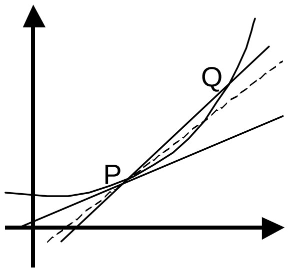
Derivasjon.

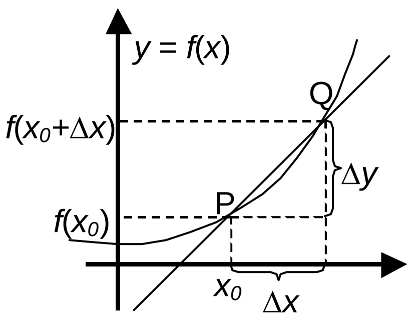
1. Definisjon av derivert.

Vi har stor nytte av å vite *hvor raskt* en funksjon vokser eller avtar. Mer presist: Vi ønsker å bestemme *stigningstallet til tangenten til funksjonsgrafen*.



Figuren til venstre viser hvordan vi kan gå fram for å bestemme stigningstallet til denne tangenten i et punkt P. Vi velger et annet punkt Q et lite stykke fra P, trekker ei rett linje gjennom P og Q, og bestemmer stigningstallet for denne rette linja. Så lar vi Q gå mot P langs funksjonsgrafen. Idet Q faller sammen med P blir linja PQ tangent til grafen. Grenseverdien for stigningstallet til linja PQ blir da stigningstallet til tangenten i P.

Denne framgangsmåten forutsetter at grafen til funksjonen er "glatt" i området rundt P. Mer presist formulert: Vi forutsetter at grenseverdien for stigningstallet til linja PQ eksisterer når Q går mot P.



Nå er tiden inne til å uttrykke seg mer matematisk. Figuren til venstre illustrerer hva vi mener med "stigningstallet til linja PQ". Vi har at:

Punktet P har koordinatene $\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$.

Punktet Q har koordinatene $\left(x_0+\Delta x,\ f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$.

Stigningstallet til linja PQ blir da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

slik at stigningstallet til tangenten i P blir

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Denne grenseverdien kaller vi ***den deriverte av f i*** $\boldsymbol{x_0}$, og skriver den som $\frac{df\left(x_0\right)}{dx}$ eller enklere som $f'\left(x_0\right)$. Vi oppsummerer:

La *f* være en funksjon som er definert i et område rundt $x=x_0$.
Hvis grenseverdien

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

eksisterer, sier vi at *f* er ***deriverbar*** i x_0 og skriver

$$f'\left(x_0\right)=\frac{df\left(x_0\right)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Vanligvis finner vi en formel for den deriverte som er uavhengig av punktet x_0. Da skriver vi bare

$f'(x)$ eller $\frac{df(x)}{dx}$.

Litt formalisme om terminologien: Vi skriver gjerne $y = f(x)$. Da kan den deriverte skrives $\frac{dy}{dx}$. Her er egentlig kombinasjonen $\frac{d}{dx}$ et *derivasjonssymbol* som forteller at *y* skal deriveres med hensyn på *x*. Men det kan være hensiktsmessig å oppfatte $\frac{dy}{dx}$ som en brøk med en *liten* størrelse *dy* som teller og en *liten* størrelse *dx* som nevner. Formelt er dette helt feil, men det fungerer bra i praksis. Slik uformell "ingeniør-matematikk" vil du støte på mange ganger i dette kurset.

I praksis er det sjelden at vi finner den deriverte direkte ut fra definisjonen. Vi bruker heller et sett *generelle derivasjonsregler* kombinert med derivasjonsformler for spesielle funksjons-typer. Dessuten har vi et knippe *derivasjonsteknikker* som er helt uunnværlige når vi skal derivere mer kompliserte funksjoner.

Vi skal nå gå gjennom stoffet i denne rekkefølgen:

Først skal vi se på de grunnleggende derivasjonsreglene.
Deretter tar vi en kort omtale av høyere ordens deriverte.
Så går vi løs på derivasjonsteknikkene:

- Kjerneregelen.
- Derivasjon av inverse funksjoner.
- Implisitt derivasjon.
- Logaritmisk derivasjon.

Til slutt skal vi se på noen anvendelser.