Bjørn Davidsen

MATEMATIKK FOR INGENIØRER

Tallfølger og differenslikninger

Innhold

Forord

Kjære student!

Tall som følger etter hverandre som perler på en snor – kan det være noe å bry seg om, tenker du kanskje. Men slike ***tallfølger*** er både interessante og nyttige. I dagens samfunn er vi faktisk helt avhengige av dem. Aksjekurser og fiskekvoter, CO_2-konsentrasjoner og temperaturer, alt slikt representeres egentlig ved tallfølger. For ikke å snakke om meteorologens målinger og prognoser, som baserer seg på tallfølger som avhenger av hverandre.

Fra et matematikk-synspunkt er vi mest interessert i sammenhengen mellom leddene i en tallfølge. Kan vi si noe om hvordan de neste leddene blir ut fra kjennskap til tidligere ledd? Det er blant annet slike problem vi skal ta for oss i dette heftet.

Du *kan* lese dette heftet uten andre forkunnskaper enn vanlig algebra og litt funksjonslære. Men for å få fullt utbytte av heftet, og for å forstå teorien bak, må du beherske regning med komplekse tall.

Dette heftet danner også grunnlaget for ***rekker***, som er behandlet i et annet hefte.

Heftet avsluttes med et utvalg av tidligere eksamensoppgaver i dette temaet, med komplette løsningsforslag.

Med hilsen

Bjørn Davidsen

1. Tallfølger.

1.1. Innledning.

En ***tallfølge*** er rett og slett en følge av tall (eller matematiske uttrykk). Vi kan skrive en tallfølge slik:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

eller kortere

$$\{a_n\},\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

Ovenfor er det første leddet kalt a_0. Ofte lar vi a_1 være det første leddet. Merk at a_n symboliserer ledd nr. n i tallfølgen (eller ledd nr. $n+1$ dersom første ledd er a_0), mens $\{a_n\}$ symboliserer *hele* tallfølgen.

Dersom tallfølgen har uendelig mange ledd, har vi en *uendelig* tallfølge.

En tallfølge kan gis på to måter:

- **Eksplisitt:** Vi oppgir da en formel for a_n.

Eksempel 1.1.1: Sett opp de 5 første tallene i tallfølgen gitt ved

$$a_n = \frac{n}{n+1},\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

Løsning: Innsetting av $n = 0, 1, 2, \cdots$ gir tallfølgen

$$a_0 = \tfrac{0}{0+1} = 0, \qquad a_1 = \tfrac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}, \qquad a_2 = \tfrac{2}{2+1} = \tfrac{2}{3}, \qquad a_3 = \tfrac{3}{3+1} = \tfrac{3}{4}, \qquad a_4 = \tfrac{4}{4+1} = \tfrac{4}{5}.$$

Oppgave 1.1.1.

- **Rekursivt:** Vi oppgir da ett (eller flere) startledd, samt en sammenheng mellom etterfølgende ledd i tallfølgen.

Eksempel 1.1.2: *Fibonacci-tallene* er definert ved at de to første tallene er lik 1, og alle de andre tallene er lik summen av de to foregående. Matematisk formulert:

$$a_0 = a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1},\ n = 2, 3, 4, \cdots$$

Sett opp de 8 første tallene i denne tallfølgen.

Løsning: De 8 første tallene blir

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_2 = a_0 + a_1 = 1+1 = 2, \qquad a_3 = a_1 + a_2 = 1+2 = 3,$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 2+3 = 5, \qquad a_5 = a_3 + a_4 = 3+5 = 8, \qquad a_6 = a_4 + a_5 = 5+8 = 13,$$

$$a_7 = a_5 + a_6 = 8+13 = 21.$$

Oppgave 1.1.2.

1.2. Generelle egenskaper for tallfølger.

1.2.1. Konvergens.

Vi starter med en viktig definisjon:

En tallfølge $\{a_n\}$ **konvergerer mot** $\boldsymbol{A}$

$\Updownarrow$ def.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Vi sier at en tallfølge *divergerer* dersom den ikke konvergerer.

I mange tilfeller kan vi avgjøre konvergensen ved å benytte enkle og velkjente teknikker for å bestemme grenseverdier:

***Eksempel 1.2.1*:** Undersøk konvergensegenskapene for disse tallfølgene:

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $\left\{\frac{1}{2}n\right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

d) $\left\{\frac{2n+3}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Løsning:

a) Vi ser at $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, slik at tallfølgen konvergerer mot 0.

b) Vi ser at når $n \to \infty$ vil også $\frac{1}{2}n \to \infty$, slik at tallfølgen divergerer.

c) Vi benytter at

$$\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

slik at

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 1+0 = 1.$$

Tallfølgen konvergerer altså mot 1.

d) Vi multipliserer teller og nevner med $\frac{1}{n}$, og får:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)\cdot\frac{1}{n}}{n\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{1} = \frac{2+0}{1} = \underline{\underline{2}}.$$

Tallfølgen konvergerer altså mot 2.

Oppgave 1.2.1.

Noen ganger må vi bruke mer fantasi for å komme i mål:

Eksempel 1.2.2: Undersøk konvergensegenskapene for tallfølgen

$$\left\{\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}\right\},\ n=0,1,2,3,\cdots.$$

Løsning: Vi ser at når $n\to\infty$, får vi et "$\infty-\infty$"-uttrykk. Da kreves det en mer omfattende omforming, der vi benytter 3. kvadratsetning:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n}\right)}{\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)-4n}{\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty}=\underline{\underline{0}}$$

Tallfølgen konvergerer altså mot 0.

[Oppgave 1.2.2.]

Det er ofte nyttig å tenke seg at tallfølgen er punkter på en kontinuerlig graf. Poenget er at når vi har en *tallfølge*, kan vi ikke bruke kjente teknikker som derivasjon og integrasjon siden disse operasjonene kun er definert for *kontinuerlige* funksjoner. Men når vi oppfatter elementene i tallfølgen som punkter på grafen til en kontinuerlig funksjon, kan vi bruke disse teknikkene. Egenskaper ved funksjonen kan da overføres direkte til tallfølgen.

Vi går da fram på følgende måte:

For å undersøke konvergensen til en tallfølge $\{a_n\}$, definer vi en funksjon $f(x)$ slik at

$$f(n)=a_n.$$

Dersom $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$, vil $\{a_n\}$ konvergere mot *A*.

Dette er mye enklere i praksis enn det ser ut til i oppskriften over, noe neste eksempel viser:

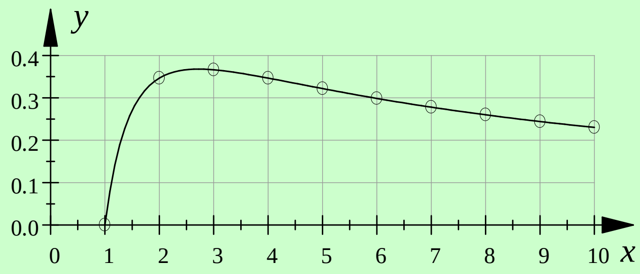
Eksempel 1.2.3: Undersøk konvergensen til tallfølgen

$$\left\{\frac{\ln n}{n}\right\},\ n=1,2,3,\cdots.$$

Løsning: Her får vi et "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk, som ikke lar seg omforme på noen enkel måte. Vi definerer derfor en kontinuerlig funksjon

$$f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x>0.$$

Da vil elementene i tallfølgen bli punkter på funksjonsgrafen slik figuren nedenfor viser.



Nå kan vi bruke L'Hôpitals regel til å finne $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}.$$

Da må også tallfølgen $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ konvergere mot 0.

[Oppgave 1.2.3.]()

Men vi har flere redskaper til disposisjon når vi undersøker konvergensen til tallfølger, bl.a. setningene nedenfor som vi ofte benytter uten å tenke over det:

La $\{a_n\}$ være en tallfølge som konvergerer mot *A*,
mens $\{b_n\}$ er en tallfølge som konvergerer mot *B*.
La *c* være en konstant.
Da gjelder:

$\{c\cdot a_n\}$ konvergerer mot $c\cdot A$.

$\{a_n \pm b_n\}$ konvergerer mot $A\pm B$.

$\{a_n \cdot b_n\}$ konvergerer mot $A\cdot B$.

$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ konvergerer mot $\dfrac{A}{B}$ dersom $B\neq 0$.

Eksempel 1.2.4: Undersøk konvergensen til tallfølgen

$$\left\{\frac{n^2-3n-\ln\left(n^2\right)}{n}\right\},\ n=1, 2, 3, \cdots.$$

Løsning: Vi merker oss først at $\ln\left(n^2\right)=2\ln n$. Da kan tallfølgen splittes opp slik:

$$\left\{\frac{n^2-3n-\ln\left(n^2\right)}{n}\right\}=\left\{\frac{n^2}{n}-\frac{3n}{n}-\frac{2\ln n}{n}\right\}=\{n\}-3-2\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}.$$

Vi vet allerede at tallfølgen $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ konvergerer mot null. Videre ser vi at tallfølgen $\{n\}$ divergerer (leddene blir større og større), slik at den gitte tallfølgen må divergere.

Neste setning er også enklere å benytte enn å formulere:

La $\{a_n\}$ være en tallfølge som konvergerer mot *A*.
La *f* være en funksjon som er kontinuerlig i en omegn rundt *A*.
Da vil $\{f(a_n)\}$ konvergere mot $f(A)$.

Eksempel 1.2.5: Undersøk konvergensen til tallfølgen

$$\left\{\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right\},\ n \in N .$$

Løsning: Vi ser direkte at tallfølgen $\left\{\tfrac{1}{n}\right\}$ konvergerer mot 0.
Videre er $\cos x$ kontinuerlig rundt $x = 0$.
Da vil $\cos\left(\tfrac{1}{n}\right)$ konvergere mot $\cos 0 = \underline{\underline{1}}$.

Oppgave 1.2.4.

