2. Homogene lineære 2.ordens differensiallikninger.

2.1. Generelle egenskaper.

En *homogen* lineær 2. ordens differensiallikning er altså en likning av typen

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=0.$$

Som nevnt i innledningen fins det ikke noen formel eller noen annen generell teknikk for å løse slike likninger. Men det er utarbeidet mye nyttig teori for løsningen av slike likninger. Men før vi går løs på denne teorien, skal vi se på et enkelt eksempel:

Eksempel 2.1: Løs differensiallikningen

$$y''+y=0.$$

Løsning: Likningen kan omformes til

$$y''=-y.$$

Problemet er altså å finne en funksjon som er slik at når den deriveres to ganger, kommer vi tilbake til den funksjonen vi gikk ut fra, men med motsatt fortegn. Da kan vi jo prøve

$$y_1(x)=\sin x.$$

Deriverer vi to ganger, får vi:

$$y_1'(x)=\cos x,$$

$$y_1''(x)=-\sin x=-y_1(x).$$

Altså er funksjonen

$$y_1(x)=\sin x$$

en løsning av differensiallikningen.

Men vi kan også prøve

$$y_2(x)=\cos x.$$

Deriverer vi to ganger, får vi

$$y_2'(x)=-\sin x,$$

$$y_2''(x)=-\cos x=-y_1(x).$$

Altså er funksjonen

$$y_2(x)=\cos x$$

også en løsning av differensiallikningen.

Vi har altså funnet at differensiallikningen vår har to løsninger

$$y_1(x)=\sin x$$

og

$$y_2(x)=\cos x.$$

Kan den ha andre løsninger? Svaret er et ubetinget *JA!* Enhver lineær kombinasjon av disse to løsningene, d.v.s. ethvert uttrykk av formen

$$y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$$

der C_1 og C_2 er fritt valgte konstanter, er også løsning av likningen. Dette ser vi slik:

$$y'(x) = C_1 \cos x + C_2(-\sin x)$$
$$y''(x) = C_1(-\sin x) + C_2(-\cos x)$$
$$= -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$
$$= -y(x)$$

Altså vil

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

passe inn i likningen uansett hvilke verdier C_1 og C_2 har.

Løs oppgave 2.1.

Kan det tenkes at likningen i eksemplet ovenfor har enda flere løsninger? Svaret er nå *NEI*. Da støtter vi oss på setningen nedenfor, som oppsummerer noen av de viktigste egenskapene for løsningen av slike homogene lineære 2. ordens differensiallikninger.

La $p(x)$ og $q(x)$ være to funksjoner som er kontinuerlige innenfor et intervall *I*. Innenfor dette intervallet gjelder:

Den homogene lineære 2. ordens differensiallikningen

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$$

har alltid to lineært uavhengige løsninger $y_1(x)$ og $y_2(x)$.

Den generelle løsningen av differensiallikningen kan skrives

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

der C_1 og C_2 er to konstanter som kan bestemmes dersom vi kjenner en start-tilstand $y(x_0)$ og $y'(x_0)$.

Vi skal ikke bevise denne setningen.

Merk hvordan resultatene i eksemplet ovenfor stemmer med setningen. Vi fant to løsninger $y_1(x) = \sin x$ og $y_2(x) = \cos x$. Vi fant også at

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

var løsning av likningen. Men setningen garanterer i tillegg at det ikke fins andre løsninger av likningen.

Setningen inneholder flere påstander:

1. Likningen har alltid to lineært uavhengige løsninger $y_1(x)$ og $y_2(x)$.

2. Enhver lineær kombinasjon
   $$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$
   er også løsning av likningen.

3. Det fins ingen andre løsninger av likningen.

4. Når en start-tilstand $y(x_0)$ og $y'(x_0)$ er kjent, kan C_1 og C_2 bestemmes slik at likningen har en entydig løsning.

Denne setningen er egentlig et spesialtilfelle av en mer generell setning for *n*'te ordens lineære differensiallikninger. Slike likninger har alltid *n* lineært uavhengige løsninger. Den generelle løsningen av en *n*'te ordens homogen lineær differensiallikning er da en lineær kombinasjon av disse *n* lineært uavhengige løsningene.

Ovenfor har vi flere ganger brukt uttrykket "lineært uavhengige funksjoner". Hva betyr det? I sin enkleste form kan vi si at:

To funksjoner $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er *lineært avhengige*
dersom det fins et tall *a* som er slik at
$$y_1(x) = a \cdot y_2(x).$$
Dersom det ikke fins noe slikt tall, er funksjonene *lineært uavhengige*.

Eksempel 2.2: Undersøk om funksjonene $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er lineært avhengige når

a) $y_1(x) = x^2$ og $y_2(x) = 4x^2$.

b) $y_1(x) = \sin(2x)$ og $y_2(x) = \sin x \cdot \cos x$.

