## 6. Varmetransport.

**Bakgrunn:** Varmetransport er et stort og komplisert fagfelt. I dette lille notatet skal vi kun se på en liten flik av dette fagfeltet. Vi skal ta for oss et legeme som har temperatur *T*, mens omgivelsene rundt legemet har temperatur $T_o$. Eksperimenter viser at dersom legemet ikke tilføres energi på annen måte enn ved kontakt med omgivelsene, vil temperatur*endringen* $\Delta T$ i legemet være proporsjonal med temperaturforskjellen mellom legemet og omgivelsene, og proporsjonal med tiden. Vi skal la *T* (stor bokstav) stå for *temperatur*, mens *t* (liten bokstav) står for *tid*. Da får vi:

$$\Delta T = -k\left(T - T_o\right)\Delta t$$

Proporsjonalitetsfaktoren *k* avhenger av legemets størrelse og varmekapasitet, og av størrelse og termiske egenskaper for grenseflaten mellom legemet og omgivelsene. Disse sammenhengene skal vi ikke komme inn på nå. Minustegnet skyldes at temperaturen i legemet *avtar* når $T > T_o$, mens temperaturen *øker* når $T < T_o$.

Vi skal videre anta at legemet har samme temperatur *T* over alt. I praksis er dette lite realistisk, fordi det alltid vil være en varmetransport inne i legemet, og en slik varmetransport krever en temperaturforskjell. Men dersom temperaturen endres langsomt, eller dersom vi har en væske eller gass med omrøring, kan vi bruke denne antakelsen.

Nå lar vi $\Delta t \to 0$. Da kan likningen ovenfor skrives på formen

$$dT = -k\left(T - T_o\right)dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_o\right).$$

Dette er den grunnleggende likningen for varmetransport. Vi rammer den derfor inn:

Dersom temperaturen i et legeme er *T*, og omgivelsestemperaturen er $T_0$, har vi at

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_o\right)$$

der *t* er tiden mens *k* er en konstant som avhenger av fysiske egenskaper ved legemet og omgivelsene.

I eksemplene nedenfor skal vi se på to anvendelser av denne likningen.

***Eksempel 6.1:*** En melkekartong har stått lenge i kjøleskapet, slik at temperaturen i melka er blitt $5.0^\circ\mathrm{C}$. Den tas ut av kjøleskapet, og settes i et rom der temperaturen er konstant lik $20^\circ\mathrm{C}$. Etter å ha stått i rommet i 30 minutter, er temperaturen i melka blitt $8.0^\circ\mathrm{C}$.

a) Finn temperaturen *T* i melka som funksjon av tiden *t*.
b) Hvor lang tid tar det før temperaturen i melka er steget til $17^\circ\mathrm{C}$?

*Løsning:* Starter med å løse differensiallikningen, og benytter da at omgivelsestemperaturen $T_o$ er konstant lik $20^\circ\mathrm{C}$. Får da:

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_o\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dT}{T - T_o} = -k\,dt$$

Dette integreres:

$$\int \frac{dT}{T-T_o} = \int -k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|T-T_o| = -k\cdot t + C_1$$

$$|T-T_o| = e^{-k\cdot t+C_1} = e^{-k\cdot t}\cdot e^{C_1} = Ce^{-k\cdot t}$$

der $C = e^{C_1}$. Nå må vi benytte de kjente opplysningene:

Når $t = 0$, er $T = 5^\circ\mathrm{C}$. Setter dette inn i løsningen (og ser bort fra benevninger), og får

$$|5-20| = Ce^{-k\cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad |-15| = C\cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 15}$$

Siden $T < T_o$, er

$$|T-T_o| = -(T-T_o) = -T+T_o = -T+20,$$

slik at

$$|T-T_o| = Ce^{-k\cdot t} \quad \Leftrightarrow \quad -T+20 = 15e^{-k\cdot t} \quad \Leftrightarrow \quad T = \underline{20-15e^{-k\cdot t}}.$$