Noen ganger kommer vi bort i tallfølger der leddene kan "klemmes inn" mellom ledd i kjente tallfølger. Vi kan lage mange setninger for slike situasjoner. Den nyttigste er:

La $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ være to tallfølger som begge konvergerer mot *A*.
La $\{c_n\}$ være en tallfølge som er slik at $a_n \le c_n \le b_n$ for alle *n*.
Da vil også $\{c_n\}$ konvergere mot *A*.

Eksempel 1.2.6: Undersøk konvergensen til tallfølgen

$$\left\{\frac{\cos^2 n + 2\sin n}{n}\right\}, n \in \mathbb{N} .$$

Løsning: Vi benytter at

$$0 \le \cos^2 n \le 1 \qquad \text{og} \qquad -2 \le 2\sin n \le 2 .$$

Da er

$$-2 \le \cos^2 n + 2\sin n \le 3 ,$$

slik at

$$\frac{-2}{n} \le \frac{\cos^2 n + 2\sin n}{n} \le \frac{3}{n} \text{ når } n \in N .$$

Men både $\left\{-\tfrac{2}{n}\right\}$ og $\left\{\tfrac{3}{n}\right\}$ konvergerer mot 0.

Da må også $\left\{\dfrac{\cos^2 n + 2\sin n}{n}\right\}$ konvergere mot 0.

1.2.2. Monotoni.

Det er ofte nyttig å vite om leddene i en tallfølge blir stadig større, eller om de blir stadig mindre, eller om det ikke er noen slike systematiske tendenser. Vi definerer derfor:

En tallfølge $\{a_n\}$ er ***monotont voksende***
$\Updownarrow$ def.
$a_{n+1} \geq a_n$ for alle *n* innenfor definisjonsmengden.

Dersom $a_{n+1} > a_n$ for alle *n*, sier vi at tallfølgen er ***strengt monotont voksende***.

På tilsvarende måte definerer vi *monotont avtakende* og *strengt monotont avtakende*:

En tallfølge $\{a_n\}$ er ***monotont avtakende***
$\Updownarrow$ def.
$a_{n+1} \leq a_n$ for alle *n* innenfor definisjonsmengden.

Dersom $a_{n+1} < a_n$ for alle *n*, sier vi at tallfølgen er ***strengt monotont avtakende.***

Vi utelater ofte ordet *monotont* i definisjonene over, og snakker bare om *voksende* og *avtakende* tallfølger.

Vi kan undersøke monotoniegenskapene til en tallfølge på flere måter. En måte er å danne differansen $d_n = a_{n+1} - a_n$ mellom to ledd som følger etter hverandre i tallfølgen. Da har vi at:

Dersom $d_n = a_{n+1} - a_n$, blir tallfølgen $\{a_n\}$:

- Monotont voksende dersom $d_n \geq 0$ for alle *n*.
- Strengt monotont voksende dersom $d_n > 0$ for alle *n*.
- Monotont avtakende dersom $d_n \leq 0$ for alle *n*.
- Strengt monotont avtakende dersom $d_n < 0$ for alle *n*.

I praksis er det ofte enklere å danne en funksjon $f(x)$ som er slik at $f(n) = a_n$ slik vi har sett før. Da bruker vi derivasjon til å undersøke om *f* er voksende eller avtakende. Resultatet kan direkte overføres til tallfølgen $\{a_n\}$.

Eksempel 1.2.7: Undersøk monotoniegenskapene til tallfølgen

$$\left\{\frac{n^2-4}{n+1}\right\},\ n\in\mathbb{N}$$

på to måter:

a) Ved å beregne differansen $d_n = a_{n+1} - a_n$.

b) Ved å benytte derivasjon.

Løsning:

a) Vi får at

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2-4}{(n+1)+1} - \frac{n^2-4}{n+1} = \frac{n^2+2n-3}{n+2} - \frac{n^2-4}{n+1}$$

$$= \frac{(n^2+2n-3)(n+1)-(n^2-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{(n^3+n^2+2n^2+2n-3n-3)-(n^3+2n^2-4n-8)}{(n+2)(n+1)} = \underline{\frac{n^2+3n+5}{(n+2)(n+1)}}$$

Siden n er et ikke-negativt tall, blir både teller og nevner positive slik at $d_n > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da er tallfølgen strengt monotont voksende.

b) Vi definerer den kontinuerlige funksjonen

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+1},\ x \geq 0.$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2-4)\cdot 1}{(x+1)^2} = \underline{\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}}.$$

Siden x er et ikke-negativt tall, blir både teller og nevner positive slik at $f'(x) > 0$ for alle $x \geq 0$. Da er både f og tallfølgen strengt monotont voksende.

Til slutt skal vi se på begrepet ***begrenset tallfølge***:

En tallfølge $\{a_n\}$ er ***opptil begrenset***

$\Updownarrow$ def.

Det eksisterer en ***øvre skranke*** M slik at $a_n \leq M$ for alle *n*.

En tallfølge $\{a_n\}$ er ***nedtil begrenset***

$\Updownarrow$ def.

Det eksisterer en ***nedre skranke*** m slik at $a_n \geq m$ for alle *n*.

En tallfølge $\{a_n\}$ er ***begrenset***

$\Updownarrow$ def.

Det eksisterer et tall K slik at $|a_n| \leq K$ for alle *n*.

Eksempel 1.2.8: Undersøk om tallfølgen

$$\left\{\frac{2n}{2n+3}\right\},\ n\in\mathbb{N}$$

er begrenset.

Løsning: Det er lurt å starte med å undersøke monotoniegenskapene. Det gjøres enklest ved å benytte funksjonen

$$f(x)=\frac{2x}{2x+3},\ x\geq 1.$$

$$f'(x)=\frac{2(2x+3)-2x\cdot 2}{(2x+3)^2}=\frac{6}{(2x+3)^2}>0.$$

Vi ser at *f* er strengt voksende. Da er også tallfølgen

$$\left\{\frac{2n}{2n+3}\right\},\ n\in\mathbb{N}$$

strengt monotont voksende. Laveste verdi for tallfølgen blir da

$$a_1=\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1+3}=\frac{2}{5}$$

slik at det eksisterer en nedre skranke $m=\frac{2}{5}$. Ethvert tall mindre enn $\frac{2}{5}$ kan også benyttes som nedre skranke. Videre ser vi at

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot\frac{1}{n}}{(2n+3)\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{3}{n}}=\frac{2}{2+0}=\underline{\underline{1}}$$

slik at tallfølgen konvergerer mot 1. Men når tallfølgen er voksende og konvergerer mot 1, må ethvert tall $M\geq 1$ være en øvre skranke. Når tallfølgen har både øvre og nedre skranke, må tallfølgen være begrenset.

Eksemplet over illustrerer en viktig sammenheng mellom konvergens og monotoni:

For en **monoton** tallfølge gjelder at:
Tallfølgen er konvergent
$\Updownarrow$
Tallfølgen er begrenset

Det er faktisk ganske kronglete å gi et generelt bevis for setningen, og vi skal droppe det.

Oppgave 1.2.5.

Til slutt skal vi jobbe oss gjennom et eksempel der vi bruker flere egenskaper ved tallfølger. Eksemplet er litt komplisert, men det viser hvor mye vi egentlig kan finne ut om en tallfølge ved å bruke våre kunnskaper (og litt kreativitet).

Eksempel 1.2.9: En tallfølge er gitt rekursivt ved

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{3}a_n + 4\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Undersøk monotoniegenskaper og konvergens for denne tallfølgen.

Løsning: Her er det påfallende at vi ikke kjenner noe startledd i tallfølgen. Kan vi da si noe om monotoni og konvergens?

Vi starter med å beregne differensen

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \left(\tfrac{1}{3}a_n + 4\right) - a_n = \underline{4 - \tfrac{2}{3}a_n}\ .$$

Vi vet at tallfølgen er monotont voksende dersom

$$d_n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - \tfrac{2}{3}a_n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_n \leq 6}\,.$$

Men da er

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{3}a_n + 4 \leq \tfrac{1}{3}\cdot 6 + 4 = 2 + 4 = 6\,,$$

slik at $M = 6$ blir en øvre skranke. Tallfølgen er derfor monotont voksende og opptil begrenset, slik at den må konvergere dersom ett av leddene er $a_n \leq 6$.

Vi ser også at tallfølgen er monotont avtakende dersom

$$d_n \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - \tfrac{2}{3}a_n \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_n \geq 6}\,.$$

På samme måte som ovenfor kan vi vise at dersom ett av leddene $a_n \geq 6$, blir tallfølgen nedtil begrenset. Vis det! Siden den også er monotont avtakende, må den konvergere også da.

Vi har altså vist at tallfølgen alltid konvergerer. Men hva konvergerer den mot? Vi setter at den konvergerer mot *A*. Da er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A\,.$$

Siden $a_{n+1} = \tfrac{1}{3}a_n + 4$, får vi av grenseverdisetningene at

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{3}a_n + 4\right) = \tfrac{1}{3}\lim_{n\to\infty} a_n + 4 \quad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{1}{3}A + 4 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{3}A = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{A = 6}}\,.$$

Altså har vi vist at tallfølgen konvergerer mot 6 uten å kjenne et eneste ledd i tallfølgen, bare ved å kjenne sammenhengen mellom etterfølgende ledd.

2. Differenslikninger.

2.1. Innledning.

Vi har sett at en tallfølge kan gis på to måter: Eksplisitt (d.v.s. ved hjelp av en formel for ledd nr. *n*), eller rekursivt (d.v.s. som en sammenheng mellom ledd som følger etter hverandre, samt startledd).

I mange praktiske situasjoner kan vi sette opp en rekursiv sammenheng, og ønsker å finne en formel for ledd nr. *n*. En slik rekursiv sammenheng mellom ledd som følger etter hverandre i en tallfølge, kaller vi en *rekursiv likning* eller en *differenslikning*. Formelen for ledd nr. *n* er da *løsningen* av differenslikningen.

