6. Implisitt derivasjon.

Hittil har vi forutsatt at sammenhengen mellom de to variablene *x* og *y* er gitt direkte på formen $y = f(x)$. Men noen ganger er sammenhengen mellom en fri variabel *x* og en avhengig variabel $y = f(x)$ gitt på ***implisitt form***, d.v.s. som et uttrykk som inneholder både *x* og *y*. Slike uttrykk skrives gjerne på formen $g(x, y) = 0$. Når vi skal derivere *y* (d.v.s. finne $y' = \frac{dy}{dx}$) kan vi først løse ut *y* av uttrykket $g(x, y) = 0$ og deretter derivere. Men kommer ofte bort i situasjoner der det er vanskelig eller umulig å løse ut *y*. Da må vi finne y' med ***implisitt derivasjon***.

Denne teknikken er slik: Deriver $g(x, y)$ ved hjelp av vanlige derivasjonsregler. Men ledd som inneholder *y*, deriveres da med kjerneregelen der vi benytter at *y* er en funksjon av *x*:

$$y' = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot y'.$$

Jeg skal vise teknikken gjennom eksempler.

***Eksempel 6.1*:** Finn $y' = \dfrac{dy}{dx}$ når sammenhengen mellom *x* og *y* er gitt ved

$$2x^2 + 3y = 6.$$

Løsning: Det naturlige er kanskje å løse *y* av uttrykket. Da får vi:

$$y = f(x) = -\tfrac{2}{3}x^2 + 2,$$

og deretter derivere. Vi får da

$$y' = -\tfrac{2}{3} \cdot 2x = \underline{\underline{-\tfrac{4}{3}x}}.$$

Men vi kan også derivere uttrykket direkte med implisitt derivasjon. Når vi oppfatter *x* som fri variabel og *y* som avhengig variabel, får vi:

$$2x^2 + 3y = 6 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 \cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y' = -\tfrac{4}{3}x}}.$$

I eksemplet ovenfor fant vi den deriverte uttrykt ved bare *x*. Men ofte får vi den deriverte uttrykt ved både *x* og *y*. Noen ganger er det mulig å erstatte *y* med en funksjon av *x*, som neste eksempel viser. Men andre ganger må vi godta at den deriverte er uttrykt ved både *x* og *y*.

***Eksempel 6.2*:** Finn $y' = \dfrac{dy}{dx}$ når sammenhengen mellom *x* og *y* er gitt ved

$$x^2 + y^2 = 9$$

(Dette er forresten likningen for en sirkel med sentrum i origo og radius 3).

Løsning: Deriverer ledd for ledd med hensyn på *x*, og får

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y' = -\frac{x}{y}}}.$$

Her kan vi uttrykke *y* ved *x* slik:

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 9 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{9 - x^2}\ .$$

Setter dette inn i uttrykket for y', og får

$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\pm\sqrt{9-x^2}} = \underline{\underline{\frac{\mp x}{\sqrt{9-x^2}}}}\ .$$

Det er lett å gjøre feil når du skal derivere ledd som inneholder både *x* og *y* slik at du må bruke regneregler for derivasjon av produkt eller brøk i tillegg til kjerneregelen. Neste eksempel belyser dette.

***Eksempel 6.3*:** Finn $y' = \dfrac{dy}{dx}$ når sammenhengen mellom *x* og *y* er gitt ved

$$2x - 2y + x \cdot y^2 + \frac{y}{x} = 0$$

Løsning: Deriverer ledd for ledd med hensyn på *x*:

$$2\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot y' + \left(1\cdot y^2 + x\cdot 2y\cdot y'\right) + \frac{\left(1\cdot y'\right)\cdot x - y\cdot 1}{x^2} = 0\ .$$

Multipliserer hele likningen med x^2:

$$2x^2 - 2x^2y' + x^2y^2 + 2x^3y\cdot y' + x\cdot y' - y = 0\ .$$

Samler alle ledd som inneholder y':

$$\left(-2x^2 + 2x^3y + x\right)\cdot y' = -2x^2 - x^2y^2 + y \quad \Leftrightarrow \quad y' = \underline{\underline{\frac{y - x^2y^2 - 2x^2}{2x^3y - 2x^2 + x}}}\ .$$

Her er det neppe mulig å finne *y* uttrykt ved *x*. Vi lar derfor svaret stå uttrykt ved både *x* og *y*.

