1. Vekstmodeller.

Bakgrunn: Anta at vi har en eller annen størrelse *x* som varierer med tiden *t*. Vi skriver da $x(t)$. Størrelsen *x* kan være antall bakterien i en bakteriekoloni, antall dyr i en dyrebestand, vekten av et tre, verdien av et hus, eller en rekke andre ting som kan variere med tiden.

> La Δx angi økingen av *x* i løpet av et tidsintervall Δt. Da sier vi at:
>
> $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ er den ***gjennomsnittlige vekstraten*** i tidsrommet Δt.
>
> $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$ er den ***momentane vekstraten*** ved et tidspunkt *t*.

For å komme videre, må vi vite (eller anta) noe om vekstraten. Det er da naturlig å anta at vekstraten avhenger av *x* på en eller annen måte, slik at $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$. Men hvordan ser $f(x)$ ut?

I eksemplene nedenfor skal vi se på et par vanlige situasjoner. I alle eksemplene skal vi anta at ved start-tidspunktet $t = 0$ er $x = x_0$.

Eksempel 1.1: Anta at vekstraten er proporsjonal med *x*, slik at $\dfrac{dx}{dt} = k \cdot x$ der *k* er en konstant.

a) Finn $x(t)$.

b) Illustrer løsningen grafisk når $k = 0.30$.

Løsning: For å finne $x(t)$, må vi løse differensiallikningen

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x, \qquad x(0) = x_0.$$

Dette er en separabel likning (vi kan også oppfatte den som lineær). Vi deler på *x* og multipliserer med *dx*, og får

$$\frac{dx}{x} = k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{x}dx = \int k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = k \cdot t + C_1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = e^{k \cdot t + C_1} = e^{k \cdot t} \cdot e^{C_1} = \underline{Ce^{k \cdot t}}$$

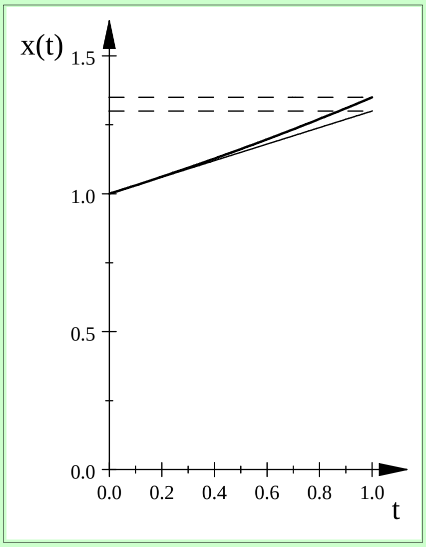
der $C = e^{C_1}$. Finner *C*:

$$x(0) = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = Ce^{k \cdot 0} = C \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = x_0}.$$

Da blir løsningen

$$\underline{\underline{x(t) = x_0 e^{k \cdot t}}}.$$

Merk at en positiv verdi av *k* innebærer at *x* øker, mens en negativ *k* innebærer at *x* avtar.



For å se hva dette innebærer når $k = 0.30$ (som svarer til en momentan vekstrate på 30%) tegner vi grafen til venstre. Ved tidspunktet $t = 1$ blir

$$x(1) = x_0 e^{0.30 \cdot 1} \approx \underline{\underline{1.35 x_0}} .$$

Umiddelbart virker dette merkelig. Med en vekstrate på 30% skulle vi vel få

$$x(1) = x_0 + 0.30 x_0 = 1.30 x_0$$

og ikke $1.35 x_0$? Forklaringen ligger i at tilveksten *hele tiden* legges til verdien av *x*. Da vil *x* hele tiden øke, og tilveksten vil også øke hele tiden. Dersom tilveksten *ikke* ble lagt til *x* under veis, ville vi ganske riktig fått at $x(1) = 1.30 x_0$.

Dersom du setter et beløp x_0 i en bank blir tilveksten (renten) kun lagt til beløpet ved hvert årsskifte. Bankene opererer ikke med eksponentiell vekst på innskudd.

