## *6. Numerisk løsing av differensiallikninger.*

Å løse en differensiallikning går som kjent ut på å finne en *funksjon* som passer inn i den gitte likningen. Når funksjonen er kjent, kan du tegne funksjonsgrafen.

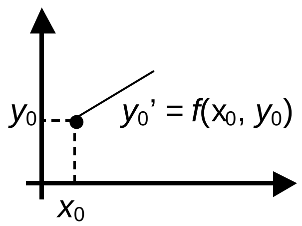
Noen ganger klarer vi ikke å løse differensiallikningen, d.v.s. at vi ikke klarer å finne noen funksjon som tilfredsstiller likningen med den gitte start-tilstanden. Men vi kan likevel lage en skisse av løsningsgrafen. Vi skal nå se på hvordan vi kan gå fram for å finne en slik *numerisk løsning* av problemet. Vi skal begrense oss til differensiallikninger av typen

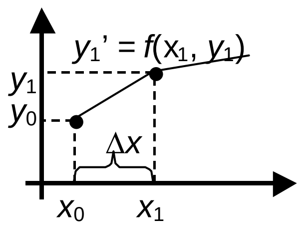
$$y' = f\left(x, y\right)$$

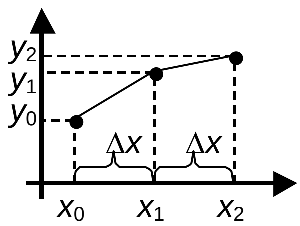
med kjent starttilstand

$$y\left(x_0\right) = y_0 .$$

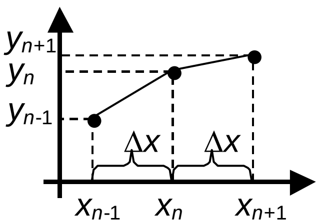
Før vi drukner i detaljer, skal jeg vise grunnprinsippet. Når vi kjenner startpunktet $\left(x_0, y_0\right)$, kan vi regne ut den deriverte $y_0' = f\left(x_0, y_0\right)$ i dette punktet. Denne deriverte angir retningen til grafen i dette punktet (mer presist: vi vet retningen til tangenten til grafen i dette punktet). Så antar vi at grafen er *rettlinjet* et kort stykke $\Delta x$ . Da kan vi regne oss fram til et nytt punkt $\left(x_1, y_1\right)$ langs den rette linja (langs tangenten til grafen) der $x_1 = x_0 + \Delta x$ . Så gjentar prosessen seg: I dette nye punktet regner vi ut $y_1' = f\left(x_1, y_1\right)$, finner en ny rett linje (tangent), og går til et nytt punkt $\left(x_2, y_2\right)$ . Og slik fortsetter vi. Prosessen er illustrert nedenfor.




Dersom grafen til den *eksakte* løsningen av differensiallikningen krummer lite innenfor intervallet $\Delta x$ , vil denne teknikken gi brukbar tilnærming. Og dersom grafen dels krummer oppover og dels nedover, vil feilene motvirke hverandre.




Nå er tiden inne til å se på detaljene. Figuren til venstre viser situasjonen når vi er kommet til et vilkårlig punkt $\left(x_n, y_n\right)$. Der er den deriverte tilnærmet

$$y_n'\left(x_n, y_n\right) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_{n+1} \approx y_n + y_n'\left(x_n, y_n\right) \cdot \Delta x$$

Her har vi laget oss en *rekursiv formel* (en slags differenslikning) som vi kan bruke for å regne oss fra punkt til punkt. Denne formelen kalles ***Eulers metode***.

Metoden egner seg utmerket for regneark, slik eksemplet nedenfor viser.

***Eksempel 6.1:*** Bruk Eulers metode til å finne en tilnærmet grafisk løsning av differensial-likningen

$$y' = y(1-y)x\,,\ y(0) = 0.1\,.$$

Bruk $\Delta x = 0.1$.

*Løsning*: Vi bruker et regneark der vi setter opp kolonner slik:

| | Δx = | 0,1000 | |
|---|---|---|---|
| *n* | *x* | y | y' = y(1-y)x |
| 0 | 0 | 0,1000 | 0,0000 |
| 1 | 0,1 | 0,1000 | 0,0090 |

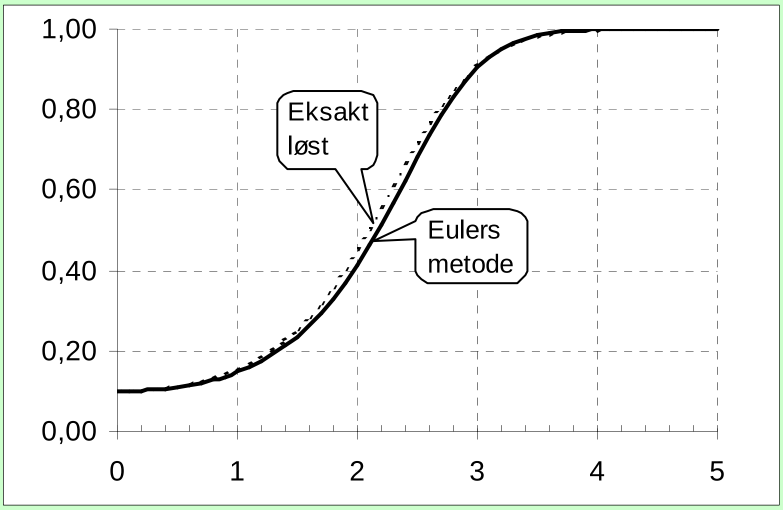
osv…

I kolonnen for *x* setter vi inn startverdien i første linje.
Deretter legger vi til $\Delta x$ en gang for hver linje.
I kolonnen for *y* setter vi inn startverdien i første linje.
Deretter regner vi ut $y_{n+1} \approx y_n + y_n'(x_n, y_n)\cdot\Delta x$,
der $y_n$’ hentes fra linja over.

