3. Massebalanse.

Bakgrunn: Anta at et volum ΔV (målt i m^3 eller liter) med masse Δm (målt i kg) av et stoff strømmer forbi et tverrsnitt av en ledning i løpet av en kort tid Δt.
Da har vi:

En *volumstrøm* $$q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

En *massestrøm* $$c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

Nå vet vi at massetettheten er

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho \cdot V \,.$$

Dersom vi har med væsker eller fast stoff å gjøre, kan vi anta at tettheten ρ er konstant. Da er

$$c = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad c = \rho \cdot q \,.$$

Dersom vi har en massestrøm c_{inn} (målt i kg/sekund) inn i en beholder, og en massestrøm c_{ut} (også målt i kg/sekund) ut av beholderen, får vi i løpet av en (kort) tid Δt en masse-endring Δm i beholderen som er gitt ved

$$\Delta m = (c_{\text{inn}} - c_{\text{ut}}) \cdot \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta m}{\Delta t} = c_{\text{inn}} - c_{\text{ut}} \,.$$

Så lar vi $\Delta t \to 0$, og får

$$\frac{dm}{dt} = c_{\text{inn}} - c_{\text{ut}} \tag{3.1}$$

der m er massen i beholderen.

Dersom tettheten ρ er konstant og V er volumet av stoffet i beholderen, kan likning 3.1 omformes til

$$c_{\text{inn}} - c_{\text{ut}} = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{c_{\text{inn}}}{\rho} - \frac{c_{\text{ut}}}{\rho} = q_{\text{inn}} - q_{\text{ut}} \,. \tag{3.2}$$

***Eksempel 3.1*:** En vannbeholder har konstant horisontalt tverrsnitt $F = 0.01\text{m}^2$. Det står $H = 1.00$ m vann i beholderen. Ved tidspunktet $t = 0$ trekker du ut en propp i bunnen av beholderen, og vannet begynner å strømme ut. Det er ingen innstrømming. Etter 40 sekunder er beholderen tom. Anta at utstrømmingen følger *Torricellis lov*:

$$q_{\text{ut}} = A \cdot \sqrt{y}$$

der A er en konstant (som bl.a. avhenger av størrelsen av åpningen) og y er høyden av vannet i beholderen.

a) Sett opp en differensiallikning for y, og løs denne for å finne y som funksjon av t.

b) Bestem A.

c) Hvor lang tid tok det før vann-vivået i beholderen under tømmingen var sunket til 0.25 m?

Løsning:

a) Når vannhøyden er *y*, er vann-volumet $V = F \cdot y$. Av 3.2 får vi at

$$\frac{dV}{dt} = q_{\text{inn}} - q_{\text{ut}} \quad \Leftrightarrow \quad F \cdot \frac{dy}{dt} = 0 - A \cdot \sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{dy}{dt} = -\frac{A}{F}\sqrt{y}}}\,.$$

Dette er en separabel differensiallikning, som løses på vanlig måte:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int \frac{A}{F}dt \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{y} = -\frac{A}{F}t + C\,.$$

Finner *C*:

$$y(0) = H \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{H} = -\frac{A}{F} \cdot 0 + C \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 2\sqrt{H}}\,.$$

Da blir

$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{H} - \frac{A}{F}t \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = \left(\sqrt{H} - \frac{A}{2F}t\right)^2}}\,.$$

Setter vi inn kjente data, får vi

$$\underline{\underline{y = \left(1 - \frac{A}{0.02}t\right)^2}}\,.$$

b) Vi vet at $y = 0$ når $t = 40$. Setter inn dette, og får

$$0 = \left(1 - \frac{A}{2 \cdot 0.01} \cdot 40\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{0.02}{40} = \underline{\underline{5.0 \cdot 10^{-4}}}\,.$$

Settes denne verdien inn i uttrykket for *y*, får vi

$$y = \left(1 - \frac{5.0 \cdot 10^{-4}}{0.02}t\right)^2 = \underline{\underline{(1 - 0.025t)^2}}$$

c) Når $y = 0.25$, får vi

$$0.25 = (1 - 0.025t)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{0.025} = 1 - 0.025t \quad \Leftrightarrow \quad 0.025t = 1 - 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = 20}}\,.$$

En annen aktuell problemstilling går ut på å studere konsentrasjonen av et eller annet stoff i en væske. La konsentrasjonen av stoffet i den væsken som strømmer inn i beholderen være *k* (målt i kg/m^3 væske). Når volumstrømmen av væske (med oppløst stoff) inn i beholderen er q_{inn}, blir massestrømmen av stoffet inn i beholderen

$$c_{\text{inn}} = k \cdot q_{\text{inn}}$$

(målt i $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$).

Konsentrasjonen i den utstrømmende væsken settes gjerne lik konsentrasjonen i væsken i beholderen. Dersom volumet av væsken i beholderen er *V* og massen av stoffet som er oppløst i væsken er *m*, blir massestrømmen ut av beholderen

$$c_{\text{ut}} = \frac{m}{V} \cdot q_{\text{ut}}$$

(fremdeles målt i $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$).

Settes dette inn i 3.1, får vi

$$\frac{dm}{dt} = k \cdot q_{\text{inn}} - \frac{m}{V} \cdot q_{\text{ut}} \tag{4.3.3}$$

***Eksempel 3.2*:** En vannbeholder inneholder $V = 100$ liter vann der det er oppløst $m_0 = 5.00\,\text{kg}$ salt. Beholderen er da helt full. Så tilfører vi 0.50 liter rent vann pr sekund. En tilsvarende mengde saltoppløsning renner da ut. Finn saltmengden *m* i beholderen som funksjon av tiden *t*.

Løsning: Vi bruker likning 3.3 med $k = 0$, $V = 100$ og $q_{\text{ut}} = q_{\text{inn}} = 0.50$. Vi får

$$\frac{dm}{dt} = 0 - \frac{m}{100} \cdot 0.50 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dm}{dt} = -0.005m, \qquad m(0) = 5.00.$$

Vi separerer likningen og løser den:

$$\frac{dm}{m} = -0.005dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dm}{m} = -0.005 \int dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln m = -0.005t + C_1$$

$$m = e^{-0.005t + C_1} = \underline{Ce^{-0.005t}}.$$

Finner *C* ved å benytte at $m = 5.00$ når $t = 0$:

$$5.00 = Ce^{-0.005 \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 5.00}.$$

Da blir

$$m(t) = \underline{\underline{5.00e^{-0.005t}}}.$$