Figuren ovenfor (der $x_0 = 1$) illustrerer forskjellen mellom eksponentiell vekst og lineær vekst (forrentning i bank).

Vi oppsummerer hovedpunktet fra dette eksemplet:

Når en størrelse *x* har konstant vekstrate *k* slik at *x* følger differensiallikningen

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x ,$$

blir $x(t) = x_0 e^{k \cdot t}$ der x_0 er startverdien for *x*.

Eksempel 1.2: En elgbestand som ikke har vært beskattet, har fordoblet seg i løpet av 10 år. Nå skal en fast andel av bestanden skytes hvert år, slik at bestanden holdes konstant.

a) Hvor stor er vekstraten når bestanden ikke beskattes?

b) Hvor stor del av bestanden skal skytes for å holde bestanden på konstant nivå?

Løsning: Vi setter bestandsstørrelsen ved starten av tiårsperioden til x_0. Etter $t = 10$ år er bestanden blitt

$$x(10) = 2x_0 .$$

Settes dette inn i likningen fra forrige eksempel, får vi

$$2x_0 = x_0 e^{k \cdot 10} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = e^{10k} \quad \Leftrightarrow \quad \ln 2 = 10k \quad \Leftrightarrow \quad k = \underline{\underline{\frac{\ln 2}{10}}} \approx \underline{\underline{0.069}} .$$

Den momentane vekstraten er altså på ca. 6.9%.

Når vi skyter en andel *c* av bestanden, blir det skutt $c \cdot x$ dyr. Vekstraten blir da

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x - c \cdot x.$$

For å holde bestanden konstant, må vi ha at

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Dette gir at

$$0 = k \cdot x - c \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad c = k \approx \underline{\underline{0.069}}.$$

Vi må altså skyte ca. 6.9% av bestanden hvert år for å holde den konstant.

I det lange løp vil den enkle vekstmodellen ovenfor med konstant vekstrate bli urealistisk fordi den fører til at *x* går mot uendelig. Vi må derfor modifisere denne vekstmodellen. En mye brukt vekstmodell er denne:

> En størrelse *x* som følger differensiallikningen
> $$\frac{dx}{dt} = k \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{A}\right)$$
> der *k* og *A* er konstanter, sies å ha ***logistisk vekst***.

For å se hva denne modellen innebærer, kan vi starte med å sette inn $x = A$ i modellen. Da blir $1 - \frac{x}{A} = 0$, slik at vekstraten blir lik null. Dette medfører at *x* holdes konstant. Altså:

Konstanten *A* i den logistiske vekstmodellen representerer et stabilt nivå for *x*.

Men vi kan gjøre flere observasjoner:

- Når $x << A$ (symbolet << betyr "mye mindre enn") blir $1 - \frac{x}{A} \approx 1$. Da er vi tilbake til vekstmodellen med konstant vekstrate, $\frac{dx}{dt} = k \cdot x$.
- Så lenge $x < A$ blir $1 - \frac{x}{A}$ et positivt tall. Da er vekstraten positiv slik at *x* vokser.
- Dersom $x > A$ blir $1 - \frac{x}{A}$ et negativt tall. Da er vekstraten negativ slik at *x* avtar.

Disse observasjonene tyder på at uansett startverdi vil *x* gå mot *A*, som da representerer et stabilt nivå. La oss se om løsningen av den tilhørende differensiallikningen bekrefter dette.

Eksempel 1.3: Anta at en dyrebestand har logistisk vekst. Kall størrelsen av bestanden *N* og det stabile nivået *A*. Undersøk hvordan bestanden utvikler seg i disse to tilfellene:

a) $N(0) = \frac{A}{2}$ (start-bestanden er halvparten av det stabile nivået).

b) $N(0) = 2A$ (start-bestanden er dobbelt så stor som det stabile nivået).

Skisser grafene til $N(t)$ i begge tilfellene, med $k = 0.10$.

