5. Derivasjon av inverse funksjoner.

Anta at vi har en funksjon *f* som vi gjerne vil derivere. Hvis *f* har en invers funksjon f^{-1}, og vi kjenner den deriverte av f^{-1}, kan vi utnytte denne kunnskapen til å finne den deriverte av *f*.

Du husker sikkert at dersom $y = f(x)$, og *f* er strengt voksende eller strengt avtakende i et intervall, så eksisterer en invers funksjon f^{-1}. Mer presist har vi at:

Dersom en funksjon *f* er kontinuerlig i et intervall, og $f'(x)$ har samme fortegn i hele intervallet, så eksisterer det en invers funksjon f^{-1} i dette intervallet.

Når $y = f(x)$, og betingelsen over er oppfylt, er $x = f^{-1}(y)$. Vi hopper bukk over noen formelle betenkeligheter, og skriver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Teknikken går i korthet ut på at når vi vil finne $y' = \frac{dy}{dx}$, så finner vi først $\frac{dx}{dy}$ på grunnlag av den inverse funksjonen $x = f^{-1}(y)$. Deretter finer vi y'. Dessverre finner vi da y' uttrykt ved *y*, og må omforme svaret slik at vi finner y' uttrykt ved *x*. Eksemplene nedenfor viser framgangsmåten.

***Eksempel 5.1*:** Bruk derivasjon av inverse funksjoner til å derivere disse funksjonene:

a) $y = f(x) = \sqrt{x}$ når du vet at $\frac{d}{dy}\left(y^2\right) = 2y$ og $y \geq 0$.

b) $y = f(x) = \ln x$ når du vet at $\frac{d}{dy}\left(e^y\right) = e^y$.

c) $y = f(x) = \arcsin x$ når du vet at $\frac{d}{dy}(\sin y) = \cos y$ og $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

d) $y = f(x) = \arctan x$ når du vet at $\frac{d}{dy}(\tan y) = \frac{1}{\cos^2 y}$ og $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Løsning: Vi ser at i de angitte intervallene eksisterer det inverse funksjoner. Da får vi:

a) Benytter at

$$y = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^2.$$

Da blir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}.$$

b) Benytter at

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y.$$

Da blir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}.$$

c) Benytter at

$$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y.$$

Da blir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}.$$

d) Benytter at

$$y = \arctan x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan y.$$

Da blir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \underline{\cos^2 y}.$$

Men dette svaret må uttrykkes ved $x = \tan y$. Det gjør vi slik:

$$x^2 = \tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}.$$

Så ganger vi begge sider av likhetstegnet med $\cos^2 y$, og finner $\cos^2 y$ uttrykt ved x^2:

$$x^2 \cos^2 y = 1 - \cos^2 y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cos^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2+1)\cos^2 y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 y = \underline{\frac{1}{x^2+1}}$$

Dermed har vi at

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \underline{\underline{\frac{1}{x^2+1}}}.$$

Oppgave 5.1.

Noen ganger kjenner vi en funksjon, og ønsker å finne den deriverte av den *inverse* funksjonen i ett bestemt punkt. Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 5.2: Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = x^3 + 3x.$$

Vis at *f* har en invers funksjon f^{-1}, og finn $\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right)$ når $x = 4$.

Løsning: Vi ser at

$$\tfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 3 > 0 \text{ for alle } x \in \mathbb{R},$$

slik at det eksisterer en invers funksjon $x = f^{-1}(y)$.

Den deriverte av den inverse funksjonen blir

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{3x^2+3}.$$

Her har vi imidlertid funnet den deriverte med hensyn på *y*, uttrykt ved *x*. Det burde vært omvendt. Nå burde vi egentlig funnet *x* uttrykt ved *y*, satt inn $x(y)$ i uttrykket over slik at vi fikk $\frac{d}{dy}\left(f^{-1}(y)\right)$ uttrykt ved *y*, og deretter byttet om *x* og *y* for å finne $\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right)$.

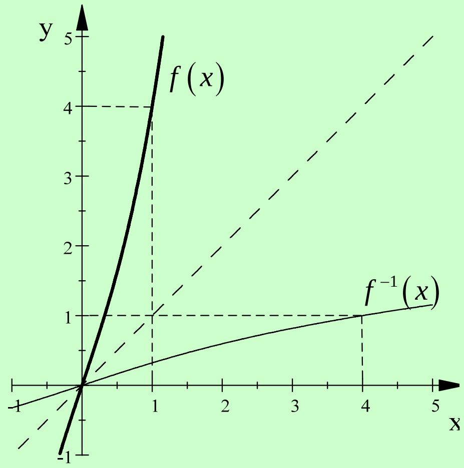
Men det er ikke enkelt. Heldigvis trenger vi ikke å gjøre det i vårt eksempel. Vi ser at når $x=1$ blir

$$y = f(1) = 1^3 + 3 = 4,$$

slik at i uttrykket for $\frac{d}{dy}\left(f^{-1}(y)\right)$ blir $x = f^{-1}(4) = 1$. Dermed har vi at

$$\frac{df^{-1}(4)}{dy} = \frac{1}{3\cdot 1^2 + 3} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}.$$

Figuren nedenfor illustrerer situasjonen.



Oppgave 5.2.

Fortsett med implisitt derivasjon.