3. Lineære første ordens differensiallikninger.

Den neste hovedtypen av første ordens differensiallikninger er de **lineære differensial-likningene**. De ser slik ut:

En differensiallikning som kan skrives på formen

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

kalles en **lineær første ordens differensiallikning**.

Merk at koeffisienten foran y' må være 1.

Slike differensiallikninger løses vanligvis med formel:

Den lineære første ordens differensiallikningen
$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$
løses slik:

1. Bestem først en hjelpefunksjon
$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

2. Løsningen av likningen er da
$$y(x) = e^{-F(x)}\left(\int g(x) \cdot e^{F(x)}dx + C\right)$$

Utledning

Merk at du ikke trenger å ta med integrasjonskonstant når du finner hjelpefunksjonen $F(x)$.

Eksempel 3.1: Løs differensiallikningen
$$y' + x \cdot y = 2x, \qquad y(0) = 1.$$

Løsning: Likningen er allerede på den riktige formen $y' + f(x) \cdot y = g(x)$.
Ser at $f(x) = x$ og at $g(x) = 2x$.
Finner først
$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int x\,dx = \underline{\tfrac{1}{2}x^2}.$$
Da blir

$$y(x) = e^{-F(x)}\left(\int g(x)\cdot e^{F(x)}dx + C\right) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\int 2x\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}dx + C\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(2\int x\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}dx + C\right) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(2e^{\frac{1}{2}x^2} + C\right) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2} + Ce^{-\frac{1}{2}x^2} = \underline{2 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

I praksis løses gjerne integralet med dataverktøy. Men dersom du løser det for hand, vil substitusjonen

$$u = \tfrac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

raskt føre fram.

Finner til slutt C ut fra startbetingelsen:

$$y(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + Ce^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = -1}.$$

Altså er løsningen

$$y(x) = \underline{\underline{2 - e^{-\frac{1}{2}x^2}}}.$$

Før du går videre, kan du prøve deg på et par enkle oppgaver.

Vi tar et eksempel til, som illustrerer at det er en fordel å kunne regnereglene for logaritmer:

Eksempel 3.2: Løs differensiallikningen

$$x\cdot y' - y = x^2, \qquad y(1) = 2.$$

Løsning: Vi må først dividere likningen med x for å få den over på standardformen

$$y' + f(x)\cdot y = g(x).$$

Får da:

$$y' - \frac{1}{x}y = x$$

Her ser vi at

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

og at

$$g(x) = x.$$

Vi starter som vanlig med å finne hjelpefunksjonen

$$F(x) = \int f(x)dx = \int -\frac{1}{x}dx = \underline{-\ln x}.$$

Da blir

$$y(x) = e^{-F(x)}\left(\int g(x)\cdot e^{F(x)}dx + C\right) = e^{-(-\ln x)}\left(\int x\cdot e^{-\ln x}dx + C\right).$$

Og så kommer nøkkel-operasjonene:

$$e^{\ln x} = x$$

slik at

$$e^{-\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Når dette settes inn, får vi:

$$y(x)=x\left(\int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx+C\right)=x\left(\int 1dx+C\right)=x(x+C)=\underline{x^2+Cx}.$$

Da gjenstår det bare å finne *C*:

$$y(1)=2 \quad\Leftrightarrow\quad 1^2+C\cdot 1=2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{C=1}.$$

Løsningen blir da

$$y(x)=\underline{\underline{x^2+x}}.$$

Løs oppgave 3.2.

Til slutt skal vi ta med et eksempel på en lineær 2. ordens differensiallikning som kan omformes til 1. ordens:

Eksempel 3.3: Løs differensiallikningen

$$y''-y'=x, \qquad y(0)=y'(0)=0.$$

Løsning: Nøkkelen her er at *y* mangler i differensiallikningen. Vi kan da innføre en ny variabel

$$z=y' \quad\Rightarrow\quad z'=y''.$$

Likningen kan nå omformes til

$$z'-z=x.$$

Dette er en lineær første ordens differensiallikning, som løses på vanlig måte:

$$F(x)=\int(-1)dx=\underline{-x}.$$

$$z(x)=e^{-(F(x))}\left(\int g(x)\cdot e^{F(x)}dx+C\right)=e^{-(-x)}\left(\int x\cdot e^{-x}dx+C\right)=e^{x}\left((-x-1)e^{-x}+C\right)$$

$$=(-x-1)e^{x-x}+Ce^{x}=\underline{Ce^{x}-x-1}$$

Integralet kan løses med delvis integrasjon.

Så må vi finne *y*. Vi tar da utgangspunkt i at $z=y'$ som gir

$$y'=z \quad\Leftrightarrow\quad y=\int z\,dx=\int\left(Ce^{x}-x-1\right)dx=\underline{Ce^{x}-\tfrac{1}{2}x^2-x+C_2}.$$

Legg merke til at vi får *to* integrasjonskonstanter. Heldigvis kjenner vi to startbetingelser, og kan da finne de to integrasjonskonstantene:

$$y'(0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad z(0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad Ce^{0}-0-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad C-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{C=1}.$$

$$y(0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1\cdot e^{0}-\frac{1}{2}\cdot 0^2-0+C_2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1+C_2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{C_2=-1}.$$

Altså blir løsningen av differensiallikningen:

$$y(x)=\underline{\underline{e^{x}-\tfrac{1}{2}x^2-x-1}}.$$

Løs oppgave 3.3.

Nå er det på tide å se på noen anvendelser.