Nå gjenstår det å finne *k*. Vi bruker *minutt* som tidsenhet, og benytter at

$$T(30) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 8 = 20-15e^{-k\cdot 30} \quad \Leftrightarrow \quad 15e^{-k\cdot 30} = 12 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-k\cdot 30} = \tfrac{12}{15} = \tfrac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad -30k = \ln\left(\tfrac{4}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad k = -\tfrac{1}{30}(\ln 4 - \ln 5) = \tfrac{1}{30}(\ln 5 - \ln 4) = \underline{\tfrac{1}{30}\ln\left(\tfrac{5}{4}\right)}$$

Da blir

$$T(t) = 20-15e^{-k\cdot t} = 20-15e^{-\left(\frac{1}{30}\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right)t} = 20-15\left(e^{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}\right)^{-\frac{1}{30}t}$$

$$= 20-15\cdot\left(\tfrac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{30}t} = \underline{\underline{20-15\cdot\left(\tfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{30}t}}}$$

Når temperaturen er steget til $17^\circ\mathrm{C}$, har vi at

$$T(t) = 17 = 20-15\cdot\left(\tfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{30}t} \quad \Leftrightarrow \quad 15\cdot\left(\tfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{30}t} = 20-17 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{30}t} = \tfrac{3}{15} = \tfrac{1}{5}.$$

Tar logaritmen på begge sider:

$$\tfrac{1}{30}t\cdot\ln\left(\tfrac{4}{5}\right) = \ln\left(\tfrac{1}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad t = 30\frac{\ln 1 - \ln 5}{\ln 4 - \ln 5} = 30\frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 4} \approx \underline{\underline{216}}.$$

Det vil altså ta 216 minutter, eller 3 timer og 36 minutter, fra kartongen tas ut av kjøleskapet og til temperaturen er blitt $17^\circ\mathrm{C}$.

***Eksempel 6.2:*** Vi skal anta at temperaturen i løpet av et vinterdøgn varierer sinusformet fra $-5^\circ\mathrm{C}$ om natten til $5^\circ\mathrm{C}$ om dagen. Dersom vi lar start-tidspunktet være det tidspunktet der temperaturen passerer $0^\circ\mathrm{C}$ på vei opp, kan temperaturen gis ved formelen

$$T_o(t) = 5\sin\left(\frac{2\pi t}{24}\right) = 5\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right).$$

Finn hvordan temperaturen inne i ei hytte varierer med tiden når vi antar at start-temperaturen inne i hytta er $0^\circ\mathrm{C}$.

*Løsning*: Vi tar igjen utgangspunkt i likningen

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-T_o).$$

Setter inn at

$$T_o(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

og får

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - 5\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dT}{dt} + k \cdot t = 5k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

Dette er en lineær differensiallikning som løses etter standard oppskrift:

$$F(t) = \int k\,dt = k \cdot t$$

$$T(t) = e^{-kt}\left(\int 5k\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)e^{kt}dt + C\right)$$

$$= e^{-kt}\left(5k\left(\frac{k}{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \frac{\frac{\pi}{12}}{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right)e^{kt} + C\right)$$

$$\underline{= \frac{5k}{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\left(k\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right) + Ce^{-kt}}$$

Her er integralet løst med dataverktøy.

Finner $C$:

$$T(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5k}{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\left(k\sin(0) - \frac{\pi}{12}\cos(0)\right) + Ce^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5k}{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\left(-\frac{\pi}{12}\right) + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = \frac{5k \cdot \frac{\pi}{12}}{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}}$$

Altså blir

$$T(t) = \frac{5k}{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\left(k\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right) + \frac{5k \cdot \frac{\pi}{12}}{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}e^{-kt}$$

$$\underline{\underline{= \frac{5k}{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\left(k\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + \frac{\pi}{12}e^{-kt}\right)}}$$

Dette fryktinngytende uttrykket blir kanskje lettere å forstå dersom vi starter med å merke oss at leddet $\frac{1}{12}\pi e^{-kt}$ inne i parentesen går mot null når $t$ blir stor. Etter en tid er det derfor de to andre leddene som vil dominere. Disse leddene blir lettere å tolke dersom vi innser at

$$k\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = \sqrt{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t + \varphi\right)$$

der

$$\tan\varphi = -\frac{\frac{\pi}{12}}{k}$$

(kontroller selv ved å benytte at $\sin\left(\frac{\pi}{12}t + \varphi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)\cos\varphi + \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\sin\varphi$).

