5. Retningsfelt.

Enhver 1.ordens differensiallikning kan skrives på formen

$$y' = f(x,y).$$

Du husker sikkert at y' angir stigningstallet til tangenten til funksjonsgrafen. Dette betyr at dersom vi beregner $y' = f(x,y)$ i mange punkter (x, y) og tegner korte linjer med det beregnede stigningstallet i hvert punkt, kan vi få et grafisk bilde av hvordan løsningen av differensiallikningen blir. Et slikt grafisk bilde kaller vi et ***retningsfelt*** (engelsk: *slope field*).

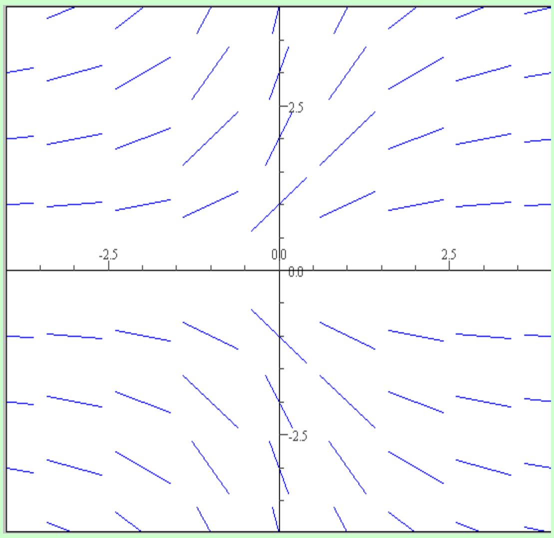
Eksempel 5.1: Lag et retningsfelt for

$$y' = \frac{y}{x^2+1}.$$

Løsning: For å tegne et slikt retningsfelt, må vi beregne y' for mange kombinasjoner av *x* og *y*. Et lite utsnitt av en slik tabell kan se slik ut:

Punkt:	$x=-2$	$x=-1$	$x=0$	$x=1$	$x=2$
$y=2$	$y'=\frac{2}{5}$	$y'=1$	$y'=2$	$y'=1$	$y'=\frac{2}{5}$
$y=1$	$y'=\frac{1}{5}$	$y'=\frac{1}{2}$	$y'=1$	$y'=\frac{1}{2}$	$y'=\frac{1}{5}$
$y=0$	0	0	0	0	0
$y=-1$	$y'=-\frac{1}{5}$	$y'=-\frac{1}{2}$	$y'=-1$	$y'=-\frac{1}{2}$	$y'=-\frac{1}{5}$
$y=-2$	$y'=-\frac{2}{5}$	$y'=-1$	$y'=-2$	$y'=-1$	$y'=-\frac{2}{5}$

Vi tegner inn korte linjer med stigningstallene i disse punktene (pluss mange andre), og får et retningsfelt omtrent som vist nedenfor:



Dersom vi kjenner startverdier for *x* og *y*, kan vi benytte slike retningsfelt til å tegne tilnærmede grafer av den funksjonen som er løsningen av differensiallikningen med den aktuelle start-tilstanden. Dette er gjort i eksemplet nedenfor.

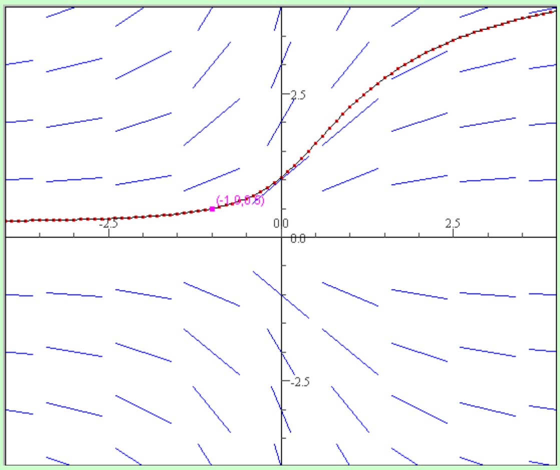
Eksempel 5.2:

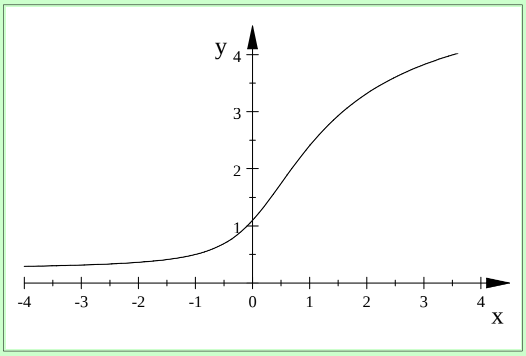
a) Bruk retningsfeltet i eksemplet ovenfor til å tegne en tilnærmet graf av løsningen av differensiallikningen når start-tilstanden er $x_0 = -1$, $y_0 = 0.5$.

b) Finn en eksakt løsning av differensiallikningen, og tegn grafen.

Løsning:

a) En graf tegnet på grunnlag av retningsfeltet kan se ut som grafen nedenfor til venstre:





b) Den gitte differensiallikningen er separabel:

$$y' = \frac{y}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\ln|y| = \arctan x + C}\,.$$

Finner konstanten C:

$$C = \ln|0.5| - \arctan(-1) = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) - \left(-\tfrac{\pi}{4}\right) = \underline{\tfrac{\pi}{4} - \ln 2}\,.$$

Setter inn konstanten:

$$\ln y = \arctan x + \tfrac{\pi}{4} - \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln y + \ln 2 = \arctan x + \tfrac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 2y = e^{\arctan x + \frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = \tfrac{1}{2} e^{\arctan x + \frac{\pi}{4}}}}$$

Grafen til denne funksjonen er tegnet ovenfor til høyre. Du ser vel likheten mellom de to grafene?

Det fins mange forskjellige "Slope Field"-programmer på Internett til fri avbenyttelse. Figurene ovenfor er laget med en slik fri Java applet. Her er en annen slik retningsfelt-plotter.

Hittil har jeg ikke sagt noe om hvordan vi går fram for å tegne løsningsgrafen. Det enkleste er jo å tegne på frihand med utgangspunkt i retningsfeltet. Men vi kan gjøre det mye bedre! Av figuren over kan du (kanskje) se at grafen er trukket gjennom mange punkter, som åpenbart må være beregnet. Teknikken med å lage slike tilnærmede grafiske løsninger av en differensiallikning med kjent start-tilstand kalles *numerisk løsning* av differensiallikningen. Det fins mange mer eller mindre nøyaktige metoder for slike numeriske løsninger. Du finner en kort innføring i den enkleste metoden, *Eulers metode*, i et eget lite notat.