4. Rettlinjet bevegelse.

Bakgrunn: Anta at en partikkel som beveger seg langs en rett linje befinner seg i posisjon $x(t)$ ved tidspunktet *t*. Dersom partikkelen i løpet av et kort tidsrom Δt har flyttet seg en strekning Δx, er gjennomsnittsfarten på strekningen

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Den *momentane farten* ved tidspunktet *t* blir da

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \qquad (4.1)$$

På samme måte kan vi definere *akselerasjon*: Anta at farten øker med Δv i løpet av et kort tidsrom Δt. Gjennomsnittlig akselerasjon i dette tidsrommet blir da

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Den *momentane akselerasjonen* ved tidspunktet *t* blir da

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}. \qquad (4.2)$$

For å bestemme akselerasjonen *a* brukes gjerne Newtons 2. lov:

$$F = m \cdot a \qquad (4.3)$$

der *F* er summen av kreftene i bevegelsesretningen og *m* er partikkelens masse. Vanlig prosedyre er nå at Newtons 2. lov (4.3) settes inn i 4.2. Da får vi en differensiallikning som vi kan finne *v* av. Deretter brukes 4.1 til å sette opp en differensiallikning som vi kan finne *x* av.

***Eksempel 4.1*:** En fallskjermhopper med masse *m* og fart *v* påvirkes av to krefter:

Tyngdekraften $F_g = -m \cdot g$ der $g \approx 9.81 \text{m/s}^2$ er tyngdens akselerasjon.

Luftmotstand $F_R = -k \cdot v$ der *k* er en konstant som vesentlig avhenger av skjermens størrelse og konstruksjon.

Merk at positiv retning er oppover.

a) Anta at startfarten til hopperen er $v(0) = 0$. Sett opp og løs en differensiallikning som gir farten $v(t)$ til hopperen.

b) Hopperen starter i en høyde h_0 over bakken. Finn hopperens høyde $y(t)$.

c) Hva skjer med løsningen i a) når $t \to \infty$?

Løsning:

a) Av Newtons 2. lov (4.3) får vi

$$F = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad -k \cdot v - m \cdot g = m \cdot \frac{dv}{dt} \qquad (4.4)$$

Dette er en lineær første ordens differensiallikning som ordnes slik:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = -g.$$

Finner først

$$F(t) = \int \frac{k}{m} dt = \frac{k}{m} t$$

som videre gir

$$v(t)=e^{-F(t)}\left(\int g(t)\cdot e^{F(t)}dt+C\right)=e^{-\frac{k}{m}t}\left(\int -g\cdot e^{\frac{k}{m}t}dt+C\right)$$

$$=e^{-\frac{k}{m}t}\left(-g\cdot\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t}+C\right)=\underline{-\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}}$$

Finner C:

$$v(0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{mg}{k}+Ce^{0}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{C=\frac{mg}{k}}.$$

Da blir

$$v(t)=-\frac{mg}{k}+\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}=\underline{\underline{-\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)}}.$$

Siden $e^{-\frac{k}{m}t}$ alltid er mindre enn 1, blir v negativ. Dette stemmer med at vi har valgt positiv retning *oppover*, mens fallskjermhopperen faller *nedover*.

b) Av 4.1 får vi nå

$$v=\frac{dy}{dt} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)=\frac{dy}{dt}.$$

Dette er en separabel differensiallikning, som omformes til

$$dy=-\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt.$$

Integrerer:

$$y=\int -\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt=\underline{-\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}}+C.$$

Finner C:

$$y(0)=h_0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{mg}{k}\cdot 0-\frac{m^2g}{k^2}e^{0}+C=h_0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{C=h_0+\frac{m^2g}{k^2}}.$$

Dette gir

$$y(t)=-\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}+h_0+\frac{m^2g}{k^2}=\underline{\underline{h_0-\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)}}.$$

c) Når $t\to\infty$ vil $e^{-\frac{k}{m}t}\to 0$. I formelen for farten får vi

$$\lim_{t\to\infty}v(t)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right)=\underline{-\frac{mg}{k}}.$$

Farten blir altså konstant. Men ved denne farten er luftmotstanden

$$F_R=-k\cdot v=-k\left(-\frac{mg}{k}\right)=mg.$$

Vi ser altså at når $t\to\infty$, får vi en konstant fart som fører til at luftmotstanden er lik tyngdekraften, men med motsatt retning (motsatt fortegn).
Dette innebærer at kraftsummen

$$F_g+F_R=0,$$

som videre fører til at akselerasjonen blir lik null og farten blir konstant.