Dermed kan løsningen skrives på formen

$$T(t)=\frac{5k}{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\left(\sqrt{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\varphi\right)+\frac{\pi}{12}e^{-kt}\right)$$

$$=\underline{\underline{\frac{5k}{\sqrt{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\varphi\right)+\frac{5k}{k^2+\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}\cdot\frac{\pi}{12}e^{-kt}}}$$

Det første leddet blir en sinus-funksjon som er tidsforskjøvet i forhold til ute-temperaturen, mens det siste leddet skyldes start-temperaturen og forsvinner etter hvert.

For å få mer kjøtt og blod på denne løsningen, må vi anslå en fornuftig verdi av $k$. Da benytter vi at leddet $\frac{1}{12}\pi e^{-kt}$ kommer fra start-temperaturen i hytta. Dersom vi antar at dette bidraget er neglisjerbart etter ca. ett døgn, kan vi sette

$$e^{-k\cdot 24}\approx e^{-2} \quad\Leftrightarrow\quad -24k\approx -2 \quad\Leftrightarrow\quad k\approx\tfrac{1}{12}.$$

Med denne verdien av $k$ blir

$$\tan\varphi=-\frac{\frac{\pi}{12}}{k}=-\frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{1}{12}}=-\pi \quad\Leftrightarrow\quad \varphi=-1.26\,\text{rad}\approx -72^\circ.$$

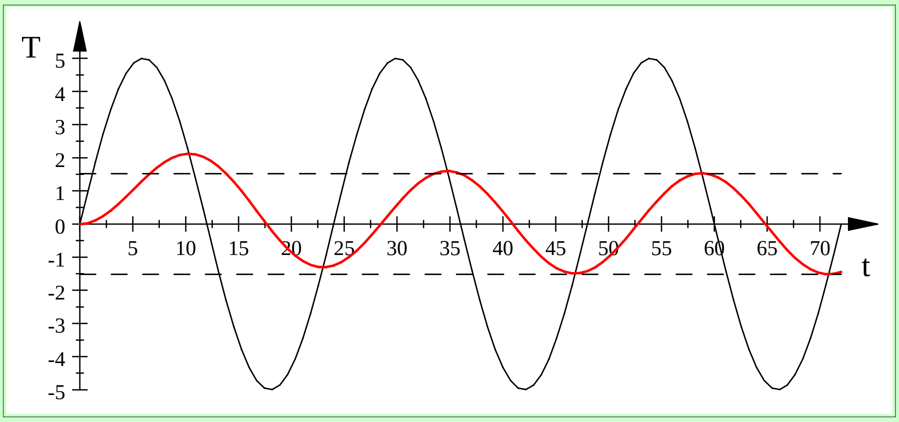
Videre blir

$$k^2+\left(\tfrac{\pi}{12}\right)^2=\left(\tfrac{1}{12}\right)^2+\left(\tfrac{\pi}{12}\right)^2\approx 0.0755$$

slik at

$$T(t)=\frac{5\cdot\frac{1}{12}}{\sqrt{0.0755}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}t-1.26\right)+\frac{5\cdot\frac{1}{12}}{0.0755}\cdot\frac{\pi}{12}e^{-\frac{1}{12}t}$$

$$\approx\underline{\underline{1.52\sin\left(\frac{\pi}{12}t-1.26\right)+1.44e^{-\frac{1}{12}t}}}$$




En grafisk framstilling av temperaturen $T$ som funksjon av tiden $t$ for de første 3 døgnene er vist ovenfor. Der er også utetemperaturen tegnet inn sammen med de rette linjene $T=\pm 1.52$. Vi ser hvordan temperaturen i hytta svinger mellom $-1.52^\circ\text{C}$ og $1.52^\circ\text{C}$ etter at start-bidraget er borte. Videre ser vi at temperaturen inne i hytta vil øke så lenge det er varmere utenfor enn inne i hytta, og at temperaturen inne i hytta avtar når det blir kaldere utenfor enn inne i hytta. Det virker jo rimelig, og antyder at vår løsning er korrekt.