Hvis du har vært borti *differensiallikninger*, vil du vite at det fins standard teknikker for å løse noen vanlige typer av slike likninger. På samme måte fins det standard teknikker for å løse visse typer differenslikninger, og vi skal se på et par av de viktigste. Men først skal vi se på et lite eksempel der vi viser en annen teknikk: vi setter opp noen av de første leddene i tallfølgen, undersøker om vi finner et system, og bruker et *induksjonsbevis* til å vise at dette systemet gjelder generelt.

Eksempel 2.1.1: En tallfølge $\{a_n\}$, $n = 0,1,2,\cdots$ er gitt rekursivt ved

$$a_0 = 2\,,$$

$$a_n = (a_{n-1})^2 \text{ når } n = 1,2,3,\cdots.$$

Finn en formel for a_n.

Løsning: Vi setter opp noen av de første leddene:

$$a_0 = 2\,,$$

$$a_1 = (a_0)^2 = 2^2$$

$$a_2 = (a_1)^2 = (2^2)^2 = 2^4$$

$$a_3 = (a_2)^2 = (2^4)^2 = 2^8$$

$$a_4 = (a_3)^2 = (2^8)^2 = 2^{16}$$

Her ser det ut som om $a_n = 2^{2^n}$. Induksjonsgrunnlaget er allerede etablert. Vi går løs på induksjonstrinnet. Vi *antar* da at sammenhengen gjelder for $n = k$ slik at

$$a_k = 2^{2^k}\,.$$

Da blir

$$a_{k+1} = (a_k)^2 = \left(2^{2^k}\right)^2 = 2^{2^k \cdot 2} = 2^{2^{k+1}}\,.$$

Vi ser at dersom sammenhengen gjelder for $n = k$, må den også gjelde for $n = k+1$. Siden induksjonsgrunnlaget er etablert, har vi vist at sammenhengen må gjelde for alle $n = 0,1,2,\cdots$.
Tallfølgen blir altså

$$\left\{2^{2^n}\right\},\ n = 0,1,2,\cdots.$$

Men nå skal vi gå løs på differenslikninger som kan løses med standard teknikker.

2.2. Lineære 1. ordens differenslikninger.

2.2.1. Innledning.

La $\{x_n\}$ være en tallfølge. En differenslikning som kan skrives på formen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n + f(n)$$

eller

$$x_n = A \cdot x_{n-1} + f(n)$$

der A er en konstant, kalles en *lineær 1. ordens differenslikning med konstante koeffisienter*. Det er kun denne formen for 1. ordens differenslikninger vi skal ta for oss.

Dersom $f(n) \equiv 0$ slik at likningen blir $x_{n+1} = A \cdot x_n$ eller $x_n = A \cdot x_{n-1}$, sier vi at likningen er *homogen*. I motsatt fall er den *inhomogen*.

2.2.2. Homogene differenslikninger.

Vi skal først løse den *homogene* likningen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n .$$

Anta at vi kjenner x_0. Da kan vi rekursivt finne resten av leddene i tallfølgen slik:

$$x_1 = A \cdot x_0$$

$$x_2 = A \cdot x_1 = A \cdot (A \cdot x_0) = A^2 \cdot x_0$$

$$x_3 = A \cdot x_2 = A \cdot (A^2 \cdot x_0) = A^3 \cdot x_0$$

Og slik kan vi fortsette. For hvert ledd i tallfølgen må vi multiplisere det foregående leddet med A, slik at vi til slutt får

$$x_n = A^n \cdot x_0 .$$

Vi burde egentlig vise denne sammenhengen ved hjelp av et lite induksjonsbevis, men sammenhengen er vel såpass innlysende at vi dropper dette beviset.

Generelt kjenner vi ikke x_0. Det er derfor bedre å si at løsningen er

$$x_n = C \cdot A^n$$

der C er en eller annen konstant. Vi har altså funnet at:

Den homogene lineære 1.ordens differenslikningen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n$$

har løsning

$$x_n = C \cdot A^n .$$

Her er C en konstant som kan bestemmes dersom vi kjenner et ledd i tallfølgen.

Eksempel 2.2.1: Løs differenslikningen

$$x_{n+1} = \tfrac{4}{5} x_n \text{ når } n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$x_0 = 10 .$$

Løsning: Vi vet at løsningen er av formen

$$x_n = C \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^n .$$

Finner C:

$$x_0 = C \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^0 = C \cdot 1 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 10} .$$

Løsningen blir

$$x_n = \underline{\underline{10 \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^n}} .$$

Løs **Oppgave 2.2.1.**

2.2.3. Inhomogene differenslikninger.

Så går vi løs på den *inhomogene* likningen

$$x_n = A \cdot x_{n-1} + f(n) .$$

For å løse den, får vi bruk for denne setningen:

La tallfølgen $\{p_n\}$ være en *partikulær løsning* av den inhomogene likningen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n + f(n) .$$

La tallfølgen $\{h_n\}$ være løsning av den tilhørende homogene likningen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n .$$

Den generelle løsningen av den inhomogene likningen er da

$$\{x_n\} = \{h_n + p_n\} = \{C \cdot A^n + p_n\} .$$

En *partikulær løsning* er et eller annet uttrykk som passer i den gitte likningen.

Du finner et bevis for setningen i et eget notat.

Nå gjenstår det "bare" å finne en partikulær løsning. Det eksisterer generelle metoder for å finne slike løsninger, men de er vanligvis nokså omstendelige å bruke. Vi skal derfor benytte en "intelligent prøve-og-feile-metode". Den er slik:

Prøv en partikulær løsning p_n av samme form som $f(n)$.

Mer detaljert skal vi gå fram slik:

- Dersom $f(n)$ er et polynom i *n*, d.v.s. at
  $$f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_k n^k,$$
  lar vi p_n være et polynom i *n* av samme grad:
  $$p_n = C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + \cdots + C_k n^k.$$
  Vi må nå finne C_0, C_1, $\cdots C_k$. Merk at *alle C*-koeffisientene må være med selv om noen av koeffisientene a_0, a_1, $\cdots a_k$ er lik null.
- Dersom
  $$f(n) = B \cdot r^n,$$
  prøver vi
  $$p_n = C \cdot r^n$$
  der vi må finne *C*.
- Dersom
  $$f(n) = B_1 \sin(\alpha \cdot n) + B_2 \cos(\alpha \cdot n),$$
  prøver vi
  $$p_n = C_1 \sin(\alpha \cdot n) + C_2 \cos(\alpha \cdot n)$$
  der vi må finne C_1 og C_2. Merk at vi må ta med *både* sinus- og cosinusledd i p_n selv om B_1 eller B_2 er lik null.

Eksempel 2.2.2: I eksempel 1.2.9 tok vi for oss differenslikningen
$$a_{n+1} = \tfrac{1}{3} a_n + 4, \quad n \in \mathbb{N},$$
og viste at a_n konvergerte mot 6 uansett verdi av a_1. Vi skal nå etterprøve dette resultatet, ved at vi skal løse likningen og finne grenseverdien for a_n når $n \to \infty$.

Løsning: Løsningen av den homogene likningen er
$$h_n = \underline{C \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^n}.$$
I den gitte likningen er $f(n) = 4$. Jeg prøver derfor en partikulær løsning som er en konstant:
$$p_n = K \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = K.$$
Setter inn i likningen for å finne *K*:
$$p_{n+1} = \tfrac{1}{3} p_n + 4 \quad \Leftrightarrow \quad K = \tfrac{1}{3} \cdot K + 4 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{3} K = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{K = 6}.$$
Den generelle løsningen av likningen blir da
$$a_n = h_n + p_n = \underline{C \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^n + 6}.$$
Vi kan nå finne *C* dersom vi kjenner ett ledd i tallfølgen. Men uansett verdi av *C* vil leddet $C \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^n$ gå mot null når $n \to \infty$. Dermed har vi vist at $a_n \to 6$ når $n \to \infty$.

Eksempel 2.2.3: En bank gir 4% årlig rente på innskudd. Men banken tar også et gebyr på 100 kr pr år for å forvalte kontoen. Du setter inn $x_0 = 6000$ kr i banken, og lar beløpet stå urørt i *n* år. Hva har beløpet vokst til etter *n* år?

Løsning: Vi kaller beløpet etter *n* år for x_n. Av beskrivelsen ovenfor får vi differenslikningen

$$x_{n+1} = 1.04x_n - 100.$$

Dette er en inhomogen differenslikning, der løsningen av den tilhørende homogene likningen er

$$h_n = C \cdot 1.04^n.$$

Siden $f(n) = -100$, prøver jeg en konstant partikulærløsning:

$$p_n = K \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = K.$$

Setter inn i likningen:

$$p_{n+1} = 1.04p_n - 100 \quad \Leftrightarrow \quad K = 1.04K - 100 \quad \Leftrightarrow \quad 0.04K = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{K = 2500}.$$

Den generelle løsningen blir da

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C \cdot 1.04^n + 2500}.$$

Finner *C*:

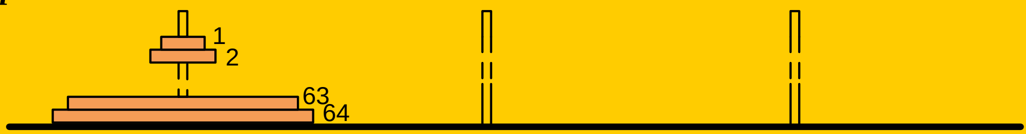
$$x_0 = C \cdot 1.04^0 + 2500 = C + 2500 = 6000 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 3500}.$$

Løsningen av likningen blir altså

$$\underline{\underline{x_n = 3500 \cdot 1.04^n + 2500}}.$$

Så tar vi et "standard-eksempel" som gå igjen i alle lærebøker:

Eksempel 2.2.4:



Legenden om "tårnene i Hanoi" er et klassisk eksempel på et problem som fører til en differenslikning. Legenden går ut på at ved et tempel i Hanoi er det plassert tre påler. Nedover den ene pålen var det tredd 64 sirkulære gullplater, der platene har stadig mindre radius jo høyere vi kommer i stabelen. Så skal munkene flytte en og en skive over på en annen påle inntil hele stabelen er flyttet over på en av de andre pålene. Flyttingen skal gjøres slik at de aldri legger en plate med større radius oppå en plate med mindre radius. Når flyttingen er ferdig, vil alt liv på jorda opphøre. Hva er det minste antall flyttinger som må til?

