2. Separable differensiallikninger.

Vi skal nå lære oss en systematisk løsningsteknikk for en bestemt type differensiallikninger, nemlig de **separable differensiallikningene**.

En differensiallikning er **separabel**

$\Updownarrow$ def.

Likningen kan omformes til $f(y) \cdot y' = g(x)$

Poenget med denne skrivemåten er at venstre side kun er en funksjon av *y*, multiplisert med y', og at høyre side kun er en funksjon av *x*. Vi har altså *separert* de to variablene *x* og *y*.

Den **separable differensiallikningen**

$$f(y) \cdot y' = g(x)$$

løses på denne måten:

1. Sett $y' = \dfrac{dy}{dx}$ slik at likningen blir

$$f(y)\,\frac{dy}{dx} = g(x)$$

2. Multipliser med *dx* slik at likningen blir

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx$$

3. Integrer begge sider:

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx\,.$$

4. Finn (om mulig) *y* som funksjon av *x*.

Teknikken illustreres med et par eksempler:

Eksempel 2.1: Løs differensiallikningen

$$y' = \frac{x^2}{y}\,.$$

Løsning: Vi starter med å *separere* likningen. Vi multipliserer da med *y* på begge sider av likhetstegnet:

$$y \cdot y' = x^2$$

Så erstatter vi y' med $\frac{dy}{dx}$, og multipliserer med *dx*:

$$y\frac{dy}{dx} = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y\,dy = x^2\,dx\,.$$

Neste trinn er å integrere begge sider:

$$\int y\,dy = \int x^2 dx$$

som gir

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C$$

der *C* er en felles integrasjonskonstant for begge integralene.
Så multipliserer vi med 2 og trekker kvadratrota:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 2C}\,.$$

Men siden *C* er en vilkårlig konstant, er også $2C$ en vilkårlig konstant. Vi skriver derfor *C* istedenfor $2C$, slik at løsningen blir

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + C}}}\,.$$

Eksempel 2.2a: Løs differensiallikningen $y' = x \cdot y\,.$

Løsning: Vi starter med å *separere* likningen. Vi deler da med *y* på begge sider av likhetstegnet:

$$\frac{1}{y}y' = x$$

Så erstatter vi y' med $\frac{dy}{dx}$, og multipliserer med *dx*:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}dy = x\,dx\,.$$

Neste trinn er å integrere begge sider:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int x\,dx$$

som gir

$$\ln|y| = \tfrac{1}{2}x^2 + C$$

der *C* er en felles integrasjonskonstant for begge integralene. Dette omformes ved hjelp av regneregler for logaritmer:

$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^C = \underline{C_1 e^{\frac{1}{2}x^2}}\,.$$

Her har vi benyttet at når *C* er en konstant, må også e^C være en konstant som vi kaller C_1.
I praksis kan vi tilpasse C_1 slik at *y* får riktig fortegn. Vi sløyfer derfor absoluttverditegnene, og sløyfer også indeksen $_1$ på konstanten. Da blir løsningen

$$\underline{\underline{y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}}}\,.$$

Nå bør du prøve deg på noen enkle oppgaver før du går løs på litt vanskeligere oppgaver.

Hittil har vi kun funnet den generelle løsningen til differensiallikningene. Nå skal vi se på noen initialverdiproblem der vi skal bruke en startbetingelse til å finne den konstanten som inngår i den generelle løsningen.

Eksempel 2.2b: Løs differensiallikningen $y' = x \cdot y$, $y(0) = 2$.

Løsning: Fra eksemplet ovenfor har vi at $y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$. Benytter at $y = 2$ når $x = 0$, og får:

$$2 = Ce^0 = C \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 2}.$$

Da blir løsningen $y = \underline{\underline{2e^{\frac{1}{2}x^2}}}$.

Vi kunne også funnet konstanten *C* på et tidligere tidspunkt. Vi går inn i løsningen fra Eksempel 2.2a når vi har funnet at

$$\ln|y| = \tfrac{1}{2}x^2 + C.$$

Benytter at $y = 2$ når $x = 0$, og får

$$\ln 2 = \tfrac{1}{2} \cdot 0^2 + C \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = \ln 2}.$$

Da blir

$$\ln y = \tfrac{1}{2}x^2 + \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln y - \ln 2 = \tfrac{1}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\tfrac{y}{2}\right) = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{y}{2} = e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 2e^{\frac{1}{2}x^2}}}$$

Vi kan sløyfe absoluttverditegnet fordi vi vet fra startbetingelsen at *y* er positiv når $x = 0$.

Løs oppgave 2.2.

Dersom vi kjenner en startbetingelse, kan vi finne konstanten *C* ved innsetting slik vi har sett før. Men vi kan også bruke en annen teknikk, slik neste eksempel viser:

Eksempel 2.3: Løs differensiallikningen $y \cdot y' = \sin x$, $y(0) = 0$.

Løsning: Vi setter $y' = \dfrac{dy}{dx}$, multipliserer med *dx* og integrerer:

$$\int y\,dy = \int \sin x\,dx$$

som gir

$$\tfrac{1}{2}y^2 = -\cos x + C.$$

Allerede nå kan vi finne *C* ved å benytte at $y = 0$ når $x = 0$. Men vi følger vanlig prosedyre og finner først *y* som funksjon av *x*. Vi multipliserer da med 2 på begge sider av likhetstegnet, trekker kvadratrota og innfører en ny konstant. Dette gir

$$\underline{y = \pm\sqrt{C - 2\cos x}}.$$

Så benyttes startbetingelsen for å finne *C*:

$$y(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{C - 2\cos 0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2\cos 0 = \underline{2}.$$

Løsningen blir altså

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{2 - 2\cos x}}}\,.$$

Så var det den andre metoden. Da setter vi inn startbetingelsen som *nedre grense* for integralet, mens vi lar et vilkårlig punkt $(x,\ y)$ være *øvre grense*. Vi integrerer altså slik:

$$\int_0^y y\,dy = \int_0^x \sin x\,dx$$

som ved integrasjon og innsetting av grenser gir

$$\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^y = \left[-\cos x\right]_0^x \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}y^2 - 0 = -\cos x + \cos 0 \quad\Leftrightarrow\quad y^2 = -2\cos x + 2\cdot 1$$

$$\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y = \pm\sqrt{2 - 2\cos x}}}\,.$$

Skal vi være formelle, har vi gjort et par stygge feil ovenfor: Vi har brukt samme symbol for integrasjonsvariabelen som for en grense. Det er mer korrekt å midlertidig erstatte integrasjonsvariablene *x* og *y* med for eksempel *u* og *v*, mens grensene er *x* og *y*. Da får vi:

$$\int_0^y u\,du = \int_0^x \sin v\,dv$$

som gir

$$\left[\tfrac{1}{2}u^2\right]_0^y = \left[-\cos v\right]_0^x \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 0^2 = -\cos x + \cos 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y = \pm\sqrt{2 - 2\cos x}}}\,.$$

Løs oppgave 2.3.

Fortsett med lineære 1. ordens differensiallikninger.