3. Inhomogene likninger.

3.1. Innledning.

Vi har allerede nevnt at den generelle løsningen av den inhomogene lineære differensial-likningen

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=r(x)$$

alltid kan skrives på formen

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$$

der $y_h(x)$ er den generelle løsningen av den tilhørende *homogene* likningen, mens $y_p(x)$ er en *partikulær løsning* av den inhomogene likningen. En *partikulær løsning* er en eller annen funksjon som passer inn i den gitte inhomogene differensiallikningen.

Vi har også sett hvordan vi kan løse den tilhørende homogene likningen, i alle fall dersom likningen har konstante koeffisienter. Nå gjenstår det å finne en partikulær løsning. Men før vi gjør det, kan vi se på et innledende eksempel.

Eksempel 3.1: Vi har gitt differensiallikningen $y''+y=x$.

a) Vis at likningen har en partikulær løsning $y_p(x)=x$, og finn den generelle løsningen av likningen.

b) Finn den spesielle løsningen som har startverdiene $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

Løsning:

a) Den homogene likningen er

$$y''+y=0.$$

Vi har tidligere funnet at denne likningen har den generelle løsningen

$$y_h(x)=C_1\sin x+C_2\cos x.$$

Så skal vi vise at funksjonen

$$y_p(x)=x$$

passer inn i den inhomogene likningen slik at den kan brukes som partikulær løsning. Dette påvises ved innsetting:

$$y_p(x)=x \quad\Leftrightarrow\quad y_p'(x)=1 \quad\Leftrightarrow\quad y_p''(x)=0.$$

Setter inn i den gitte differensiallikningen, og får:

$$y_p''+y_p=x \quad\Leftrightarrow\quad 0+x=x$$

som stemmer. Altså er den generelle løsningen av den gitte likningen

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=\underline{\underline{C_1\sin x+C_2\cos x+x}}.$$

b) For å kunne benytte startverdiene, må vi først derivere $y(x)$:

$$y'(x)=C_1\cos x-C_2\sin x+1.$$

Startbetingelsene gir oss nå:

$$y(0)=1 \quad\Leftrightarrow\quad C_1\sin 0+C_2\cos 0+0=1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{C_2=1}.$$

$$y'(0)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad C_1\cos 0-C_2\sin 0+1=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{C_1=-2}.$$

Den spesielle løsningen med de gitte startverdiene blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{-2\sin x + \cos x + x}}.$$

Prøv deg selv på Oppgave 3.1.

Du innser sikkert at slike ”prøve- og feile”-metoder ikke fører fram generelt. Vi må nok utvikle bedre metoder for å finne en partikulær løsning. Vi skal se på to slike metoder.

Først skal først ta for oss **ubestemte koeffisienters metode**, som er en forholdsvis grei metode dersom $r(x)$ består av visse vanlige, enkle funksjoner. Men metoden har sine begrensninger.

Deretter skal vi ta for oss **Lagranges metode** (også kalt **metoden med variasjon av parametre**), som er en mer generell metode. Ulempen med Lagranges metode er at den ofte fører til en del regning, og den kan også gi integraler som ikke lar seg løse eksakt.

3.2. Ubestemte koeffisienters metode.

Denne metoden går i korthet ut på at vi skal ”gjette” hvordan den partikulære løsningen ser ut, dog slik at vi skal tilpasse noen konstanter slik at vår ”gjetteløsning” passer inn i likningen. Nå skal vi ikke gjette vilt. En noe upresis regel går ut på at partikulærløsningen skal ha samme form som $r(x)$. Mer presist kan vi si at dersom $r(x)$ er et polynom i *x*, en sinus- eller cosinus-funksjon, eller en eksponentialfunksjon, prøver du en partikulær løsning etter tabellen nedenfor:

$r(x)$:	Prøv $y_p(x)$:
$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$	$A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$
$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot e^{\alpha x}$

Du ser at våre ”prøveløsninger” $y_p(x)$ inneholder en eller flere ukjente koeffisienter *A*, A_0, A_1, *B*, osv. Ditt problem går ut på å bestemme disse koeffisientene. Du gjør det ved å sette inn $y_p(x)$ i differensiallikningen, og deretter bestemme koeffisientene slik at likningen er oppfylt for *alle* verdier av *x*. Før vi ser eksempler på hvordan dette gjøres i praksis, skal jeg komme med noen merknader:

- Dersom $r(x)$ er et *n*-tegradspolynom, må du finne *alle* de $n+1$ ubestemte koeffisientene A_0, A_1, …, A_n.
  Eksempel: Selv om
  $$r(x) = 3x^2$$
  (konstantledd og førstegradsledd mangler), må du bruke et fullstendig andregradspolynom
  $$y_p(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2$$
  og finne både A_0, A_1 og A_2.