Løsning: Likningen som beskriver bestandsutviklingen er altså

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot \left(1 - \frac{N}{A}\right) N .$$

Dette er en separabel likning. Vi ordner og integrerer:

$$\int \frac{dN}{\left(1-\frac{N}{A}\right)N} = \int k \cdot dt .$$

Integralet på venstre side av likhetstegnet løses med omformingen og delbrøkoppspaltingen

$$\frac{1}{\left(1-\frac{N}{A}\right)N} = \frac{1}{\left(1-\frac{N}{A}\right)N} \cdot \frac{A}{A} = \frac{A}{(A-N)N} = \frac{1}{N} + \frac{1}{A-N}$$

(detaljer er utelatt). Vi integrerer på venstre side av likhetstegnet, og får:

$$\int \frac{dN}{\left(1-\frac{N}{A}\right)N} = \int \frac{1}{N} dN + \int \frac{1}{A-N} dN$$

Det første integralet er greit:

$$\int \frac{1}{N} dN = \ln N .$$

Integrasjonskonstanten kommer senere. Absoluttverditegn er unødvendig fordi $N > 0$.
For å løse det andre integralet, substituerer jeg

$$u = A - N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dN} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad dN = -du$$

Da blir

$$\int \frac{1}{A-N} dN = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| = -\ln|A-N|$$

Samler trådene, og integrerer også høyre side av likhetstegnet:

$$\int \frac{dN}{\left(1-\frac{N}{A}\right)N} = \int \frac{1}{N} dN + \int \frac{1}{A-N} dN = \ln|N| - \ln|A-N| = k \cdot t + C_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{N}{A-N}\right| = k \cdot t + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\left|\frac{N}{A-N}\right|} = e^{k \cdot t + C_1} = e^{k \cdot t} \cdot e^{C_1} = \underline{C e^{k \cdot t}}$$

Så lenge vi ikke vet fortegnet til $A - N$ må vi beholde absoluttverditegnet. Men nå kan vi sløyfe absoluttverditegnet og la konstanten *C* får samme fortegn som brøken $\dfrac{N}{A-N}$.

Løsningen blir altså

$$\frac{N}{A-N} = Ce^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad N = (A-N)Ce^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad N = ACe^{kt} - NCe^{kt} .$$

Samler alle leddene med *N* på venstre side:

$$N + NCe^{kt} = ACe^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad N\left(1 + Ce^{kt}\right) = ACe^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad N = \underline{\frac{ACe^{kt}}{1+Ce^{kt}}} .$$

Dette kan omformes til en gunstigere form ved å multiplisere teller og nevner med e^{-kt} og dele teller og nevner med *C*. Da får vi

$$N(t) = \underline{\frac{A}{\frac{1}{C}e^{-kt}+1}}.$$

Av dette uttrykket ser vi at når $t \to \infty$ vil $e^{-kt} \to 0$, slik at $N \to A$. Dette stemmer med at A skal være det stabile nivået.

Nå ser vi på de to tilfellene:

a) $N(0) = \frac{A}{2}$. Setter inn i løsningen, og får:

$$N(0) = \frac{A}{2} = \frac{A}{\frac{1}{C}e^{0}+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{C}+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{C}+1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{C} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C=1}$$

Løsningen blir da

$$N(t) = \frac{A}{\frac{1}{1}e^{-kt}+1} = \underline{\underline{\frac{A}{1+e^{-kt}}}}$$

b) $N(0) = 2A$. Setter inn i løsningen, og får:

$$N(0) = 2A = \frac{A}{\frac{1}{C}e^{0}+1} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{1}{\frac{1}{C}+1} \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{1}{C}+1\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{C}+1 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C=-2}$$

Løsningen blir da

$$N(t) = \frac{A}{\frac{1}{-2}e^{-kt}+1} = \underline{\underline{\frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-kt}}}}$$

Grafen nedenfor viser utviklingen av $N(t)$ i de to tilfellene (med $A=1$ og $k=0.1$).

Vi ser hvordan $N(t) \to A$ når $t \to \infty$ i begge tilfellene.