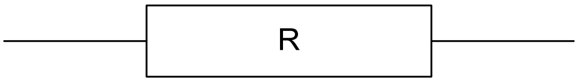
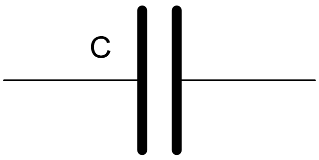
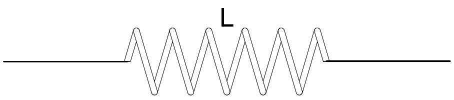
5. Elektrisitetslære.

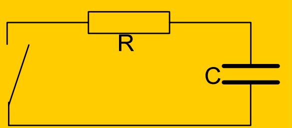
Bakgrunn: Elektriske kretser er i hovedsak bygd opp av motstander, kondensatorer og spoler, samt strøm- og spenningskilder. De viktigste lovene som gjelder for slike kretser er:

	Dersom det går en strøm *I* gjennom en motstand med resistens *R*, så er spenningen U_R over motstanden gitt ved $U_R = R \cdot I$.
	Dersom en kondensator med kapasitans *C* er koplet inn i en krets der strømmen er *I*, så er spenningen U_C over kondensatoren ved tidspunktet *t* gitt ved $U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau + U_C(0)$ der $U_C(0)$ er spenningen over kondensatoren ved $t = 0$.
	Dersom det går en strøm *I* gjennom en spole med induktans *L*, så er spenningen U_L over spolen gitt ved $U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$.

Dessuten gjelder *Kirchhoffs lover*:

1. Summen av alle strømmer inn mot et knutepunkt (regnet med fortegn) er lik null.
2. Summen av alle spenningsfall i en lukket krets (regnet med fortegn) er lik null.

***Eksempel 5.1*:** (Utladning av en kondensator).



En motstand og en kondensator er koplet sammen med en bryter slik figuren til venstre viser. Ved tidspunktet $t = 0$ slås bryteren på slik at kondensatoren og motstanden utgjør en lukket krets.

Idet kretsen lukkes, er spenningen over kondensatoren $U_C(0) = 5$.

Finn spenningen over kondensatoren som funksjon av tiden mens kondensatoren utlades gjennom motstanden.

Løsning: Når bryteren er lukket slik at vi har en lukket krets, gir Kirchhoffs spenningslov at

$$U_R + U_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R \cdot I + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau = 0 .$$

Nå er det vanlig å derivere denne likningen for å bli kvitt integralet. Vi får da

$$R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot I(t) = 0 .$$

Denne differensiallikningen løses enklest ved å oppfatte den som separabel (vi kan også oppfatte den som lineær):

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{R \cdot C}\,dt$$

Integrerer på begge sider, og får

$$\ln I = -\frac{1}{R\cdot C}t + K_1 \quad \Leftrightarrow \quad I(t) = e^{-\frac{1}{R\cdot C}t+K_1} = e^{K_1}\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}t} = \underline{Ke^{-\frac{1}{R\cdot C}t}}$$

der jeg kaller integrasjonskonstanten K_1 og setter $K = e^{K_1}$. For å finne *K*, benytter jeg at

$$R\cdot I(0) + U_C(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R\cdot Ke^0 + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{K_1 = -\frac{5}{R}}$$

slik at

$$\underline{I(t) = -\frac{5}{R}e^{-\frac{1}{R\cdot C}t}}$$

Spenningen over kondensatoren finnes nå enklest ved å benytte at

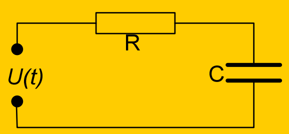
$$U_R(t) + U_C(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_C(t) = -U_R(t) = -R\cdot I(t) = -R\cdot\left(-\frac{5}{R}e^{-\frac{1}{R\cdot C}t}\right) = \underline{\underline{5e^{-\frac{1}{R\cdot C}t}}}.$$

Vi kunne også benyttet at

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau + U_C(0) = \frac{1}{C}\int_0^t -\frac{5}{R}e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot\tau}d\tau + 5 = \frac{-5}{R\cdot C}\cdot(-R\cdot C)\left[e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot\tau}\right]_0^t + 5$$

$$= 5\left(e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t} - 1\right) + 5 = \underline{\underline{5e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}}}$$

Eksempel 5.2: (Vekselspenning gjennom en kondensator).