- Selv om $r(x)$ inneholder *bare* sinus-ledd eller *bare* cosinus-ledd, må $y_p(x)$ inneholde *både* sinus- og cosinus-ledd. Vi kan også skrive $y_p(x)$ på formen $A\sin(\omega x+\varphi)$ eller $A\cos(\omega x+\varphi)$. Disse formene er ofte nyttige i praktiske problem, men fører gjerne til mer kompliserte regninger enn formen $A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$.

- Dersom $r(x)$ er en sum eller et produkt av ledd i venstre kolonne i tabellen ovenfor, må $y_p(x)$ være en tilsvarende sum eller et tilsvarende produkt av ledd fra høyre kolonne.
  Eksempel: Dersom
  $$r(x)=2x\sin(3x),$$
  må du bruke
  $$y_p(x)=(A_0+A_1x)\big(\cos(3x)+B\sin(3x)\big).$$

En annen versjon av disse reglene er at $y_p(x)$ skal inneholde alle typer ledd som forekommer i $r(x)$, samt første- og andrederiverte av disse leddene.

Reglene ovenfor svikter dersom $r(x)$ inneholder ledd som allerede inngår i løsningen $y_h(x)$ av den tilhørende homogene likningen. Da vil reglene gi ledd i $y_p(x)$ som allerede inngår i $y_h(x)$, og slike ledd har vi ikke bruk for. Hva gjør vi da?

> Dersom vi ved å følge reglene ovenfor får en $y_p(x)$ som inneholder ledd som allerede inngår i $y_h(x)$, må slike ledd multipliseres med *x*.

Denne justeringen fører vanligvis (men ikke alltid) fram.

Så var det en viktig detalj til slutt:

> Dersom du kjenner en start-tilstand og skal finne konstantene som inngår i $y_h(x)$, må disse konstantene finnes *etter* at $y_p(x)$ er funnet.

Nå er tiden inne til å se på noen eksempler:

***Eksempel 3.2*:** I differensiallikningene nedenfor skal du først finne den generelle løsningen. Deretter skal du finne den spesielle løsningen som tilfredsstiller de oppgitte startbetingelsene:

a) $y''+5y'+4y=16x$, $\quad y(0)=3$, $\quad y'(0)=-1$.

b) $y''+5y'+4y=3e^{-x}$, $\quad y(0)=3$, $\quad y'(0)=1$.

c) $y''+5y'+4y=34\sin x$, $\quad y(0)=3$, $\quad y'(0)=1$.

d) $y''+4y'+4y=e^{-2x}$, $\quad y(0)=3$, $\quad y'(0)=0$.

Løsning: Fra eksempel 2.4 (eller ved å løse den karakteristiske likningen) vet vi at den homogene likningen

$$y''+5y'+4y=0$$

har løsning

$$y_h(x)=\underline{C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}}.$$

Dette kan vi benytte i oppgave a) – c).

Når vi går på jakt etter partikulær løsning, prøver vi en funksjon $y_p(x)$ av samme form som $r(x)$, med de presiseringer og tilpasninger som er nevnt ovenfor.

a) $y''+5y'+4y=16x$

Her er $r(x)=16x$, d.v.s. et førstegradspolynom i *x*. Vi prøver derfor en partikulær løsning som består av et komplett førstegradspolynom:

$$y_p(x)=A_0+A_1x \quad\Leftrightarrow\quad y_p'(x)=A_1 \quad\Leftrightarrow\quad y_p''(x)=0.$$

Setter inn i differensiallikningen:

$$y_p''+5y_p'+4y_p=16x$$

$$0+5A_1+4(A_0+A_1x)=16x$$

$$5A_1+4A_0+4A_1x-16x=0$$

$$(5A_1+4A_0)+(4A_1-16)x=0$$

Sammenhengen ovenfor skal være oppfylt for *alle* verdier av *x*. Dette er kun oppfylt dersom

$$5A_1+4A_0=0$$

og

$$4A_1-16=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4A_1=16 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{A_1=4}.$$

Setter dette inn i den første likningen:

$$5A_1+4A_0=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4A_0=-5A_1=-5\cdot 4=-20 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{A_0=-5}.$$

Partikulær-løsningen blir da

$$y_p(x)=\underline{-5+4x}$$

slik at den generelle løsningen av differensiallikningen blir

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=\underline{\underline{C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+4x-5}}.$$