Vi tar noen eksempler til:

***Eksempel 6.4*:** Finn $y' = \dfrac{dy}{dx}$ av uttrykkene nedenfor med implisitt derivasjon:

a) $e^y - y\cdot e^x = 1$

b) $x\cdot y - \ln y = 0$

c) $y\cdot\sin(x+y) = 2$

Løsning:

a) $e^y\cdot y' - \left(\left(1\cdot y'\right)\cdot e^x + y\cdot e^x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'\cdot\left(e^y - e^x\right) = y\cdot e^x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y' = \dfrac{y\cdot e^x}{e^y - e^x}}}\ .$

b) $\left(1\cdot y + x\cdot 1\cdot y'\right) - \dfrac{1}{y}\cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \dfrac{1}{y}\right)\cdot y' = -y \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y' = \dfrac{y}{\frac{1}{y} - x} = \dfrac{y^2}{1 - xy}}}\ .$

c) Innfører

$$u = x + y \quad \Rightarrow \quad u' = \tfrac{du}{dx} = 1 + y'\ .$$

Det uttrykket som skal deriveres, blir da

$$y \cdot \sin u = 2.$$

Deriverer med hensyn på *x*:

$$(1 \cdot y') \cdot \sin u + y \cdot \cos u \cdot u' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' \cdot \sin u + y \cdot \cos u \cdot (1 + y') = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y' \cdot \sin u + y \cdot \cos u + y' \cdot y \cdot \cos u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' \cdot (\sin u + y \cos u) = -y \cos u$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{-y \cos u}{\sin u + y \cos u} = \underline{\underline{\frac{-y \cos(x+y)}{\sin(x+y) + y \cos(x+y)}}}$$

Oppgave 6.1.

Det kan være vanskelig å finne høyere ordens deriverte når du bruker implisitt derivasjon, og svaret er uttrykt ved både *x* og *y*. En teknikk går ut på å derivere sluttsvaret på nytt. En annen teknikk går ut på å derivere en av mellomregningene en gang til. Jeg skal vise begge disse teknikkene med utgangspunkt i Eksempel 6.2.

Eksempel 6.5: Finn andrederiverte av *y* med hensyn på *x* når

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Løsning: Vi fant førstederiverte ved å deriverte ledd for ledd, og fikk

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Dersom vi nå deriverer sluttsvaret med hensyn på *x*, får vi

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{1 \cdot y - x \cdot (1 \cdot y')}{y^2} = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} \cdot \frac{y}{y} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = \underline{\underline{-\frac{9}{y^3}}}$$

der jeg både har satt inn for $y' = -\frac{x}{y}$ og benyttet at $x^2 + y^2 = 9$.

Men jeg kan også derivere mellom-resultatet

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y \cdot y' = 0.$$

Da får jeg

$$1 + \left((1 \cdot y') \cdot y' + y \cdot y''\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot y'' = -1 - (y')^2 = -1 - \left(-\frac{x}{y}\right)^2 = -\frac{y^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2}$$

$$y'' = \frac{1}{y} \cdot \left(-\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right) = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = \underline{\underline{-\frac{9}{y^3}}}$$

Noen ganger kan disse metodene gi tilsynelatende ulike svar. Men (i alle fall dersom du har regnet riktig) vil det alltid være mulig å omforme fra ett svar til et annet med å sette inn kjente sammenhenger.

Oppgave 6.2.

Den siste teknikken vi skal se på, er logaritmisk derivasjon, som er en fiks teknikk i spesielle situasjoner. Men hvis du ikke tar sikte på å bli spesialist i derivasjonsteknikker, kan du heller gå løs på anvendelser av derivasjon.