$y = \sqrt{1+\sin^2(3x)} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$$

der
$$u = 1+\sin^2(3x) = 1+v^2$$
der
$$v = \sin(3x) = \sin w$$
der
$$w = 3x\,.$$
Da blir
$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx} = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(0+2v)\cdot\cos w\cdot 3$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{u}}\cdot\cancel{2}\sin(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3 = \underline{\underline{\frac{3\sin(3x)\cos(3x)}{\sqrt{1+\sin^2(3x)}}}}$$

Oppgave 4.1.

Noen slike sammensatte funksjoner forekommer så ofte at du like godt kan lære deg de derivasjonsreglene som kjerneregelen gir:

Dersom *a* er en konstant, får vi:
$$y = f(x) = e^{a\cdot x} \quad\Rightarrow\quad y' = a\cdot e^{a\cdot x}$$
$$y = f(x) = \ln(a\cdot x) \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{1}{x}$$
$$y = f(x) = \sin(a\cdot x) \quad\Rightarrow\quad y' = a\cdot\cos(a\cdot x)$$
$$y = f(x) = \cos(a\cdot x) \quad\Rightarrow\quad y' = -a\cdot\sin(a\cdot x)$$
$$y = f(x) = \tan(a\cdot x) \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{a}{\cos^2(a\cdot x)}$$
$$y = f(x) = \left(u(x)\right)^n \quad\Rightarrow\quad y' = n\cdot\left(u(x)\right)^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$y = f(x) = \sqrt{u(x)} \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\cdot\frac{du}{dx}$$
(som egentlig er et spesialtilfelle av formelen ovenfor med $n = \tfrac{1}{2}$).

Det er fin trening å utlede disse derivasjonsreglene:

Eksempel 4.3: Utled reglene i ramma ovenfor.

Løsning: I de 5 første tilfellene innfører vi en kjerne
$$u = a\cdot x \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dx} = a\,.$$

Da får vi:

$$y = e^{a\cdot x} = e^u \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{du}{du}\cdot\frac{du}{dx} = e^u\cdot a = \underline{\underline{a\cdot e^{a\cdot x}}}.$$

$$y = \ln(a\cdot x) = \ln u \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot a = \frac{1}{a\cdot x}\cdot a = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}.$$

$$y = \sin(a\cdot x) = \sin u \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \cos u\cdot a = \underline{\underline{a\cdot\cos(a\cdot x)}}.$$

Reglene for $\cos(a\cdot x)$ og $\tan(a\cdot x)$ utledes på helt tilsvarende måte.
De to siste reglene er bare kjerneregelen brukt direkte.

Oppgave 4.2.

En liten presisering med tilhørende advarsel til slutt: Når vi skriver

$$y = f(x) = g(u(x)) \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

er det underforstått at *y* er en funksjon av *u* alene, og at det ikke forekommer andre variable størrelser. Hvis vi for eksempel har

$$y = f(x) = x + \sqrt{x^2+1} = x + \sqrt{u} = x + u^{\frac{1}{2}} \text{ der } u = x^2+1,$$

blir det feil å skrive at

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

fordi $y = x + u^{\frac{1}{2}}$ blir en funksjon av *både x* og *u*, ikke bare av *u* alene. Her er det ikke bare tale om en formell feil. Dersom vi (mis)bruker denne skrivemåten, kan vi komme i skade for å derivere slik:

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \left(1+\tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\right)\cdot\frac{du}{dx} = \left(1+\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot 2x = \left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\cdot 2x = 2x + \underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}.$$

Korrekt derivasjon går ut på at vi deriverer ledd for ledd, og bruker kjerneregelen kun på det siste leddet slik:

$$y' = 1 + \left(\frac{d}{du}u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{du}{dx} = 1+\tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2x = 1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot 2x = \underline{\underline{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}}.$$

Fortsett med derivasjon av inverse funksjoner.