Nå først er tiden inne til å finne C_1 og C_2. Vi finner først $y'(x)$:

$$y'(x)=-C_1e^{-x}-4C_2e^{-4x}+4.$$

Innsetting av den oppgitte start-tilstanden gir:

$$y(0)=C_1e^0+C_1e^0+4\cdot 0-5=C_1+C_2-5=3 \quad\Leftrightarrow\quad C_1+C_2=8$$

$$y'(0)=-C_1e^0-4C_2e^0+4=-C_1-4C_2+4=-1 \quad\Leftrightarrow\quad C_1+4C_2=5$$

Trekker den øverste likningen fra den nederste, og får

$$3C_2=-3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{C_2=-1}.$$

Da blir

$$C_1+C_2=8 \quad\Leftrightarrow\quad C_1=8-C_2=8-(-1)=\underline{9}$$

slik at den spesielle løsningen av differensiallikningen som oppfyller startbetingelsen blir

$$y(x)=\underline{\underline{9e^{-x}-e^{-4x}+4x-5}}.$$

b) $$y''+5y'+4y=3e^{-x}$$

Siden løsningen av den homogene likningen er

$$y_h(x)=\underline{C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}},$$

kan vi ikke bruke en partikulærløsning av formen $y_p(x)=Ae^{-x}$ siden et slikt ledd allerede inngår i $y_h(x)$. Vi multipliserer derfor med *x*, og prøver

$$y_p(x)=Axe^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad y_p'(x)=A\left(1\cdot e^{-x}+x\cdot\left(-e^{-x}\right)\right)=Ae^{-x}(1-x)$$

$$\Leftrightarrow \quad y_p''(x)=A\left(-e^{-x}(1-x)+e^{-x}(-1)\right)=Ae^{-x}(x-2)$$

Setter disse uttrykkene inn i differensiallikningen:

$$y_p''+5y_p'+4y_p=3e^{-x}$$

$$Ae^{-x}(x-2)+5Ae^{-x}(1-x)+4Axe^{-x}=3e^{-x}$$

$$Ae^{-x}(x-2+5-5x+4x)=3e^{-x}$$

$$A\cdot 3=3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A=1}$$

Partikulærløsningen blir da

$$y_p(x)=\underline{xe^{-x}}$$

slik at den generelle løsningen av differensiallikningen blir

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=\underline{\underline{C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+xe^{-x}}}.$$

Nå er tiden inne til å finne C_1 og C_2. Vi finner først $y'(x)$:

$$y'(x)=-C_1e^{-x}-4C_2e^{-4x}+\left(1\cdot e^{-x}+x\left(-e^{-x}\right)\right)$$

$$=-C_1e^{-x}-4C_2e^{-4x}+e^{-x}(1-x)$$

Innsetting av den kjente start-tilstanden gir:

$$y(0)=C_1e^{0}+C_1e^{0}+0=C_1+C_2=3$$

$$y'(0)=-C_1e^{0}-4C_2e^{0}+e^{0}(1-0)=-C_1-4C_2+1=1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1+4C_2=0$$

Trekker disse likningene fra hverandre, og får

$$3C_2=-3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_2=-1}.$$

Da blir

$$C_1=-4C_2=-4(-1)=\underline{4}$$

slik at den spesielle løsningen av differensiallikningen som oppfyller startbetingelsen blir

$$y(x)=\underline{\underline{4e^{-x}-e^{-4x}+xe^{-x}}}.$$

c) $$y''+5y'+4y=34\sin x.$$

Selv om $r(x)$ kun inneholder et sinus-ledd, må vår partikulærløsning inneholde både sinus- og cosinus-ledd. Vi prøver

$$y_p(x)=A_1\cos x+A_2\sin x \quad \Leftrightarrow \quad y_p'(x)=-A_1\sin x+A_2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad y_p''(x)=-A_1\cos x-A_2\sin x$$

Setter disse uttrykkene inn i differensiallikningen og ordner:

$$y_p''+5y_p'+4y_p=34\sin x$$

$$\left(-A_1\cos x-A_2\sin x\right)+5\left(-A_1\sin x+A_2\cos x\right)+4\left(A_1\cos x+A_2\sin x\right)=34\sin x$$

$$\left(-A_1+5A_2+4A_1\right)\cos x+\left(-A_2-5A_1+4A_2\right)\sin x=34\sin x$$

$$\left(3A_1+5A_2\right)\cos x+\left(-5A_1+3A_2-34\right)\sin x=0$$

Sammenhengen ovenfor skal være oppfylt for *alle* verdier av *x*. Dette er kun oppfylt dersom

$$3A_1+5A_2=0$$

og

$$-5A_1+3A_2=34\,.$$

Multipliserer øverste likning med 5 og nederste likning med 3 og adderer:

$$25A_2+9A_2=3\cdot 34 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{A_2=3}$$

som innsatt i den første likningen gir

$$A_1=-\tfrac{5}{3}A_2=-\tfrac{5}{3}\cdot 3=\underline{-5}\,.$$

Partikulærløsningen blir da

$$y_p\left(x\right)=\underline{-5\cos x+3\sin x}$$

slik at den generelle løsningen av differensiallikningen blir

$$y\left(x\right)=y_h\left(x\right)+y_p\left(x\right)=\underline{\underline{C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-5\cos x+3\sin x}}\,.$$