Løsning: Vi definerer x_n som antall flyttinger for å flytte *n* skiver fra en påle til en annen etter munkenes forskrift. Når vi skal flytte $n+1$ skiver, gjøres dette mest effektivt slik:

1. Først flytter vi *n* skiver over på en tom påle. Dette krever x_n flyttinger.
2. Så flytter vi skive nr $n+1$ over på en tom påle. Detter krever bare 1 flytting.
3. Til slutt flytter vi de *n* skivene oppå skive nr $n+1$. Dette krever x_n flyttinger.

I alt har vi da brukt $x_n + 1 + x_n = 2x_n + 1$ flyttinger. Med andre ord:

$$x_{n+1} = 2x_n + 1.$$

Dessuten er det opplagt at $x_1 = 1$.

Vi løser først den tilhørende homogene likningfølgen, som er

$$h_{n+1} = 2h_n.$$

Løsningen er

$$h_n = \underline{C \cdot 2^n}.$$

Så leter vi etter en partikulær løsning av formen

$$p_n = K \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = K$$

der K er en konstant. Vi setter inn i likningen og får

$$K = 2K + 1 \quad \Leftrightarrow \quad K = \underline{-1}.$$

Den generelle løsningen er da

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C \cdot 2^n - 1}.$$

Nå gjenstår det bare å finne C ved å benytte at $x_1 = 1$. Vi får

$$x_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C \cdot 2^1 - 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2C = 2 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{1}.$$

Dermed har vi løsningen

$$x_n = \underline{\underline{2^n - 1}}.$$

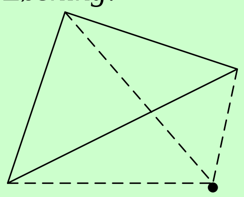
Med 64 skiver får vi at det må utføres $2^{64} - 1$ flyttinger før livet på jorda opphører. Det bør ikke være noen umiddelbar fare, selv om munkene jobber så raskt de bare kan.

Løs `Oppgave 2.2.2`.

En gang i blant fører ikke teknikken ovenfor fram. Da multipliserer vi vår "prøveløsning" med n, og prøver på nytt slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 2.2.5:
Hvor mange forbindelseslinjer kan du trekke mellom hjørnene i en n-kant?

Løsning:



Vi setter at antall forbindelseslinjer mellom hjørnene i en n-kant er x_n. Vi kan trekke 3 forbindelseslinjer mellom hjørnene i en trekant, slik at $x_3 = 3$. Dersom vi utvider med et nytt hjørne slik at vi får en 4-kant, kan vi trekke en ny forbindelseslinje fra hvert av de opprinnelige hjørnene til det nye hjørnet. Vi har derfor at

$$x_4 = x_3 + 3.$$

Generelt har vi at når det er x_n forbindelseslinjer mellom hjørnene i en n-kant, og vi føyer til ett nytt hjørne slik at vi får en $n+1$ - kant, kan vi trekke ei linje fra hvert av de n opprinnelige hjørnene til det nye hjørnet. Dette gir differenslikningen

$$x_{n+1} = x_n + n.$$

For å løse denne likningen, finner vi først løsningen av den tilhørende homogene likningen som er

$$h_{n+1} = h_n.$$

Denne løsningen er

$$h_n = C \cdot 1^n = C.$$

Siden $f(n) = n$ (førstegradspolynom i n), prøver jeg en partikulær løsning

$$p_n = A \cdot n + B \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = A \cdot (n+1) + B.$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$p_{n+1} = p_n + n$$
$$A(n+1) + B = (A \cdot n + B) + n$$
$$A \cdot n + A + B = A \cdot n + B + n$$
$$A = n$$

Men dette kan umulig stemme, fordi *A* skal være en konstant. Vi må altså gjøre et nytt forsøk, og prøver da å multiplisere vår første partikulære løsning med *n*. Vi prøver altså

$$p_n = n(A \cdot n + B) = An^2 + Bn$$
$$p_{n+1} = A(n+1)^2 + B(n+1) = A(n^2 + 2n + 1) + B(n+1) = An^2 + 2An + A + Bn + B$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$p_{n+1} = p_n + n$$
$$An^2 + 2An + A + Bn + B = (An^2 + Bn) + n$$
$$2A \cdot n + A + B = n$$
$$(2A - 1)n + (A + B) = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for *alle* verdier av *n*, må vi ha at

$$2A - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A = \tfrac{1}{2}}$$

og

$$A + B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = -A = \underline{-\tfrac{1}{2}}.$$

Dette gir en partikulær løsning

$$p_n = n\left(\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}\right) = \underline{\tfrac{n}{2}(n-1)}.$$

Den komplette løsningen av likningen blir da

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C + \tfrac{n}{2}(n-1)}.$$

Finner *C*:

$$x_3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C + \tfrac{3}{2}(3-1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C + 3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 0}.$$

Antall forbindelseslinjer mellom hjørnene i en *n*-kant er altså

$$\underline{\underline{x_n = \tfrac{n}{2}(n-1)}}.$$

Løs **Oppgave 2.2.3**.

2.3. Lineære 2. ordens differenslikninger.

2.3.1. Innledning.

La $\{x_n\}$ være en tallfølge. En differenslikning av typen

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2} + f(n)$$

kalles en *lineær 2. ordens differenslikning*. Vi skal kun se på likninger der *A* og *B* er konstanter.

Dersom $f(n) \equiv 0$ kalles likningen *homogen*. I motsatt fall er likningen *inhomogen*.

For å løse slike likninger, benytter vi denne setningen:

Den generelle løsningen av differenslikningen

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2} + f(n)$$

er

$$\{x_n\} = \{h_n + p_n\}$$

der $\{h_n\}$ er løsningen av den tilhørende homogene likningen,
mens $\{p_n\}$ er en partikulær løsning av den inhomogene likningen.

Beviset er helt likt det tilsvarende beviset for 1. ordens differenslikninger, og jeg vil ikke gjennomføre det.

Den partikulære løsningen $\{p_n\}$ finner vi på samme måte som for 1.ordens likninger. Men hvordan finner vi løsningen $\{h_n\}$ av den tilhørende homogene likningen?

2.3.2. Homogene likninger.

Vi skal nå løse den homogene lineære 2.ordens differenslikningen

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2},$$

og starter med en viktig setning:

Den homogene lineære differenslikningen

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}$$

har alltid to lineært uavhengige løsninger som vi skal kalle $\{x_{1,n}\}$ og $\{x_{2,n}\}$.
Den generelle løsningen av likningen er en lineær kombinasjon av disse, d.v.s. at

$$\{x_n\} = \{C_1 x_{1,n} + C_2 x_{2,n}\}.$$

Denne setningen inneholder egentlig tre påstander:

1. Differenslikningen har alltid to lineært uavhengige løsninger $\{x_{1,n}\}$ og $\{x_{2,n}\}$.
2. En lineærkombinasjon $\{x_n\} = \{C_1 x_{1,n} + C_2 x_{2,n}\}$ er også løsning av likningen.
3. Det fins ingen andre løsninger av differenslikningen.

Påstand 2 bevises enkelt ved direkte innsetting. De andre to påstandene skal vi ikke bevise.

Dersom vi kjenner to ledd som følger etter hverandre i tallfølgen, kan vi bestemme de to konstantene C_1 og C_2.

Men det viktigste gjenstår. Hvordan finner vi $\{x_{1,n}\}$ og $\{x_{2,n}\}$? Da trenger vi oppskriften nedenfor:

For å løse differenslikningen

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}$$

setter vi opp og løser den *karakteristiske likningen*

$$t^2 = A \cdot t + B\,.$$

Vi får da tre muligheter:

- To forskjellige reelle røtter t_1 og t_2:
  Løsningen av differenslikningen blir
  $$\{x_n\} = \{C_1 \cdot t_1^{\,n} + C_2 \cdot t_2^{\,n}\}\,.$$
- To like røtter t:
  Løsningen av differenslikningen blir
  $$\{x_n\} = \{C_1 \cdot t^n + C_2 \cdot n \cdot t^n\}\,.$$
- To kompleks konjugerte røtter $t = r \cdot e^{\pm\theta i}$:
  Løsningen av differenslikningen blir
  $$\{x_n\} = \{r^n\left(K_1 \cos(n\theta) + K_2 \sin(n\theta)\right)\}$$

Teorien bak denne setningen finner du i et eget notat.