Løsning:

a) Her ser vi direkte at
$$y_2(x) = 4x^2 = 4y_1(x)$$
slik at funksjonene er lineært avhengige.

b) Denne er verre. Men dersom du husker dine trigonometriske formler, vil du huske at
$$y_1(x) = \sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x = 2y_2(x)$$
slik at også disse to funksjonene er lineært avhengige.

Eksempel b) ovenfor viser at det kan være behov for en bedre test på lineær uavhengighet. Her kommer den:

Vi har gitt to funksjoner $y_1(x)$ og $y_2(x)$
Definer ***Wronski-determinanten***

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Vi kan da vise at:

1) Funksjonene $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er *lineært uavhengige* i et intervall *I* hvis og bare hvis $W(x)$ er forskjellig fra null for minst en *x* i intervallet.
2) Funksjonene er *lineært avhengige* hvis og bare hvis $W(x) \equiv 0$ i hele intervallet.

La oss se på et eksempel:

Eksempel 2.3: Undersøk om funksjonene $y_1(x) = e^{ax}$ og $y_2(x) = e^{bx}$ der *a* og *b* er to konstanter, er lineært uavhengige.

Løsning: Vi setter opp Wronski-determinanten:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ ae^{ax} & be^{bx} \end{vmatrix} = e^{ax} \cdot be^{bx} - ae^{ax} \cdot e^{bx} = \underline{(b-a)e^{ax} \cdot e^{bx}}$$

Vi ser at dersom $a = b$, blir Wronski-determinanten identisk lik null slik at $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er lineært avhengige. Det er helt naturlig fordi funksjonene da er like. Men dersom $a \neq b$ er Wronski-determinanten aldri lik null, og funksjonene er da lineært uavhengige.

Du finner mer om lineær (u)avhengighet og Wronski-determinanten i et lite tilleggsnotat.

2.2. Likninger med konstante koeffisienter.

Hittil har vi gått som katten rundt den varme grøten. Vi har sagt mye om hvordan løsningen av differensiallikningen ser ut. Men vi har sagt fint lite om hvordan vi finner løsningen. Grunnen er at det vanligvis er temmelig vanskelig å finne løsningen.

Vi skal begrense oss til et viktig spesialtilfelle: Likningen har *konstante koeffisienter*. Dette vil si at $p(x) = a$ og $q(x) = b$ der både *a* og *b* er konstanter. Likninger reduseres da til

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0.$$

Løsningsteknikken for en slik likning er oppsummert nedenfor:

Den homogene differensiallikningen

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$$

der *a* og *b* er konstanter, løses ved at du først setter opp den *karakteristiske likningen*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

og finner røttene i denne med vanlig formel for løsing av andregradslikninger. Du må deretter skille mellom tre tilfeller:

1. To forskjellige reelle røtter λ_1 og λ_2:
   Differensiallikningen har løsning
   $$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. To kompleks konjugerte røtter $\lambda = \alpha \pm i\beta$:
   Differensiallikningen har løsning
   $$y(x) = e^{\alpha x}\left(B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)\right).$$
   Løsningen kan også skrives på formen
   $$y(x) = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x + \varphi)$$
   eller
   $$y(x) = Ae^{\alpha x}\sin(\beta x + \varphi)$$

3. To like røtter $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:
   Differensiallikningen har løsning
   $$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

Du finner utledning av setningen ovenfor i eget notat.

Når vi bruker oppskriften ovenfor, vil løsningen inneholde to ukjente konstanter. Vi har da funnet den ***generelle løsningen*** av differensiallikningen. Dersom vi kjenner en starttilstand gitt ved $y(x_0)$ og $y'(x_0)$, kan vi bestemme disse konstantene. Da finner vi en ***spesiell løsning*** av differensiallikningen. Mange ganger nøyer vi oss med å finne den generelle løsningen.

***Eksempel 2.4*:** Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

a) Finn den generelle løsningen av likningen.
b) Finn den spesiell løsningen som tilfredsstiller startbetingelsene
$$y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$$

Løsning:

a) Vi setter opp og løser den karakteristiske likningen:
$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$
$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \underline{-1} \\ \underline{-4} \end{cases}$$
Differensiallikningen har da den generelle løsningen
$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}}}.$$

b) For å finne konstantene, må jeg først finne et uttrykk for $y'(x)$:

$$y'(x) = -C_1e^{-x} - 4C_2e^{-4x}.$$

Setter inn startbetingelsene:

$$y(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2 = 3.$$

$$y'(0) = -C_1e^0 - 4C_2e^0 = -C_1 - 4C_2 = 0.$$

Legger sammen disse likningene, og får

$$-3C_2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_2 = -1}.$$

Da blir

$$C_1 = 3 - C_2 = 3 - (-1) = \underline{4}.$$

Den spesielle løsningen av differensiallikningen er da

$$\underline{\underline{y(x) = 4e^{-x} - e^{-4x}}}.$$

***Eksempel 2.5*:** Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

a) Finn den generelle løsningen av likningen.

b) Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller startbetingelsene

$$y(0) = 3, \qquad y'(0) = 0.$$

Løsning:

a) Vi setter opp og løser den karakteristiske likningen:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \underline{-2 \pm i}.$$

Siden den karakteristiske likningen har to kompleks konjugerte røtter, blir løsningen av differensiallikningen

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-2x}(B_1 \cos x + B_2 \sin x)}}.$$

Løsningen kan også skrives på formen

$$y(x) = \underline{\underline{Ae^{-2x} \cos(x + \varphi)}}.$$

b) For å finne konstantene B_1 og B_2, må jeg først finne et uttrykk for $y'(x)$:

$$y'(x) = -2e^{-2x}(B_1 \cos x + B_2 \sin x) + e^{-2x}(-B_1 \sin x + B_2 \cos x).$$

Setter inn startbetingelsene:

$$y(0) = e^0(B_1 \cos 0 + B_2 \sin 0) = B_1 = 3.$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= -2e^0(B_1 \cos 0 + B_2 \sin 0) + e^0(-B_1 \sin 0 + B_2 \cos 0) \\ &= -2B_1 + B_2 = 0 \end{aligned}.$$

Av den siste likningen får vi

$$B_2 = 2B_1 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Den spesielle løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-2x}(3\cos x + 6\sin x)}}.$$

Dersom løsningen er skrevet på formen

$$y(x) = Ae^{-2x}\cos(x+\varphi)$$

må vi først finne et uttrykk for $y'(x)$ for å finne A og φ.

$$y'(x) = A\left(-2e^{-2x}\cos(x+\varphi) + e^{-2x}\left(-\sin(x+\varphi)\right)\right)$$
$$= Ae^{-2x}\left(-2\cos(x+\varphi) - \sin(x+\varphi)\right)$$

Setter inn startbetingelsene:

$$y(0) = Ae^{0}\cos(0+\varphi) = \underline{A\cos\varphi = 3}$$
$$y'(0) = Ae^{0}\left(-2\cos(0+\varphi) - \sin(0+\varphi)\right)$$
$$= -A\left(2\cos\varphi + \sin\varphi\right) = 0$$

Av den siste likningen får vi

$$2\cos\varphi + \sin\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan\varphi = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \begin{cases} -63.4^\circ \\ 116.6^\circ \end{cases}$$

Settes $\varphi = -63.4^\circ$ inn i (1), får vi

$$A = \frac{3}{\cos\varphi} = \frac{3}{\cos\left(-63.4^\circ\right)} = \underline{6.70}.$$

Bruker vi $\varphi = 116.6^\circ$, blir A negativ noe vi ikke ønsker.
Løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{6.70e^{-2x}\cos\left(x-63.4^\circ\right)}}.$$

For sikkerhets skyld kan vi sjekke at de to løsningene er ekvivalente:

$$6.70e^{-2x}\cos\left(x-63.4^\circ\right) = 6.70e^{-2x}\left(\cos x\cdot\cos\left(-63.4^\circ\right) - \sin x\cdot\sin\left(-63.4^\circ\right)\right)$$
$$= 6.70e^{-2x}\left(0.4478\cdot\cos x - 0.8942\cdot\sin x\right)$$
$$= \underline{e^{-2x}\left(3.00\cos x + 5.99\sin x\right)}$$

Når vi tar hensyn til avrundingsunøyaktigheter, ser vi at løsningene er identiske.

***Eksempel 2.6*:** Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

a) Finn den generelle løsningen av likningen.

b) Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller startbetingelsene

$$y(0) = 3, \qquad y'(0) = 0.$$

Løsning:

a) Vi setter opp og løser den karakteristiske likningen:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$
$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \underline{-2}.$$

Den karakteristiske likningen har to sammenfallende røtter. Differensiallikningen har da løsningen

$$y(x) = \underline{C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}}\,.$$

b) For å finne konstantene, må jeg først finne et uttrykk for $y'(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2C_1 e^{-2x} + C_2\left(1 \cdot e^{-2x} + x(-2)e^{-2x}\right) \\ &= -2C_1 e^{-2x} + C_2(1-2x)e^{-2x} \end{aligned}$$

Setter inn startbetingelsene:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 = C_1 = 3\,.$$

$$y'(0) = -2C_1 e^0 + C_2(1-0)e^0 = -2C_1 + C_2 = 0\,.$$

Av den siste likningen får vi

$$C_2 = 2C_1 = 2 \cdot 3 = 6\,.$$

Løsningen av differensiallikningen blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{3e^{-2x} + 6xe^{-2x}}}\,.$$

Denne løsningsteknikken *må* du trene inn. Start med å finne den generelle løsningen av likningene i Oppgave 2.2, og gå deretter videre med Oppgave 2.3.

Nå som du kan løse lineære *homogene* likninger med konstante koeffisienter, er det på tide å gå videre til de *inhomogene* likningene.