Nå er tiden inne til å finne C_1 og C_2. Vi finner først $y'\left(x\right)$:

$$y'\left(x\right)=-C_1e^{-x}-4C_2e^{-4x}+5\sin x+3\cos x\,.$$

Innsetting av den kjente start-tilstanden gir:

$$y\left(0\right)=C_1e^0+C_1e^0-5\cdot\cos 0+3\cdot\sin 0=C_1+C_2-5=3 \quad\Leftrightarrow\quad C_1+C_2=8$$

$$y'\left(0\right)=-C_1e^0-4C_2e^0+5\cdot\sin 0+3\cdot\cos 0=-C_1-4C_2+3=1 \quad\Leftrightarrow\quad C_1+4C_2=2$$

Trekker disse likningene fra hverandre, og får

$$3C_2=-6 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{C_2=-2}\,.$$

Da blir

$$C_1+C_2=8 \quad\Leftrightarrow\quad C_1=8-C_2=8-\left(-2\right)=\underline{10}$$

slik at den spesielle løsningen av differensiallikningen som oppfyller startbetingelsen blir

$$y\left(x\right)=\underline{\underline{10e^{-x}-2e^{-4x}-5\cos x+3\sin x}}\,.$$

d) $\qquad y''+4y'+4y=e^{-2x}$

Fra Eksempel 2.6 (eller ved å løse den karakteristiske likningen) vet vi at løsningen av den tilhørende homogene likningen er

$$y_h\left(x\right)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}\,.$$

Siden både e^{-2x} og xe^{-2x} inngår i løsningen av den homogene likningen, er verken Ae^{-2x} eller Axe^{-2x} brukbare som partikulærløsninger. Vi prøver derfor

$$y_p\left(x\right)=Ax^2e^{-2x} \quad\Leftrightarrow\quad y_p'\left(x\right)=A\left(2xe^{-2x}+x^2\left(-2\right)e^{-2x}\right)=2A\left(x-x^2\right)e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow\quad y_p''\left(x\right)=2A\left(1-2x\right)e^{-2x}+2A\left(x-x^2\right)\left(-2\right)e^{-2x}=2A\left(1-4x+2x^2\right)e^{-2x}$$

Setter disse uttrykkene inn i differensiallikningen og ordner:

$$y_p''+4y_p'+4y_p=e^{-2x}$$

$$2A\left(1-4x+2x^2\right)e^{-2x}+4\cdot 2A\left(x-x^2\right)e^{-2x}+4Ax^2e^{-2x}=e^{-2x}$$

$$A\left(2-8x+4x^2+8x-8x^2+4x^2\right)=1$$

$$A\cdot 2=1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A=\tfrac{1}{2}}$$

Partikulærløsningen blir altså

$$y_p(x)=\underline{\tfrac{1}{2}xe^{-2x}}\ .$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir da

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=\underline{\underline{C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\tfrac{1}{2}x^2e^{-2x}}}\ .$$

Finner konstantene:

$$y'(x)=-2C_1e^{-2x}+C_2\left(1\cdot e^{-2x}+x(-2)e^{-2x}\right)+\tfrac{1}{2}\left(2xe^{-2x}+x^2(-2)e^{-2x}\right)$$

$$y(0)=C_1e^0+C_2\cdot 0\cdot e^0+\tfrac{1}{2}\cdot 0\cdot e^0=\underline{C_1=3}$$

$$y'(0)=-2C_1e^0+C_2\left(1\cdot e^0+0\right)+\tfrac{1}{2}\cdot 0=-2C_1+C_2=0$$

Da blir

$$C_2=2C_1=2\cdot 3=\underline{6}\ ,$$

slik at løsningen blir

$$y(x)=\underline{\underline{3e^{-2x}+6xe^{-2x}+\tfrac{1}{2}x^2e^{-2x}}}\ .$$

Som du ser, er det mye pirkarbeid når vi først skal finne den generelle løsningen av den homogene likningen, deretter finne en partikulær løsning, og til slutt bestemme konstantene slik at startbetingelsene er oppfylt. Trøst deg med at når vi kommer bort i slike likninger i praksis, er vi sjelden interessert i å finne disse konstantene. Differensiallikningen er ofte en matematisk modell av et fysisk system. Da ønsker vi vanligvis en generell løsning, uavhengig av starttilstanden. For fysiske systemer skal du også være oppmerksom på at $y_h(x)$ vanligvis har en slik form at den har liten praktisk interesse. Som regel er det kun partikulærløsningen som interesserer oss.