En motstand og en kondensator er koplet sammen med en spenningskilde slik figuren til venstre viser. Her er $U(t)$ spenningen over en ytre spenningskilde.

Finn spenningen $U_C(t)$ over kondensatoren når $U(t) = \sin(\omega t)$, $U_C(0) = 0$.

Løsning: Vi starter som i forrige eksempel med å sette opp Kirchhoffs spenningslov:

$$U_C(t) + U_R(t) = U(t) \quad \Leftrightarrow \quad R\cdot I(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau + U_C(0) = \sin(\omega t)$$

Som i forrige eksempel deriverer vi likningen for å bli kvitt integralet, og får

$$R\cdot\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\cdot I(t) = \omega\cdot\cos(\omega t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dI}{dt} + \frac{1}{R\cdot C}I = \frac{\omega}{R}\cos(\omega t)$$

Dette er en lineær differensiallikning som løses etter standard oppskrift. Finner først

$$F(t) = \int \frac{1}{R\cdot C}dt = \frac{1}{R\cdot C}t\,.$$

Da blir

$$I(t) = e^{-F(t)}\left(\int g(t)\cdot e^{F(t)}dt + K\right) = e^{-\frac{1}{R\cdot C}t}\left(\int \frac{\omega}{R}\cos(\omega t)e^{\frac{1}{R\cdot C}t}dt + K\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{R\cdot C}t}\left(\frac{C\cdot\omega\cos(\omega t) + C^2\omega^2 R\sin(\omega t)}{C^2R^2\omega^2+1}e^{\frac{1}{R\cdot C}t} + K\right)$$

$$= \underline{\frac{C\cdot\omega\cos(\omega t) + C^2\omega^2 R\sin(\omega t)}{C^2R^2\omega^2+1} + Ke^{-\frac{1}{R\cdot C}t}}$$

Her er integrasjonen utført med dataverktøy. Finner *K*:

$$U(0) = R\cdot I(0) + U_C(0) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(0) = R\cdot\left(\frac{C\omega\cdot 1 + C^2\omega^2 R\cdot 0}{C^2R^2\omega^2+1} + Ke^0\right) + 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{K = -\frac{C\omega}{(RC\omega)^2+1}}$$

slik at strømmen i kretsen blir

$$I(t) = \frac{C\cdot\omega\cos(\omega t) + C^2\omega^2 R\sin(\omega t)}{C^2R^2\omega^2+1} - \frac{C\omega}{C^2R^2\omega^2+1}e^{-\frac{1}{R\cdot C}t}$$

$$= \underline{\frac{\omega C\cos(\omega t) + \omega^2 RC^2\sin(\omega t) - C\omega e^{-\frac{1}{R\cdot C}t}}{(RC\omega)^2+1}}$$

Spenningen over kondensatoren blir da

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau + U_C(0)$$

$$= \frac{1}{C}\int_0^t\left(\frac{\omega C\cos(\omega\tau) + \omega^2 RC^2\sin(\omega\tau) - C\omega e^{-\frac{1}{RC}\tau}}{(RC\omega)^2+1}\right)d\tau + 0$$

$$= \left[\frac{\sin(\omega\tau) - RC\omega\cos(\omega\tau) + RC\omega e^{-\frac{1}{RC}\tau}}{(RC\omega)^2+1}\right]_0^t$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sin(\omega t) + RC\omega\left(e^{-\frac{1}{RC}t} - \cos(\omega t)\right)}{(RC\omega)^2+1}}}$$