## *5. System av lineære 1.ordens differensiallikninger.*

Det fins flere metoder til å løse system av lineære 1.ordens differensiallikninger. I denne omgang skal vi se på den metoden som ofte virker mest nærliggende: Vi skal omforme et sett av *n* lineære 1.ordens differensiallikninger til en *n*'te ordens differensiallikning. Vi skal imidlertid begrense oss til $n = 2$, slik at et system av 2 lineære 1.ordens differensiallikninger omformes til en 2.ordens differensiallikning.

Istedenfor å fordype oss i teori, skal vi se på et eksempel:

***Eksempel 5.1:***
Løs likningssystemet nedenfor ved å omforme det til en lineær 2.ordens differensiallikning.

$$y_1' = 2y_1 - 3y_2, \qquad y_1(0) = 5$$
$$y_2' = -y_1 + 3e^{2x}, \qquad y_2(0) = -2$$

*Løsning:* Vi skal bruke en slags eliminasjons- og innsettingsmetode. Vi finner en av de ukjente fra den likningen som *ikke* inneholder den deriverte av den ukjente, deriverer, og setter inn i den andre likningen. Dette innebærer at vi kan finne $y_1$ av likningen for $y_2'$, eller vi kan finne $y_2$ av likningen for $y_1'$. Jeg velger å finne $y_1$ av likningen for $y_2'$:

$$y_2' = -y_1 + 3e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = -y_2' + 3e^{2x}.$$

Dette deriveres:

$$y_1' = -y_2'' + 6e^{2x}.$$

Så setter vi inn i likningen for $y_1'$ slik at vi får en likning som kun inneholder $y_2$ og dens deriverte:

$$y_1' = 2y_1 - 3y_2$$
$$-y_2'' + 6e^{2x} = 2\left(-y_2' + 3e^{2x}\right) - 3y_2$$
$$-y_2'' + 6e^{2x} = -2y_2' + 6e^{2x} - 3y_2$$
$$y_2'' - 2y_2' - 3y_2 = 0$$

Dette er en lineær, homogen 2.ordens differensiallikning med konstante koeffisienter. Vi løser den på vanlig måte. Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}.$$

Nå kan vi sette opp den generelle løsningen for $y_2(x)$:

$$y_2(x) = \underline{C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}}.$$

Så må vi finne $y_1(x)$. Vi kan gå fram på samme måte som før, og finne $y_2$ av likningen for $y_1'$, sette inn i den andre likningen, og på den måte får en likning som kun inneholder $y_1$. Men som oftest er det enklere å benytte at vi allerede har funnet sammenhengen

$$y_1 = -y_2' + 3e^{2x}.$$

Setter inn for $y_2'$, og får:

$$y_1(x) = -y_2' + 3e^{2x}$$
$$= -\left(C_1 \cdot 3e^{3x} + C_2\left(-e^{-x}\right)\right) + 3e^{2x}$$
$$= \underline{-3C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + 3e^{2x}}$$

Til slutt finner vi konstantene $C_1$ og $C_2$:

$$y_1(0) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad -3C_1e^0 + C_2e^0 + 3e^0 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad -3C_1 + C_2 = 2\,.$$
$$y_2(0) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad C_1e^0 + C_2e^0 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 = -2\,.$$

Trekker disse likningene fra hverandre, og får

$$-4C_1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1 = -1}\,.$$

Da blir

$$C_2 = -2 - C_1 = -2 - (-1) = \underline{-1}\,.$$

Løsningen av likningssystemet blir da:

$$y_1(x) = -3(-1)e^{3x} + (-1)e^{-x} + 3e^{2x} = \underline{\underline{3e^{3x} - e^{-x} + 3e^{2x}}}\,.$$
$$y_2(x) = (-1)e^{3x} + (-1)e^{-x} = \underline{\underline{-e^{3x} - e^{-x}}}\,.$$

**Oppgave 5.1**.

Så lenge vi har to likninger med to ukjente, er denne metoden forholdsvis grei, spesielt dersom vi skal finne den generelle løsningen slik at vi slipper å beregne konstantene $C_1$ og $C_2$. Men dersom vi har mer enn to ukjente, blir det fort mer komplisert. Prinsippet er at du systematisk eliminerer en ukjent om gangen. Dersom du har et likningssystem med 3 ukjente, kan du starte med å finne $y_3$ av en likning som *ikke* inneholder $y_3'$, derivere denne, og sette inn over alt hvor du finner $y_3$ eller $y_3'$. Dermed får du et likningssystem med ”bare” $y_1$ og $y_2$ samt deres deriverte.

Hvis du kan beregne egenverdier og egenvektorer for kvadratiske matriser, kan slike system av lineære 1.ordens differensiallikninger løses ved hjelp av matrisemetoder. I praksis viser det seg at matrisemetodene er enklere enn den eliminasjonsteknikken som vi har benyttet i dette notatet, spesielt dersom du har dataverktøy som kan beregne egenverdier og egenvektorer.