Løs Oppgave 3.2, Oppgave 3.3.

Etter litt trening vil du oppdage at metoden ovenfor faktisk er ganske grei dersom $r(x)$ har en "pen" form. Den er derfor blitt en slags standardmetode. Men noen ganger svikter metoden. Da kan det være kjekt å ha metoden nedenfor til disposisjon.

3.3. Lagranges metode (variasjon av parametre).

Denne metoden benytter seg av en formel for å finne en partikulær løsning. Metoden kan brukes i mange situasjoner der ubestemte koeffisienters metode ikke kan brukes. Oppskriften ser slik ut:

La $p(x)$, $q(x)$ og $r(x)$ være funksjoner som er kontinuerlige i et intervall *I*.
La videre $y_1(x)$ og $y_2(x)$ være to lineært uavhengige løsninger til differensiallikningen

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=0$$

i dette intervallet.

I dette intervallet har da differensiallikningen

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=r(x)$$

en partikulær løsning

$$y_p(x)=y_2(x)\cdot\int\frac{y_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx-y_1(x)\cdot\int\frac{y_2(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx$$

der

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$$

er Wronski-determinanten til $y_1(x)$ og $y_2(x)$.

Merknad: Dersom du tar med integrasjonskonstanter når du løser integralene, får du løsningen av den tilhørende homogene likningen med "på kjøpet". Det er derfor vanlig å sløyfe disse integrasjonskonstantene.

Du finner bevis for setningen i vedlegget.

Svakheten ved denne metoden er at den ofte fører til integraler som er vanskelig å løse. Men når først integralene lar seg løse, er den grei å ty til slik eksemplene nedenfor viser. I det første eksemplet er integral løst med dataverktøy, selv om de lar seg løse med de metodene vi har vært gjennom.

***Eksempel 3.3*:** Finn en partikulær løsning til disse differensiallikningene:

a) $y''+y=\sin x$

b) $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ (se Eksempel 3.2d)

Løsning:

a) Vi løser først den tilhørende homogene likningen. Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\pm i\,.$$

To lineært uavhengige løsninger av den homogene likningen blir da

$$y_1(x)=\cos x\,,\qquad y_2(x)=\sin x\,.$$

Da blir

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

slik at vi får en partikulær løsning

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_2(x)\cdot\int \frac{y_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx - y_1(x)\cdot\int \frac{y_2(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx \\ &= \sin x\cdot\int \frac{\cos x\cdot\sin x}{1}dx - \cos x\cdot\int \frac{\sin x\cdot\sin x}{1}dx \\ &= \sin x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\cos^2 x\right) - \cos x\cdot\left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{1}{2}\sin x\cdot\cos x\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(-\sin x\cdot\cos^2 x - x\cos x + \cos^2 x\cdot\sin x\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}x\cos x}} \end{aligned}$$

b) Fra Eksempel 3.2d vet vi at den tilhørende homogene likningen har to lineært uavhengige løsninger

$y_1(x) = e^{-2x}$ og $y_2(x) = xe^{-2x}$.

Da blir

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}-2xe^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-2x}\left(e^{-2x}-2xe^{-2x}\right) + 2e^{-2x}\cdot xe^{-2x} = e^{-2x}\cdot e^{-2x} = e^{-4x}$$

slik at vi får en partikulær løsning

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_2(x)\cdot\int \frac{y_1(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx - y_1(x)\cdot\int \frac{y_2(x)\cdot r(x)}{W(x)}dx \\ &= xe^{-2x}\cdot\int \frac{e^{-2x}\cdot e^{-2x}}{e^{-4x}}dx - e^{-2x}\cdot\int \frac{xe^{-2x}\cdot e^{-2x}}{e^{-4x}}dx \\ &= xe^{-2x}\cdot\int 1dx - e^{-2x}\cdot\int xdx = xe^{-2x}\cdot x - e^{-2x}\cdot\tfrac{1}{2}x^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}x^2e^{-2x}}} \end{aligned}$$

som stemmer med resultatet fra Eksempel 3.2d.