Lineære 2. ordens differensiallikninger.

1. Innledning.

En 2.ordens differensiallikning er en likning som inneholder $y''(x)$, og som også kan inneholde $y'(x)$, $y(x)$ og / eller x. Slike likninger er adskillig vanskeligere å løse enn de tilsvarende første ordens differensiallikningene. Vi skal begrense oss til *lineære* 2. ordens differensiallikninger:

En differensiallikning av typen

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=r(x)$$

kalles en *lineær 2. ordens differensiallikning.*

Betegnelsen *lineær* kommer av at både y, y' og y'' inngår som førstegradsfaktorer.

Du husker sikkert at lineære *første* ordens differensiallikninger løses med formel. Dessverre fins det ingen slik formel til å løse lineære 2. ordens differensiallikninger. Det er faktisk bare i noen helt spesielle tilfeller at slike likninger lar seg løse eksakt. Heldigvis er det svært mange problemstillinger innen fagområder som fysikk, mekanikk, elektrisitetslære osv. som fører til slike løsbare likninger. Du bør derfor lære deg løsningsteknikkene for slike likninger.

Mange av de teknikkene vi skal utvikle, kan lett generaliseres til lineære n'te ordens differensiallikninger, d.v.s. likninger som inneholder n'te deriverte av y.

Da vi gikk gjennom lineære 1.ordens differensiallikninger, så vi også på en type lineære 2.ordens differensiallikninger som lar seg løse eksakt. Det er likninger der $q(x)\equiv 0$ slik at likningen blir

$$y''+p(x)\cdot y'=r(x).$$

Du husker sikkert at slike likninger løses ved å innføre en ny funksjon

$$z(x)=y'(x) \quad\Leftrightarrow\quad z'(x)=y''(x).$$

Denne substitusjonen omformer likningen til en lineær 1. ordens differensiallikning

$$z'+p(x)\cdot z=r(x)$$

som vi kan løse med formel. Vi frisker på hukommelsen med eksemplet nedenfor.

Eksempel 1.1: Løs differensiallikningen

$$y''+\frac{1}{x}y'=x.$$

Løsning: Vi innfører

$$z(x)=y'(x) \quad\Leftrightarrow\quad z'(x)=y''(x),$$

og likningen blir

$$z'+\frac{1}{x}z=x.$$

Hjelpefunksjonen blir da

$$F(x)=\int \frac{1}{x}dx=\ln x$$

slik at

$$z(x)=e^{-\ln x}\left(\int x\cdot e^{\ln x}dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\int x\cdot x\,dx+C\right)$$
$$=\frac{1}{x}\left(\int x^2dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\tfrac{1}{3}x^3+C\right)=\underline{\tfrac{1}{3}x^2+\frac{C}{x}}$$

Her har jeg benyttet at

$$e^{\ln x}=x$$

slik at

$$e^{-\ln x}=\left(e^{\ln x}\right)^{-1}=x^{-1}=\frac{1}{x}.$$

Men vi er egentlig bare halvveis i løsningen. Vi skal jo finne y, ikke bare z. Nå vet vi at

$$z(x)=y'(x)$$

slik at

$$y(x)=\int z(x)dx=\int\left(\tfrac{1}{3}x^2+\frac{C}{x}\right)dx=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}x^3+C\cdot\ln|x|+C_2=\underline{\underline{\tfrac{1}{9}x^3+C\ln|x|+C_2}}\,.$$

Legg merke til at løsningen inneholder *to* konstanter.

Når vi nå skal gå løs på mer generelle 2. ordens differensiallikninger, trenger vi et par viktige definisjoner:

Dersom $r(x)\equiv 0$ forenkles likningen til

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=0\,.$$

Da sier vi at likningen er *homogen*.
I motsatt fall er den *inhomogen*.

Disse begrepene er svært viktige på grunn av setningen nedenfor:

Den generelle løsningen av den inhomogene lineære differensiallikningen

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=r(x)$$

er

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$$

der $y_h(x)$ er den generelle løsningen av den tilhørende *homogene* likningen, mens $y_p(x)$ er en *partikulær løsning* av den inhomogene likningen.

En *partikulær løsning* er en eller annen funksjon som passer inn i den gitte *inhomogene* differensiallikningen.

Setningen inneholder to påstander:

1. Dersom $y_h(x)$ er løsning av den tilhørende homogene likningen, mens $y_p(x)$ er en partikulær løsning av den inhomogene likningen, så er
   $$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$
   også løsning av den inhomogene likningen.

2. Det fins ingen andre løsninger av den inhomogene likningen.

Du finner bevis for disse påstandene i et eget notat.

Det er nå naturlig å studere slike likninger i denne rekkefølgen:

Først skal vi se på *homogene* lineære 2.ordens differensiallikninger.

Deretter skal vi se hvordan vi løser *inhomogene* lineære 2.ordens differensiallikninger, d.v.s. hvordan vi finner en partikulær løsning av likningen.

Slike likninger forekommer ofte innen fagområder som for eksempel fysikk, mekanikk og elektrisitetslære. I et notat om svingninger kan du se eksempler på dette.

Hvis du først behersker teknikken for å løse 2.ordens differensiallikninger, er det kort vei til å løse høyere ordens differensiallikninger og system av 1.ordens differensiallikninger.

Til slutt bør du regne gjennom et utvalg blandede oppgaver.