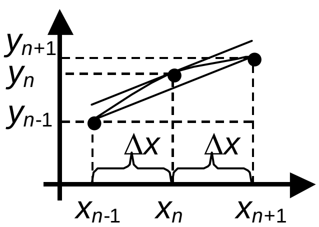
Differensiallikningen i eksemplet kan også løses eksakt. Løsningen blir

$$y = \frac{1}{1+9e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

(vis det!). Disse *y*-verdiene kan også legges inn i regnearket til kontroll. Resultatet blir:




Nøkkelen til suksess med en slik numerisk metode er at vi finner en god tilnærmelse for *y*’.
Det er etter hvert utviklet en mengde andre metoder som er mye bedre enn den opprinnelige Eulers metode. Vi kan for eksempel se på en *to-trinns Eulers metode*.




Figuren til venstre indikerer at stigningstallet til tangenten til grafen med meget god tilnærmelse kan settes lik

$$y_n' \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_{n+1} \approx y_{n-1} + y_n'(x_n, y_n)\cdot 2\Delta x$$

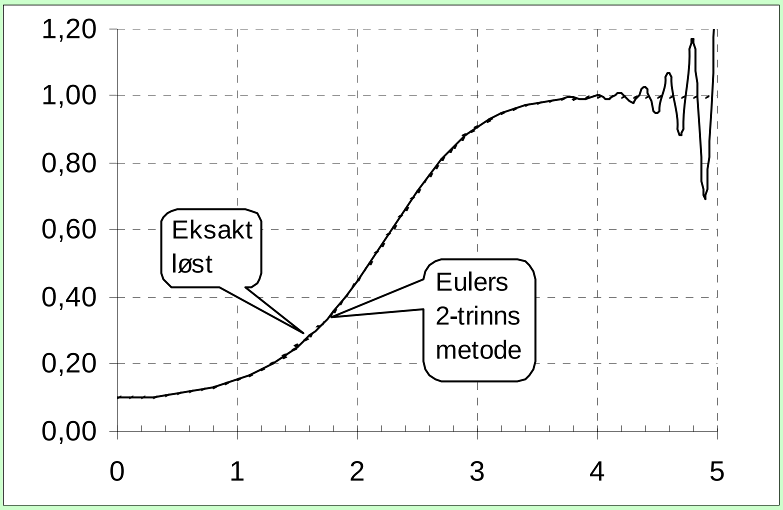
Når vi bruker denne formelen, må vi regne oss fra $(x_0, y_0)$ til $(x_1, y_1)$ med den opprinnelige Eulers formel. Deretter kan vi bruke formelen over til suksessivt å finne $y_2$, $y_3$ osv. Dette gjøres greit med regneark, slik neste eksempel viser.

***Eksempel 6.2*:** Bruk Eulers to-trinns-metode til å finne en tilnærmet grafisk løsning av differensiallikningen

$$y' = y(1-y)x, \; y(0) = 0.1.$$

Bruk $\Delta x = 0.1$.

*Løsning*: Vi bruker et regneark der vi setter opp kolonner på samme måte som i eksempel 2.1. Eneste forskjell er at fra og med $y_2$ bruker vi den reviderte formelen for Eulers 2-trinns metode. Resultatet er vist grafisk nedenfor:




Du ser at den numeriske løsningen er så å si identisk med den eksakte løsningen – helt til ca. $x = 4$. Da inntreffer et lite jordskjelv. Løsningen blir *ustabil*. Dette er et fenomen som kan inntreffe med numeriske løsninger. Fenomenet kan dels skyldes avrundings-unøyaktigheter, dels at vi opererer med *tilnærmede* (ikke eksakte) løsninger. Noen løsningsmetoder er svært følsomme for slike ustabiliteter, mens andre er mer robust. Dette fører til at metoder som tilsynelatende ser tiltalende ut, ved nærmere analyser må arkiveres i nærmeste papirkurv.

I dag brukes metoder som er atskillig mer robuste en Eulers metoder. Dessverre er de også mye mer arbeidskrevende. Den mest brukte er nok *Runge-Kuttas 4. ordens metode*. Dette er egentlig en "familie" av metoder som i hovedtrekk går ut på at du finner en midlertidig *y*-verdi for $x = x_n + \frac{1}{2}\Delta x$, og beregner en verdi for $y'$ i dette punktet. På dette grunnlaget beregner du en *forbedret* verdi av $y'$, og bruker denne til å finne en ny midlertidig *y*-verdi for $x = x_n + \frac{1}{2}\Delta x$. Denne bruker du til å finne en ny, ytterligere forbedret verdi av $y'$. Slik fortsetter du i 4 trinn.

Numerisk løsing av differensiallikninger omfatter mye mer enn det lille vi har fått med i dette notatet. For eksempel må vi utvikle tilnærmede uttrykk for høyere ordens deriverte. Vi må også kunne løse sett av differensiallikninger numerisk. Men hvis du først forstår prinsippene slik de er framstilt her, har du et grunnlag for å forstå de mer avanserte metodene.