

2. Radioaktiv nedbrytning.

Bakgrunn: Anta at vi ved et tidspunkt t har $N(t)$ ustabile atomkjerner. At kjernen er *ustabil*, innebærer at den kan sende ut en α -partikkel, en β -partikkel eller γ -stråling. Dermed vil kjernen gå over i en annen (ofte stabil) tilstand. Denne prosessen kalles *radioaktiv nedbrytning* eller *desintegrasjon*.

All erfaring tyder på at antall kjerner ΔN som nedbrytes i løpet av et kort tidsintervall Δt , er proporsjonal med antall ustabile kjerner $N(t)$, og proporsjonal med lengden av tidsintervallet Δt dersom dette er tilstrekkelig lite. Matematisk formulert:

$$\Delta N = -k \cdot N(t) \cdot \Delta t$$

der k er en proporsjonalitetskonstant. Merk minustegnet, som viser at antall ustabile kjerner *avtar*. Dette kan omformes til

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -k \cdot N(t)$$

Så lar vi $\Delta t \rightarrow 0$. Da får vi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{dt} = -k \cdot N(t) \quad (2.1)$$

som er den fundamentale likningen for radioaktiv nedbrytning. Dette rammer vi inn:

Dersom vi har N ustabile atomkjerner, har vi at

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N$$

der k er en konstant mens t er tiden.

Eksempel 2.1: Løs differensiallikningen (2.1).

Løsning: Dette er en separabel likning (den kan også oppfattes som lineær, men det gir mer kompliserte regninger). Vi omformer da likningen slik:

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N(t) \Leftrightarrow \frac{dN}{N} = -k \cdot dt$$

Så integrerer vi begge sider:

$$\int \frac{dN}{N} = \int -k \cdot dt \Leftrightarrow \ln N = -k \cdot t + C_1 \\ \Leftrightarrow N(t) = e^{-k \cdot t + C_1} = e^{-k \cdot t} \cdot e^{C_1} = e^{-k \cdot t} \cdot C$$

der $C = e^{C_1}$. For å finne C benytter vi at ved tidspunktet $t = 0$ starter vi med N_0 ustabile kjerner:

$$N_0 = e^{-k \cdot 0} \cdot C \Leftrightarrow \underline{C = N_0}.$$

Dette gir at

$$\underline{\underline{N(t) = N_0 e^{-k \cdot t}}}$$

Dette resultatet kan bearbejdes videre som neste eksempel viser.

Eksempel 2.2: Et radioaktivt grunnstoff har *halveringstid* T (d.v.s. at det tar en tid T før halvparten av de ustabile kjernene er desintegret). Finn en sammenheng mellom konstanten k i likning 2.1 og halveringstiden T .

Løsning: Fra eksempel 2.1 har vi sammenhengen

$$N(t) = N_0 e^{-k \cdot t}.$$

Når $t = T$ er $N(T) = \frac{1}{2} N_0$. Settes dette inn, får vi

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-k \cdot T} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-k \cdot T} \Leftrightarrow -k \cdot T = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

slik at

$$k \cdot T = \ln 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = \frac{\ln 2}{T}}}$$

Likningen for radioaktiv nedbryting kan altså skrives

$$N(t) = N_0 e^{-k \cdot t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = N_0 \left(e^{-\ln 2} \right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \left((e^{\ln 2})^{-1} \right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \left(2^{-1} \right)^{\frac{t}{T}} = \underline{\underline{N_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}}}.$$

Dette resultatet har stor praktisk betydning. Eksemplet nedenfor viser en anvendelse.

Eksempel 2.3: Alle levende organismer, planter så vel som dyr, inneholder karbonatomer. En viss andel av disse er den radioaktive isotopen ^{14}C . Man antar at denne andelen har holdt seg konstant i tusenvis av år. Når organismen dør, stopper opptaket av karbon. Andelen av ^{14}C avtar gradvis fordi disse atomene desintegrerer. C14-metoden for datering av dødt biologisk materiale går ut på å sammenlikne andelen av ^{14}C i det døde materialet med den mengden av ^{14}C som finnes i levende vev. En slik analyse av et trestykke viser at mengden av ^{14}C er redusert til 77% av tilsvarende mengde i levende trevirke. Hvor lang tid er gått siden treet døde når halveringstiden for ^{14}C er 5730 år?

Løsning: Fra eksempel 2.2 og de gitte opplysningene har vi

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow 0.77 N_0 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{5730}} \Leftrightarrow \ln(0.77) = \frac{t}{5730} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = 5730 \cdot \frac{\ln(0.77)}{\ln(0.5)} \approx \underline{\underline{2160}}$$

Det er altså gått 2160 år siden treet stoppet å oppta karbon fra lufta. Figuren nedenfor viser tidsforløpet.