Eksempel 2.3.1: Løs differenslikningen

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \text{ når } n = 3, 4, 5, \cdots$$

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 2\,.$$

Løsning: Setter først opp den karakteristiske likningen og løser den:

$$t^2 = 3t - 2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Dermed er

$$\{x_{1,n}\} = \{2^n\} \quad \text{og} \quad \{x_{2,n}\} = \{1^n\} = \{1\}$$

to lineært uavhengige tallfølger som begge er løsninger av den gitte likningen, slik at

$$\{x_n\} = \underline{\{C_1 \cdot 2^n + C_2\}}$$

er en generell løsning av likningen.
Finner C_1 og C_2:

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 = 2C_1 + C_2 = 0\,.$$

$$x_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 = 4C_1 + C_2 = 2\,.$$

Trekker disse likningene fra hverandre, og får

$$2C_1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1 = 1}\,.$$

Dette gir videre

$$2C_1 + C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -2C_1 = \underline{-2}\,.$$

Løsningen blir da

$$\{x_n\} = \{C_1 \cdot 2^n + C_2\} = \underline{\underline{\{2^n - 2\}}}.$$

Oppgave 2.3.1

Eksempel 2.3.2: Løs differenslikningen

$$x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} \quad \text{når } n = 3, 4, 5, \cdots$$

$$x_1 = 6, \qquad x_2 = 20.$$

Løsning: Vi setter opp den karakteristiske likningen:

$$t^2 = 4t - 4 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 4t + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = \underline{2}.$$

Differenslikningen får da den generelle løsningen

$$\{x_n\} = \underline{\{C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n\}}.$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 1 \cdot 2^1 = 2C_1 + 2C_2 = 6$$

$$x_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot 2 \cdot 2^2 = 4C_1 + 8C_2 = 20$$

Multipliserer den øverste likningen med (-2) og adderer:

$$4C_2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_2 = 2}.$$

Den øverste likningen gir nå

$$2C_1 = 6 - 2C_2 = 6 - 2 \cdot 2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1 = 1}.$$

Løsningen av likningen blir da

$$\{x_n\} = \{2^n + 2n \cdot 2^n\} = \underline{\underline{\{(1 + 2n) \cdot 2^n\}}}.$$

Oppgave 2.3.2.

***Eksempel 2.3.3*:** Løs differenslikningen

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2} \quad \text{når } n = 3, 4, 5, \cdots$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Løsning: For oversiktens (og kontrollens) skyld kan vi starte med å regne ut noen av de første leddene i tallfølgen. Vi får:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	1	2	1	-1	-2	-1	1	2

Vi ser at $x_7 = x_1$, $x_8 = x_2$ osv. Tallfølgen er altså periodisk med periode $n = 6$.

Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 = t - 1 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \underline{\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, i}.$$

Vi får to kompleks konjugerte røtter med:

- Modulus:

$$r = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = 1$$

- Argumentvinkel:

$$\tan\theta = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\theta = \tfrac{1}{3}\pi}.$$

Den generelle løsningen av differenslikningen blir da

$$\{x_n\} = \underline{\left\{K_1 \cos\left(n \cdot \tfrac{1}{3}\pi\right) + K_2 \sin\left(n \cdot \tfrac{1}{3}\pi\right)\right\}}.$$

Finner K_1 og K_2 av startbetingelsene:

$$x_1 = K_1 \cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) + K_2 \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = K_1 \cdot \tfrac{1}{2} + K_2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1$$

$$x_2 = K_1 \cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) + K_2 \sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = K_1 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) + K_2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 2$$

Legger sammen disse likningene, og får

$$K_2 \cdot \sqrt{3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{K_2 = \sqrt{3}}.$$

Da er

$$K_1 \cdot \tfrac{1}{2} = 1 - K_2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{K_1 = -1}.$$

Den komplette løsningen er:

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\left\{-\cos\left(n \cdot \tfrac{1}{3}\pi\right) + \sqrt{3} \cdot \sin\left(n \cdot \tfrac{1}{3}\pi\right)\right\}}}.$$

Dette er en periodisk funksjon, der vi finner perioden ved å sette

$$n \cdot \tfrac{1}{3}\pi = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \underline{n = 6},$$

som vi så av tabellen i starten av eksemplet. Du vil også se at løsningen stemmer med de leddene som er regnet ut i tabellen.

Oppgave 2.3.3.

***Eksempel 2.3.4*:** En tallfølge er gitt ved differenslikningen

$$x_n = r \cdot x_{n-1} - x_{n-2}$$

der r er et positivt reelt tall. Hvordan blir tallfølgen for ulike verdier av r?

Løsning: Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 = r \cdot t - 1 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - r \cdot t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4}}{2} = \tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}r\right)^2 - 1}.$$

Vi får nå tre muligheter:

1. $r > 2$. Da blir det to forskjellige reelle røtter. Minst en av dem er større enn 1. Da må x_n inneholde et ledd $C \cdot t^n$ der $t > 1$, slik at dersom $C \neq 0$ vil $x_n \to \infty$ når $n \to \infty$.

2. $r = 2$. Da blir det to like røtter $t = 1$. Løsningen blir da av formen

$$x_n = C_1 + C_2 n.$$

Også her vil $x_n \to \infty$ når $n \to \infty$ dersom $C_2 \neq 0$.

3. $0 < r < 2$. Vi får da to kompleks konjugerte røtter

$$t = \tfrac{1}{2}r \pm i \cdot \sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2}r\right)^2}.$$

Disse røttene har modulus

$$R = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}r\right)^2 + \left(\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}r\right)^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}r\right)^2 + \left(1-\left(\tfrac{1}{2}r\right)^2\right)} = 1.$$

Da vil tallfølgen $\{x_n\}$ danne en periodisk svingning med konstant amplitude.

Oppgave 2.3.4.

2.3.3. Inhomogene differenslikninger.

Prinsippet for løsing av inhomogene differenslikninger

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2} + f(n)$$

har vi allerede satt opp: Løs først den tilhørende homogene likningen, og finn deretter en partikulær løsning p_n.

Vi finner partikulær løsning på samme måte som for lineære 1. ordens differenslikninger: Prøv en løsning av samme form som $f(n)$. Dette betyr at:

- Dersom $f(n)$ er et polynom i *n*, lar vi også partikulærløsningen være et polynom i *n* av samme grad.
- Dersom $f(n) = C \cdot a^n$ prøver vi en partikulærløsning $p_n = D \cdot a^n$.
- Dersom $f(n) = C_1\cos(\alpha n) + C_2\sin(\alpha n)$, prøver vi en partikulærløsning av formen $p_n = D_1\cos(\alpha n) + D_2\sin(\alpha n)$. Merk at p_n må inneholde *både* sinus- og cosinusledd selv om C_1 eller C_2 er lik null.

Noen ganger fører ikke metoden foran fram. Det gjelder i alle fall dersom vår partikulær-løsning allerede inngår i løsningen av den homogene likningen. Da multipliserer vi partikulærløsningen vår med *n*, og prøver på nytt. Dette illustreres i eksemplet nedenfor:

***Eksempel 2.3.5*:** Løs differenslikningen

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} + f(n)$$

når:

a) $f(n) = 2n$, $\quad x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

b) $f(n) = 2^n$, $\quad x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Løsning: Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 = t + 2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

slik at løsningen av den tilhørende homogene likningen blir

$$h_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n .$$

a) Siden $f(n) = 2n$ ikke inngår i h_n, prøver jeg en partikulærløsning

$$p_n = Cn + D \quad \Leftrightarrow \quad p_{n-1} = C(n-1) + D \quad \Leftrightarrow \quad p_{n-2} = C(n-2) + D .$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$p_n = p_{n-1} + 2p_{n-2} + 2n$$
$$Cn + D = C(n-1) + D + 2\big(C(n-2) + D\big) + 2n$$
$$Cn + D = Cn - C + D + 2Cn - 4C + 2D + 2n$$
$$(-2C - 2)n + (5C - 2D) = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for *alle* verdier av *n*, må vi kreve at

$$-2C - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = -1}$$

og at

$$5C - 2D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = \tfrac{5}{2}C = \underline{-\tfrac{5}{2}} .$$

Den generelle løsningen blir altså

$$\{x_n\} = \underline{\left\{C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n - n - \tfrac{5}{2}\right\}} .$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot (-1)^1 - 1 - \tfrac{5}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2C_1 - C_2 = \tfrac{9}{2} .$$
$$x_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot (-1)^2 - 2 - \tfrac{5}{2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4C_1 + C_2 = \tfrac{15}{2} .$$

Legger sammen disse likningene, og får

$$6C_1 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1 = 2} .$$

Da blir

$$C_2 = \tfrac{15}{2} - 4C_1 = \tfrac{15}{2} - 4 \cdot 2 = \underline{-\tfrac{1}{2}} .$$

Komplett løsning av differenslikningen blir da

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\left\{2 \cdot 2^n - \tfrac{1}{2} \cdot (-1)^n - n - \tfrac{5}{2}\right\}}} .$$

b) Siden 2^n inngår i h_n, prøver jeg en partikulærløsning

$$p_n = D \cdot n \cdot 2^n \quad \Leftrightarrow \quad p_{n-1} = D \cdot (n-1) \cdot 2^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad p_{n-2} = D \cdot (n-2) \cdot 2^{n-2} .$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$p_n = p_{n-1} + 2p_{n-2} + 2^n$$
$$D \cdot n \cdot 2^n = D \cdot (n-1) \cdot 2^{n-1} + 2D \cdot (n-2) \cdot 2^{n-2} + 2^n$$

Deler på 2^{n-2}, og multipliserer ut:

$$D \cdot n \cdot 2^2 = D \cdot (n-1) \cdot 2 + 2D(n-2) + 2^2$$
$$4Dn = 2Dn - 2D + 2Dn - 4D + 4$$
$$0 = -6D + 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{D = \tfrac{2}{3}}$$

Den generelle løsningen blir altså

$$\{x_n\} = \underline{\left\{C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n + \tfrac{2}{3} n \cdot 2^n\right\}} .$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot (-1)^1 + \tfrac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2^1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2C_1 - C_2 = -\tfrac{1}{3}.$$

$$x_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot (-1)^2 + \tfrac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4C_1 + C_2 = -\tfrac{1}{3}.$$

Legger sammen disse likningene, og får

$$6C_1 = -\tfrac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{-\tfrac{1}{9}}.$$

Da blir

$$C_2 = -\tfrac{1}{3} - 4C_1 = -\tfrac{1}{3} - 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{9}\right) = \underline{\tfrac{1}{9}}.$$

Komplet løsning av differenslikningen blir da

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\left\{-\tfrac{1}{9} \cdot 2^n + \tfrac{1}{9} \cdot (-1)^n + \tfrac{2}{3} \cdot n \cdot 2^n\right\}}}.$$

Oppgave 2.3.5.

