Første ordens differensiallikninger.

1. Innledning.

Hva er en *første ordens differensiallikning*?

La *y* være en funksjon av en fri variabel *x*. En **første ordens differensiallikning** er en likning som inneholder $y' = \frac{dy}{dx}$,
og som vanligvis også inneholder *y* og/eller *x*.

På tilsvarende måte er en **andre ordens differensiallikning** en likning som inneholder y'', og som kan inneholde y', *y* og/eller *x*. Og slik kan vi fortsette opp til en *n*'te ordens differensial-likning.

Å **løse en differensiallikning** går ut på å finne *y* som funksjon av den fri variabelen *x*.

Det er slett ikke alle differensiallikninger som lar seg løse eksakt. Men det er utviklet teknikker for å løse noen typer differensiallikninger som forekommer ofte i praksis. Vi skal etter hvert se på noen av disse. Men først skal vi se på et par eksempler på differensial-likninger som lar seg løse uten bruk av spesielle teknikker.

Vi starter med et enkelt eksempel:

Eksempel 1.1a: Løs differensiallikningen

$$y' = 2x.$$

Løsning: Vi skal altså finne en funksjon $y = f(x)$ som er slik at $y' = 2x$. Vi finner *y* ved å integrere:

$$y = \int 2x\,dx = \underline{\underline{x^2 + C}}.$$

Løsningen vår inneholder en ukjent konstant *C*. En slik løsning kalles **en generell løsning** av differensiallikningen.

Dersom vi skal finne denne konstanten, må vi kjenne en *startverdi* for *y* slik som i neste eksempel.

Eksempel 1.1b: Løs differensiallikningen

$$y' = 2x \text{ når } y(0) = 1.$$

Løsning: Vi har allerede funnet at $y = x^2 + C$. For å finne *C*, setter vi inn at $y = 1$ når $x = 0$:

$$1 = 0^2 + C \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 1}.$$

Løsningen av problemet er altså

$$y = \underline{\underline{x^2 + 1}}.$$

Slike problem som består av en differensiallikning og en startbetingelse kalles ofte et **initialverdiproblem**. Den løsningen av differensiallikningen som tilfredsstiller startbetingelsen kalles gjerne en **spesiell løsning** av differensiallikningen.

Vi tar et eksempel til:

Eksempel 1.2: Løs differensiallikningen

$$y' = y \text{ når } y(0) = 2.$$

Løsning: Dette problemet kan vi ikke løse bare ved å integrere. Vi må bruke våre kunnskaper om derivasjon og integrasjon til å finne en funksjon $y = f(x)$ som er slik at $y' = y$. Og vi kjenner faktisk en slik funksjon. Hvis du deriverer $y = e^x$ får du $y' = e^x$. Altså passer funksjonen $y = e^x$ inn i den gitte differensiallikningen.

Men funksjonen $y = e^x$ er ikke slik at $y(0) = 2$. Og det hjelper heller ikke å legge til en konstant. Når du deriverer en funksjon $y = e^x + C$ får du ikke at $y' = y$ (med mindre $C = 0$). Vi må altså prøve noe annet. Løsningen består i å *multiplisere* e^x med en konstant. For du ser vel at når du deriverer $y = C \cdot e^x$ får du $y' = C \cdot e^x$, slik at $y' = y$?

Nå gjenstår det bare å finne *C*. Vi setter inn at $y = 2$ når $x = 0$, og får:

$$2 = C \cdot e^0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = C \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 2}.$$

Altså er løsningen på problemet:

$$\underline{\underline{y = 2e^x}}.$$

Du innser sikkert at den "prøve-og-feile"-teknikken som vi har brukt hittil, har sine klare begrensninger. Vi trenger mer systematiske teknikker for å løse differensiallikninger. Vi skal da også se på noen slike etter hvert. Men foreløpig kan du jo løse oppgave 1.1 med "prøving og feiling", før du går løs på de teknikkene som du kommer til å bruke i praksis.

Fortsett med:

- Separable differensiallikninger. Dette er den enkleste formen, og danner også bakgrunn for løsningsteknikken til de lineære differensiallikningene nedenfor.
- Lineære 1. ordens differensiallikninger. Dette er kanskje den vanligste formen. Løsningsteknikken baserer seg på en formel ("oppskrift") som du må beherske.
- Blandede oppgaver. Her har jeg samlet noen oppgaver (bl.a. tidligere eksamensoppgaver) som du kan bryne deg på.

- Noen anvendelser av differensiallikninger. Her har jeg samlet noen eksempler på praktisk bruk av differensiallikninger innen typiske ingeniør-emner.
- Andre typer differensiallikninger. Selv om du oftest kommer i kontakt med separable eller lineære differensiallikninger, fins det en mengde andre typer. Mange av dem lar seg ikke løse eksakt. Her omtales noen typer likninger som kan løses, bl.a. ved å omformes til lineær eller separabel.
- Retningsfelt. Viser hvordan du kan se hvordan løsningen av en differensiallikning vil se ut uten først å løse likningen.
- Numerisk løsning av differensiallikninger. Sier litt om hvordan du kan skaffe deg en grafisk løsning av differensiallikninger som ikke lar seg løse eksakt.