4. Høyere ordens lineære differensiallikninger.

De prinsippene vi har sett på for å løse lineære 2. ordens differensiallikninger, kan uten videre generaliseres til høyere ordens likninger. Vi skal ikke fordype oss i teori, men skal heller se på eksempler:

Eksempel 4.1: Finn den generelle løsningen av disse differensiallikningene:

a) $y'''+4y''-y'-4y=0$

b) $y'''+2y''+y'+2y=8e^{-x}$

Løsning:

a) Setter opp den karakteristiske likningen:

$$\lambda^3+4\lambda^2-\lambda-4=0$$

Denne likningen løses med litt kreativ faktorisering:

$$\lambda^2(\lambda+4)-(\lambda+4)=0$$

$$(\lambda+4)(\lambda^2-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+4)(\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

Nå ser vi løsningen $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=1$.

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x)=\underline{\underline{C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}+C_3e^{x}}}\ .$$

b) Løser først den homogene likningen, og setter opp den karakteristiske likningen:

$$\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+2=0$$

Vi faktoriserer etter samme prinsipp som før:

$$\lambda^2(\lambda+2)+(\lambda+2)=0$$

$$(\lambda+2)(\lambda^2+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+2)(\lambda+i)(\lambda-i)=0$$

Nå ser vi løsningen $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-i$, $\lambda_3=i$.

λ_1 fører nå til at den generelle løsningen av den homogene differensiallikningen må inneholde et ledd C_1e^{-2x}, mens λ_2 og λ_3 gir opphav til ledd av formen

$$e^{0x}\left(B_1\cos(1x)+B_2\sin(1x)\right)=B_1\cos x+B_2\sin x\,.$$

Løsningen av den homogene likningen blir derfor

$$y_h(x)=\underline{C_1e^{-2x}+B_1\cos x+B_2\sin x}\,.$$

Så går vi på jakt etter en partikulær løsning av formen

$$y_p(x)=Ae^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_p'(x)=-Ae^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_p''(x)=Ae^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_p'''(x)=-Ae^{-x}\,.$$

Innsetting:

$$-Ae^{-x}+2Ae^{-x}-Ae^{-x}+2Ae^{-x}=8e^{-x}\,.$$

Multipliserer med e^{x} og samler ledd:

$$2A=8 \quad \Leftrightarrow \quad A=4\,.$$

Dermed er den generelle løsningen av den inhomogene likningen

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=\underline{\underline{C_1e^{-2x}+B_1\cos x+B_2\sin x+4e^{-x}}}\ .$$

Oppgave 4.1.