2.4. Høyere ordens lineære differenslikninger.

Når du først kan løse lineære 2. ordens differenslikninger, er du også i stand til å løse høyere ordens lineære differenslikninger. De setningene vi har utledet foran, er fremdeles gyldige (med de modifikasjonene som må til fordi den karakteristiske likningen får høyere grad). Istedenfor å ramse opp teori skal jeg illustrere dette med et enkelt eksempel.

Eksempel 2.4.1: Løs differenslikningen

$$x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2} + 3x_{n-3}.$$

Løsning: Den karakteristiske likningen blir

$$t^3 = 3t^2 - t + 3 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2(t-3) + (t-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t-3)(t^2+1) = 0$$

Røttene til den karakteristiske likningen blir da

$$t_1 = 3, \qquad t_2 = i = e^{\frac{1}{2}\pi i}, \quad t_3 = -i = e^{-\frac{1}{2}\pi i}.$$

Den generelle løsningen av differenslikningen blir

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\left\{C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot \cos\left(n \cdot \tfrac{1}{2}\pi\right) + C_3 \sin\left(n \cdot \tfrac{1}{2}\pi\right)\right\}}}.$$

Dersom vi kjenner de tre første leddene i tallfølgen, kan vi bestemme C_1, C_2 og C_3.

Oppgave 2.4.1.

2.5. System av lineære 1.ordens differenslikninger.

I praksis kommer vi ofte bort i at ledd i en tallfølge avhenger ikke bare av tidligere ledd i samme tallfølgen, men også av tidligere ledd i andre tallfølger. Hvis vi for eksempel lar bestandene av torsk i Barentshavet i år *n* utgjøre ledd i en tallfølge, og bestandene av lodde utgjøre ledd i en annen tallfølge, vil torskebestandene og loddebestandene avhenge av hverandre.

Vi skal begrense oss til to tallfølger $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$, der vekselvirkningen mellom leddene er gitt ved lineære homogene 1.ordens differenslikninger. Slike systemer kan da skrives

$$\begin{aligned} x_n &= a\cdot x_{n-1} + b\cdot y_{n-1} \\ y_n &= c\cdot x_{n-1} + d\cdot y_{n-1} \end{aligned}$$

der *a*, *b*, *c* og *d* er konstanter. Det er imidlertid mer vanlig å bruke skrivemåten

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a\cdot x_n + b\cdot y_n \\ y_{n+1} &= c\cdot x_n + d\cdot y_n \end{aligned}$$

For å konkretisere dette stoffet, kan vi se på eksemplet nedenfor:

Eksempel 2.5.1: Sett opp de 5 første leddene i tallfølgene $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ gitt ved

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_n + 2y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + 2y_n \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Løsning: Vi regner ut x_{n+1} og y_{n+1} for $n = 0, 1, \cdots, 3$, og får:

$x_0 = 1$	$y_0 = 0$
$x_1 = -x_0 + 2y_0 = -1 + 2\cdot 0 = -1$	$y_1 = 2x_0 + 2y_0 = 2\cdot 1 + 2\cdot 0 = 2$
$x_2 = -x_1 + 2y_1 = -(-1) + 2\cdot 2 = 5$	$y_2 = 2x_1 + 2y_1 = 2\cdot(-1) + 2\cdot 2 = 2$
$x_3 = -x_2 + 2y_2 = -5 + 2\cdot 2 = -1$	$y_3 = 2x_2 + 2y_2 = 2\cdot 5 + 2\cdot 2 = 14$
$x_4 = -x_3 + 2y_3 = -(-1) + 2\cdot 14 = 29$	$y_4 = 2x_3 + 2y_3 = 2\cdot(-1) + 2\cdot 14 = 26$

Når vi skal løse et slikt system av differenslikninger (d.v.s. finne formler for x_n og y_n) eliminerer vi en av de ukjente på en slik måte at vi skaffer oss en 2.ordens differenslikning i den andre ukjente. Etter at denne likningen er løst, kan vi finne den siste ukjente. Vi må imidlertid holde tunga rett i munnen under disse operasjonene, noe eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 2.5.2: Løs systemet av differenslikninger i eksemplet foran:

$$\begin{aligned} (1)\quad x_{n+1} &= -x_n + 2y_n \\ (2)\quad y_{n+1} &= 2x_n + 2y_n \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Jeg starter med å forskyve likning (1) ett ledd utover i tallfølgene, slik at likningen blir

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= -x_{n+1} + 2y_{n+1} \\ &= -x_{n+1} + 2(2x_n + 2y_n) \\ &= -x_{n+1} + 4x_n + 4y_n \end{aligned}$$

Så løser jeg y_n av likning (1):

$$y_n = \tfrac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$$

og setter inn:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= -x_{n+1} + 4x_n + 4y_n \\ &= -x_{n+1} + 4x_n + 4\cdot\tfrac{1}{2}(x_{n+1} + x_n) \\ &= -x_{n+1} + 4x_n + 2x_{n+1} + 2x_n \\ &= x_{n+1} + 6x_n \end{aligned}$$

Dermed har vi skaffet oss den lineære homogene 2.ordens differenslikningen

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0\,.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 - t - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-6)}}{2} = \frac{1\pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Den generelle løsningen blir da

$$x_n = \underline{C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot (-2)^n} \,.$$

Så må vi finne y_n. Vi benytter da at

$$\begin{aligned} y_n &= \tfrac{1}{2}\left(x_{n+1} + x_n\right) = \tfrac{1}{2}\left(\left(C_1 \cdot 3^{n+1} + C_2 \cdot (-2)^{n+1}\right) + \left(C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot (-2)^n\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(C_1\left(3^{n+1} + 3^n\right) + C_2\left((-2)^{n+1} + (-2)^n\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(C_1 \cdot 3^n\left(3^1 + 1\right) + C_2 \cdot (-2)^n\left((-2)^1 + 1\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(4C_1 \cdot 3^n - C_2 \cdot (-2)^n\right) \\ &= \underline{2C_1 \cdot 3^n - \tfrac{1}{2}C_2 \cdot (-2)^n} \end{aligned}$$

Nå gjenstår det å finne C_1 og C_2. Vi benytter da at

$$\begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} C_1 \cdot 3^0 + C_2 \cdot (-2)^0 = 1 \\ 2C_1 \cdot 3^0 - \tfrac{1}{2}C_2 \cdot (-2)^0 = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 - \tfrac{1}{2}C_2 = 0 \end{matrix}$$

Vi multipliserer den nederste likningen ned 2 og legger sammen likningene. Da får vi

$$5C_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{\tfrac{1}{5}} \,.$$

Av den øverste likningen følger nå

$$C_2 = 1 - C_1 = 1 - \tfrac{1}{5} = \underline{\tfrac{4}{5}} \,.$$

Dermed har vi løsningen

$$x_n = \tfrac{1}{5}\cdot 3^n + \tfrac{4}{5}\cdot(-2)^n = \underline{\underline{\tfrac{1}{5}\left(3^n + 4\cdot(-2)^n\right)}} \,.$$

$$y_n = 2\cdot\tfrac{1}{5}\cdot 3^n - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot(-2)^n = \underline{\underline{\tfrac{2}{5}\left(3^n - (-2)^n\right)}} \,.$$

Kontroller selv at disse formlene gir de samme verdiene som vi regnet oss fram til i eksemplet foran.

Oppgave 2.5.1.

Du synes sikkert at framgangsmåten foran er plundrete. Og det blir mye verre dersom vi har større likningssystem med flere ukjente, eller dersom likningene er inhomogene. Trøst deg med at i heftet om ***matriser og determinanter*** er det vist hvordan du kan benytte matrise-metoder til å løse slike problem på en mye enklere måte.

3. Blandede oppgaver.

3.1. Oppgaver.

Her følger en samling blandede oppgaver, vesentlig tidligere eksamensoppgaver.
Du finner løsningsforslag ved å klikke på oppgavenummeret.

Oppgave 1

En tallfølge $\{a_n\}$ er gitt ved differenslikningen

$$a_n = 2a_{n-1} - n, \qquad a_0 = 2.$$

a) Sett opp en tabell over de 5 første leddene i tallfølgen.
Gjett på en formel for a_n på grunnlag av tabellen.
Bruk induksjon til å vise at formelen stemmer.

b) Finn også en formel for a_n ved å løse differenslikningen.

Oppgave 2

Løs disse differenslikningene med de gitte startverdiene:

a) $2x_n + x_{n-1} = n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots,\ x_0 = 0$.

b) $a_n + a_{n-1} = n^2$ når $n = 1, 2, 3, \cdots,\ a_0 = 2$.

c) $x_n = x_{n-1} + 11 - 2n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots,\ x_0 = 0$.

d) $x_n = 3x_{n-1} - 2^n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots,\ x_0 = 1$

e) $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ når $n = 0, 1, 2, 3, \cdots,\ x_0 = 6$.

f) $x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots,\ x_0 = 6$.

Oppgave 3

a) Løs differenslikningen

$$x_{n+1} = 2x_n - 3 \text{ når } x_0 = 5.$$

b) I differenslikningen nedenfor er *a* et positivt tall. Finn den generelle løsningen av differenslikningen

$$x_{n+1} = 2x_n + a^n$$

i disse to tilfellene:
1) når $a \neq 2$. Svaret skal uttrykkes ved *a*.
2) når $a = 2$.

Oppgave 4

a) På ei isolert øy befinner det seg en elgbestand. Dersom det ikke drives jakt, utvikler bestanden seg slik at $x_{n+1} = \frac{5}{4}x_n$ der x_n er antall dyr i år *n*. I året $n = 0$ er størrelsen på bestanden $x_0 = 200$ dyr. Da fastsettes en jaktkvote på 20 dyr pr. år, og det fastsettes også at kvoten skal øke med 2 dyr pr. år de kommende årene. Vi antar at hele kvoten blir felt.

