4. Andre typer første ordens differensiallikninger.

Vi har sett at de separable og de lineære første ordens differensiallikningene er svært nyttige for å lage matematiske modeller av fysiske prosesser. Men det fins mange andre første ordens differensiallikninger. Vi skal nå se hvordan vi kan løse noen slike.

4.1. Generelt om substitusjon.

Anta at vi har en første ordens differensiallikning som inneholder en fri variabel x, en ukjent funksjon y samt y'. En vanlig metode går ut på å erstatte y med en ny variabel på en slik måte at likningen blir enklere å løse. Dessverre fins det ingen generell teknikk for å gjøre dette. Vi har riktignok et par vanlige situasjoner, for eksempel homogene likninger og Bernoullis likning som vi skal se nærmere på nedenfor. Men først skal vi se på et par andre eksempler.

Eksempel 4.1: Løs differensiallikningen

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2$$

Løsning: Denne likningen er verken lineær eller separabel, og ser nokså håpløs ut. Men se hva som skjer dersom vi innfører en ny variabel

$$z(x) = x + y(x) + 3$$

For enkelhets skyld sløyfer vi x-ene i parentes, og får:

$$z = x + y + 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = z - x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

Når dette settes inn i likningen, får vi

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{z^2 + 1} = dx$$

Integrerer på begge sider, og får

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx \quad \Leftrightarrow \quad \arctan z = x + C \quad \Leftrightarrow \quad z = \tan(x + C)$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen blir da

$$y = z - x - 3 = \underline{\underline{\tan(x + C) - x - 3}}$$

4.2. Homogene likninger.

La oss gå rett på sak:

En differensiallikning som kan skrives på formen

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

sies å være **homogen**. Slike likninger løses med substitusjonen

$$z = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = zx \quad \Leftrightarrow \quad y' = z' \cdot x + z$$

La oss se hvordan dette fungerer i praksis.

Eksempel 4.2: Løs differensiallikningen

$$xy \cdot y' = x^2 + 2y^2$$

Løsning: Vi starter med å dele likningen på *xy*, og får

$$y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{2y^2}{xy} = \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + 2\frac{y}{x}$$

Så setter vi inn

$$z = \frac{y}{x}$$

og

$$y' = z' \cdot x + z\,,$$

og får

$$z' \cdot x + z = \frac{1}{z} + 2z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{1}{z} + z$$

Denne likningen er separabel:

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{1}{z} + z \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot dz = \left(\frac{1}{z} + z\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \quad zx \cdot dz = \left(z^2 + 1\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z}{z^2+1}dz = \frac{dx}{x}$$

Så integrerer vi begge sider. Integralet på venstre side integreres med substitusjonen

$$u = z^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dz} = 2z \quad \Leftrightarrow \quad z\,dz = \tfrac{1}{2}du$$

Får da

$$\int \frac{z}{z^2+1}dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\tfrac{1}{2}\ln u = \ln|x| + \ln C_1 = \ln\left(C_1 x\right)$$

$$\ln u = 2\ln\left(C_1 x\right) = \ln\left(C_1 x\right)^2 = \ln\left(Cx^2\right)$$

$$u = Cx^2$$

Men

$$u = z^2 + 1 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = Cx^2$$

Da blir

$$\frac{y^2}{x^2} = Cx^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = Cx^4 - x^2$$

slik at

$$y = \underline{\underline{\pm\sqrt{Cx^4 - x^2}}}\,.$$

4.3. Bernoullis likning.

Vi husker at den lineære første ordens differensiallikningen var

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Dersom høyresiden er multiplisert med y^n får vi en likning som kalles ***Bernoullis likning***:

Differensiallikningen

$$y' + f(x)y = g(x)\cdot y^n$$

kalles ***Bernoullis likning***.

Den løses med substitusjonen

$$z = y^{1-n} \quad \Leftrightarrow \quad y = z^{\frac{1}{1-n}} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \tfrac{1}{1-n} z^{\frac{1}{1-n}-1}$$

I praksis er ikke dette så ille som det kan se ut til i ramma. La oss se på et par eksempler.

Eksempel 4.3: Løs differensiallikningen

$$y' - xy = xy^2$$

Løsning: Dette er en Bernoullis likning med $n = 2$. Da bruker vi substitusjonen

$$z = y^{1-2} = y^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad y = z^{-1}$$

Da blir

$$y' = (-1)z^{-2}\cdot z' = -\frac{1}{z^2}\cdot z'$$

Så setter vi inn:

$$-\frac{1}{z^2}\cdot z' - x\cdot\frac{1}{z} = x\cdot\frac{1}{z^2}$$

Multipliserer med z^2 og ordner:

$$-z' - xz = x \quad \Leftrightarrow \quad z' + xz = -x$$

Dette er en lineær differensiallikning. Finner først hjelpefunksjonen:

$$F(x) = \int xdx = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$z(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\int (-x)e^{\frac{1}{2}x^2}dx + C\right)$$

Integralet løses med substitusjonen

$$u = \tfrac{1}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = x \quad \Leftrightarrow \quad du = x\,dx$$

Da blir

$$\int -xe^{\frac{1}{2}x^2}dx = -\int e^u du = -e^u = -e^{\frac{1}{2}x^2}$$

slik at

$$z(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(-e^{\frac{1}{2}x^2} + C\right) = \underline{-1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}}\,.$$

Da gjenstår det bare å benytte at

$$y = \frac{1}{z} = \underline{\underline{\frac{1}{Ce^{-\frac{1}{2}x^2} - 1}}}$$

Eksempel 4.4: Løs differensiallikningen

$$xy' - 2y = x\sqrt{y}$$

Løsning: Vi starter med å dele på x og får

$$y' - \frac{2}{x}y = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$$

Dette er en Bernoullis likning med $n = \frac{1}{2}$. Vi substituerer

$$z = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad y = z^2$$

Da blir

$$y' = 2z \cdot z'$$

Setter inn i differensiallikningen:

$$2z \cdot z' - \frac{2}{x}z^2 = z \quad \Leftrightarrow \quad z' - \frac{1}{x}z = \frac{1}{2}$$

Hjelpefunksjonen blir

$$F(x) = \int \left(-\frac{1}{x}\right)dx = -\ln x$$

slik at $z(x)$ blir

$$z(x) = e^{-(-\ln x)}\left(\int \tfrac{1}{2}e^{-\ln x}dx + C\right) = e^{\ln x}\left(\tfrac{1}{2}\int \left(e^{\ln x}\right)^{-1}dx + C\right) = x\left(\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + C\right)$$

$$= x\left(\tfrac{1}{2}\ln|x| + C\right) = x\left(\ln\left(|x|\right)^{\frac{1}{2}} + C\right) = \underline{x\left(\ln\sqrt{|x|} + C\right)}$$

Da gjenstår det bare å benytte at

$$y(x) = z^2 = \underline{\underline{x^2\left(\ln\sqrt{|x|} + C\right)^2}}.$$