I) Sett opp en differenslikning som angir sammenhengen mellom x_{n+1}, x_n og *n*.
II) Løs denne differenslikningen.

b) En fagforening sliter med stadig synkende medlemstall. Det viser seg at 20% av medlemmene normalt ikke fornyer sitt medlemskap fra ett år til det neste. For å rette opp situasjonen, satser fagforeningen på nyrekruttering, og vil verve 5000 nye medlemmer hvert år i *n* år framover. La x_n være antall medlemmer i fagforeningen etter *n* år.

I) Sett opp en differenslikning der x_{n+1} uttrykkes ved x_n når 80% fornyer medlemskapet fra ett år til det neste, og det verves 5000 nye medlemmer i året.

II) Finn antall medlemmer i fagforeningen om *n* år når antall medlemmer i startåret ($n = 0$) er $x_0 = 50\,000$.

Oppgave 5

a) Vi har gitt differenslikningen

$$x_n = \tfrac{3}{2}x_{n-1} - \tfrac{1}{2}x_{n-2} \quad \text{når} \quad n = 2, 3, 4, \cdots, \; x_0 = 2, \; x_1 = 3.$$

1) Finn x_2 og x_3.

2) Løs likningen.

b) Løs differenslikningen nedenfor med de gitte startverdiene:

$$x_n = \tfrac{3}{2}x_{n-1} + x_{n-2} \text{ når } n = 2, 3, 4, \cdots, \; x_0 = 0, \; x_1 = 5.$$

c) I en tallfølge er første ledd $x_1 = 1$ og andre ledd $x_2 = 4$. Videre er hvert ledd gjennomsnittet av de to foregående leddene. Finn en formel for ledd nr. *n* i tallfølgen.

Oppgave 6

a) Løs differenslikningen nedenfor med de gitte startverdiene:

$$a_{n+2} = \tfrac{1}{4}a_n + n \text{ når } n = 2, 3, 4, \cdots, \; a_0 = a_1 = 0.$$

b) En differenslikning er gitt ved

$$x_n = -\tfrac{1}{2}x_{n-1} + \tfrac{1}{2}x_{n-2} + 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \quad \text{når} \quad n = 3, 4, 5, \cdots, \; x_1 = \tfrac{1}{2}, \; x_2 = \tfrac{3}{2}.$$

I) Regn ut x_3 og x_4.

II) Løs differenslikningen.

c) Løs differenslikningen

$$x_n = 4x_{n-2} - 3n + 2 \text{ når } n = 2, 3, 4, \cdots, \; x_0 = 4, \; x_1 = 7.$$

d) Løs differenslikningen

$$x_n = x_{n-1} - \tfrac{1}{4}x_{n-2} + \tfrac{1}{4}n \text{ når } n = 2, 3, 4, \cdots, \; x_0 = 0, \; x_1 = 1.$$

e) Vi har gitt differenslikningen

$$x_n = \tfrac{3}{2}x_{n-1} - \tfrac{1}{2}x_{n-2} + 1 \text{ når } n = 2, 3, 4\cdots, \qquad x_0 = 0, \qquad x_1 = 1.$$

1) Finn x_2 og x_3 på grunnlag av de gitte opplysningene.

2) Løs differenslikningen.

f) Løs differenslikningen

$$x_n = 4x_{n-2} - 3n + 2 \text{ når } n = 2, 3, 4\cdots, \; x_0 = 0, \qquad x_1 = 3.$$

Oppgave 7

a) 1) Løs likningen

$$\lambda^2 + 4\lambda + 16 = 0 .$$

Tegn inn løsningene i det komplekse planet, og skriv løsningene på eksponentiell form.

2) Bruk bl.a. resultatet ovenfor til å finne den generelle løsningen av differenslikningen

$$x_n = -4x_{n-1} - 16x_{n-2} + 7n .$$

b) 1) Løs differenslikningen

$$x_n = -2x_{n-2} \qquad \text{når} \qquad n = 2, 3, 4, \cdots, \; x_0 = 1, \;\; x_1 = 0$$

og vis at løsningen blir

$$x_n = \sqrt{2}^{\,n} \cos\left(n \cdot \tfrac{1}{2}\pi\right).$$

2) Vis at denne løsningen kan skrives

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, 7, \cdots \\ (-2)^{\frac{1}{2}n} & \text{når} \quad n = 0, 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

c) En tallfølge er gitt ved

$$x_0 = 0 , \qquad x_1 = 1 ,$$

$$x_n = n - x_{n-1} - x_{n-2} \;\text{ når }\; n = 2, 3, 4 \cdots .$$

1) Skriv ned de 5 første tallene i denne tallfølgen.
2) Løs differenslikningen.

Oppgave 8

Vi har gitt systemet av differenslikninger nedenfor:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 2y_n - 1 \\ y_{n+1} &= -x_n + 3y_n \end{aligned}\right\} \text{ når } n = 0,1,2,\cdots$$

$$x_0 = 1 , \;\; y_0 = 2 .$$

Vis at likningssystemet kan omformes til

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2 ,$$

og løs det gitte likningssystemet.

3.2. Løsninger.

Oppgave 1

$$a_n = 2a_{n-1} - n , \qquad a_0 = 2 .$$

a)

n	0	1	2	3	4
a_n	2	$2 \cdot 2 - 1 = 3$	$2 \cdot 3 - 2 = 4$	$2 \cdot 4 - 3 = 5$	$2 \cdot 5 - 4 = 6$

Tallene i tabellen tyder på at $a_n = \underline{\underline{n + 2}}$.

Da er

$$a_k = k+2$$

og

$$a_{k+1} = \left(k+1\right)+2 = k+3 .$$

Antar at formelen stemmer for $n=k$. Den gitte differenslikningen gir da at

$$a_{k+1} = 2a_k - \left(k+1\right) = 2\left(k+2\right) - k - 1 = 2k+4-k-1 = \underline{k+3} .$$

Vi ser at dersom formelen stemmer for $n=k$, så stemmer den også for $n=k+1$. Videre vet vi at den stemmer for $n=1$. Da må den stemme for alle heltallige $n \geq 1$.

b) Den tilhørende homogen likningen har løsningen

$$h_n = \underline{A \cdot 2^n} .$$

Prøver en partikulær løsning

$$p_n = Bn + C \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = B\left(n-1\right) + C = Bn + \left(C-B\right).$$

Innsetting i den gitte likningen:

$$Bn + C - 2\left(Bn + (C-B)\right) = -n \quad \Leftrightarrow \quad \left(-B+1\right)n + \left(2B-C\right) = 0 .$$

Dersom denne likningen skal være oppfylt for alle verdier av *n*, må vi ha

$$B - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \underline{1}$$

og

$$2B - C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2B = \underline{2} .$$

Altså er løsningen

$$a_n = \underline{A \cdot 2^n + n + 2} .$$

Finner til slutt *A*:

$$a_0 = A \cdot 2^0 + 0 + 2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A = 0} .$$

Den komplette løsningen blir derfor

$$a_n = \underline{\underline{n+2}} .$$

Oppgave 2a

$$2x_n + x_{n-1} = n \quad \Leftrightarrow \quad x_n + \tfrac{1}{2}x_{n-1} = \tfrac{1}{2}n .$$

Den tilhørende homogene likningen blir

$$2h_n + h_{n-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_n = -\tfrac{1}{2}h_{n-1}$$

og har løsning

$$h_n = C \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n .$$

Setter inn en partikulær løsning av formen

$$p_n = An + B$$

og får

$$2p_n + p_{n-1} = n \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(An + B\right) + \left(A\left(n-1\right) + B\right) = n$$

$$\Leftrightarrow \quad 2An + 2B + An - A + B - n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(3A-1\right)n + \left(3B - A\right) = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for alle verdier av *n*, må vi ha

$$3A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{\tfrac{1}{3}}$$

og

$$3B - A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \tfrac{1}{3}A = \underline{\tfrac{1}{9}} .$$

Altså er

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{1}{3}n + \tfrac{1}{9}}.$$

Finner C:

$$x_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^0 + \tfrac{1}{3} \cdot 0 + \tfrac{1}{9} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C + \tfrac{1}{9} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{-\tfrac{1}{9}}.$$

Da blir

$$x_n = h_n + p_n = \underline{\underline{-\tfrac{1}{9}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{1}{3}n + \tfrac{1}{9}}}.$$

Oppgave 2b

$$a_n + a_{n-1} = n^2$$

Den homogene likningen blir

$$h_n + h_{n-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_n = -h_{n-1}$$

og har løsningen

$$h_n = A \cdot (-1)^n.$$

Søker en partikulær løsning av formen

$$p_n = C_2 n^2 + C_1 n + C_0.$$

Innsetting:

$$p_n + p_{n-1} = n^2$$

$$\left(C_2 n^2 + C_1 n + C_0\right) + \left(C_2 (n-1)^2 + C_1 (n-1) + C_0\right) = n^2$$

$$C_2 n^2 + C_1 n + C_0 + C_2 n^2 - 2C_2 n + C_2 + C_1 n - C_1 + C_0 - n^2 = 0$$

$$(2C_2 - 1)n^2 + (2C_1 - 2C_2)n + (2C_0 - C_1 + C_2) = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for alle verdier av n , må vi ha at

$$2C_2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \underline{\tfrac{1}{2}}.$$

$$2C_1 - 2C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = C_1 = \underline{\tfrac{1}{2}}.$$

$$2C_0 - C_2 + C_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_0 = \underline{0}.$$

Altså er

$$a_n = h_n + p_n = \underline{A(-1)^n + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n}.$$

$$a_0 = A(-1)^0 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{2}.$$

Alt i alt blir

$$\underline{\underline{a_n = 2(-1)^n + \tfrac{1}{2}n(n+1)}}.$$

Oppgave 2c

$$x_n = x_{n-1} + 11 - 2n.$$

Den tilhørende homogene likningen

$$h_n = h_{n-1}$$

har åpenbart løsningen

$$h_n = C \text{ (en konstant)}.$$

Det er nærliggende å prøve en partikulær løsning av formen

$$p_n = An + B.$$

Men siden en slik partikulær løsning inneholder en konstant, og løsningen av den homogene likningen er en konstant, prøver vi heller

$$p_n = n(An+B) = An^2 + Bn\,.$$

Da blir

$$p_{n-1} = A(n-1)^2 + B(n-1) = An^2 + (B-2A)n + (A-B)\,.$$

Innsetting:

$$p_n = p_{n-1} + 11 - 2n$$

$$An^2 + Bn = An^2 + (B-2A)n + (A-B) + 11 - 2n$$

Dersom denne likningen skal være oppfylt for alle verdier av *n*, må vi ha at

$$B = B - 2A - 2 \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{-1}$$

og

$$0 = A - B + 11 \quad \Leftrightarrow \quad B = 11 + A = 11 - 1 = \underline{10}\,.$$

Altså er

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C - n^2 + 10n}\,.$$

Finner *C*:

$$x_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{0}\,.$$

Da blir

$$x_n = \underline{\underline{-n^2 + 10n}}\,.$$

Oppgave 2d

$$x_n = 3x_{n-1} - 2^n\,, \quad x_0 = 1\,.$$

Dette er en inhomogen likning, der løsningen av den tilhørende homogene likningen er

$$h_n = C \cdot 3^n\,.$$

Søker en partikulær løsning av formen

$$p_n = A \cdot 2^n \quad \Leftrightarrow \quad p_{n-1} = A \cdot 2^{n-1}\,.$$

Finner *A* ved innsetting:

$$p_n = 3p_{n-1} - 2^n \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot 2^n = 3 \cdot A \cdot 2^{n-1} - 2^n \quad \Leftrightarrow \quad A = 3A \cdot 2^{-1} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad A - \tfrac{3}{2}A = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}A = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A = 2}$$

Da er

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n}\,.$$

Finner *C* ved hjelp av startbetingelsen:

$$x_0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C \cdot 3^0 + 2 \cdot 2^0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = -1\,.$$

Løsningen blir da

$$x_n = \underline{\underline{-\left(3^n\right) + 2 \cdot 2^n}}\,.$$

Oppgave 2e

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}x_n + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n,\ x_0 = 6\,.$$

Den tilhørende homogene likningen blir

$$x_{h,n+1} = \tfrac{1}{2}x_{h,n}$$

som har løsningen

$$x_{h,n} = C \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n .$$

Prøver en partikulær løsning av formen

$$x_{p,n} = A \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad x_{p,n+1} = A \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n+1} .$$

Setter inn i likningen for å finne *A*:

$$x_{p,n+1} = \tfrac{1}{2} x_{p,n} + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad A\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} = \tfrac{1}{2} \cdot A\left(\tfrac{1}{3}\right)^n + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n .$$

Deler på $\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$ (eller ganger med 3^n) og får

$$A\left(\tfrac{1}{3}\right)^1 = \tfrac{1}{2} \cdot A + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{2}A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{6}A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A = -6} .$$

Løsningen av likningen er derfor av formen

$$x_n = \underline{C \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 6 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^n} .$$

Benytter startverdien til å finne *C*:

$$x_0 = C \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 - 6 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad C - 6 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 12} .$$

Komplett løsning:

$$x_n = \underline{\underline{12 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 6 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^n}} = \underline{\underline{6\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\tfrac{1}{3}\right)^n\right)}}$$

Oppgave 2f

$$x_n = \tfrac{1}{2} x_{n-1} + n .$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen er åpenbart

$$x_{h,n} = C \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n .$$

Finner en partikulær løsning av formen

$$x_{p,n} = A \cdot n + B \quad \Leftrightarrow \quad x_{p,n-1} = A(n-1) + B .$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$A \cdot n + B = \tfrac{1}{2}\left(A(n-1) + B\right) + n$$

$$A \cdot n + B = \tfrac{1}{2} A \cdot n - \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B + n$$

$$\left(\tfrac{1}{2}A - 1\right)n + \left(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}A\right) = 0$$

Dette skal være oppfylt for alle verdier av *n*. Da må

$$\tfrac{1}{2}A - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A = 2}$$

og

$$\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = -A = \underline{-2} .$$

Løsningen av differenslikningen blir da

$$x_n = x_{h,n} + x_{p,n} = \underline{C\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 2} .$$

Bruker at $x_0 = 6$ til å finne *C*:

$$x_0 = C\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + 2 \cdot 0 - 2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad C = 6 + 2 = \underline{8} .$$

Komplett løsning blir da

$$x_n = \underline{\underline{8\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 2}} = \underline{\underline{2^{3-n} + 2n + 2}} .$$

Oppgave 3

a) $x_{n+1} = 2x_n - 3$.

Ser at løsningen av den tilhørende homogene likningen er

$$h_n = A \cdot 2^n .$$

En partikulær løsning må være en konstant *C*, slik at

$$C = 2C - 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{3} .$$

Da er den generelle løsningen

$$x_n = h_n + p_n = \underline{A \cdot 2^n + 3} .$$

Siden $x_0 = 5$, blir

$$x_0 = A \cdot 2^0 + 3 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad A = 2 .$$

Løsningen blir derfor

$$x_n = 2 \cdot 2^n + 3 = \underline{\underline{2^{n+1} + 3}} .$$

b) $x_{n+1} = 2x_n + a^n$.

Vet at løsningen av den tilhørende homogene likningen er

$$h_n = A \cdot 2^n .$$

Dersom $a \neq 2$, er den partikulære løsningen av formen

$$p_n = C \cdot a^n .$$

Innsetting gir

$$C \cdot a^{n+1} = 2 \cdot C \cdot a^n + a^n \quad \Leftrightarrow \quad aC = 2C + 1 \quad \Leftrightarrow \quad C\left(a - 2\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{a-2} .$$

Den generelle løsningen blir da

$$x_n = h_n + p_n = \underline{\underline{A \cdot 2^n + \frac{a^n}{a-2}}} .$$

Dersom $a = 2$, blir likningen

$$x_{n+1} = 2x_n + 2^n .$$

Siden 2^n allerede inngår i den partikulære løsningen, må vi prøve en partikulær løsning av formen

$$h_n = C \cdot n \cdot 2^n \quad \Leftrightarrow \quad h_{n+1} = C \cdot \left(n+1\right) 2^{n+1} .$$

Innsetting:

$$C \cdot \left(n+1\right) 2^{n+1} = 2Cn \cdot 2^n + 2^n \quad \Leftrightarrow \quad C\left(n+1\right) \cdot 2 = 2Cn + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2Cn + 2C = 2Cn + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{\tfrac{1}{2}}$$

Den generelle løsningen blir da

$$x_n = h_n + p_n = A \cdot 2^n + \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n = \underline{\underline{\left(A + \tfrac{n}{2}\right) \cdot 2^n}} .$$

Oppgave 4a

I) Når vi fjerner 20 dyr fra bestanden, og øker dette tallet med 2 for hvert år, vil bestanden i år *n* være gitt ved

$$\underline{\underline{x_{n+1} = \tfrac{5}{4} x_n - \left(20 + 2n\right)}} .$$

II) Den homogene likningen blir

$$h_{n+1} - \tfrac{5}{4}h_n = 0$$

som har løsning

$$h_n = A \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^n .$$

Prøver en partikulær løsning av formen

$$p_n = B + Cn \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = B + C(n+1) .$$

Innsetting for å finne *B* og *C*:

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \tfrac{5}{4}p_n - 20 - 2n \quad &\Leftrightarrow \quad B + C(n+1) = \tfrac{5}{4}(B + Cn) - 20 - 2n \\ &\Leftrightarrow \quad B + Cn + C - \tfrac{5}{4}B - \tfrac{5}{4}Cn + 20 + 2n = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(-\tfrac{1}{4}C + 2\right)n + \left(-\tfrac{1}{4}B + C + 20\right) = 0 \end{aligned} .$$

Dersom denne likningen skal være oppfylt for alle verdier av *n*, må vi ha at

$$-\tfrac{1}{4}C + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{8}$$

og

$$-\tfrac{1}{4}B + C + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = 4C + 80 = 4 \cdot 8 + 80 = \underline{112}$$

Da blir

$$x_n = h_n + p_n = \underline{A \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^n + 112 + 8n} .$$

Finner til slutt *A*:

$$x_0 = A\left(\tfrac{5}{4}\right)^0 + 112 + 8 \cdot 0 = 200 \quad \Leftrightarrow \quad A = 200 - 112 = \underline{88} .$$

Altså er

$$x_n = \underline{\underline{88 \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^n + 112 + 8n}} .$$

Oppgave 4b

I) Lar antall medlemmer i år *n* være x_n. Siden 80% av medlemmene fornyer medlemskapet, og det kommer 5000 nye medlemmer til, blir

$$x_{n+1} = 0.80x_n + 5000 .$$

II) Løsningen av den tilhørende homogene likningen er

$$h_n = C \cdot 0.80^n .$$

En mulig partikulær løsning er

$$p_n = K \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = K .$$

Setter inn:

$$K = 0.80K + 5000 \quad \Leftrightarrow \quad 0.20K = 5000 \quad \Leftrightarrow \quad K = \underline{25000} .$$

Komplett løsning:

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C \cdot 0.80^n + 25000} .$$

Finner *C*:

$$x_0 = C \cdot 0.80^0 + 25000 = C + 25000 = 50000 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{25000} .$$

Altså blir

$$x_n = 25000 \cdot 0.80^n + 25000 = \underline{\underline{25000\left(0.80^n + 1\right)}} .$$

Oppgave 5a

$$x_n = \tfrac{3}{2}x_{n-1} - \tfrac{1}{2}x_{n-2}$$

1) $x_2 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_0 = \frac{3}{2}\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 2 = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}.$

$x_3 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\cdot 3 = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}.$

2) $x_n = \frac{3}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-2} \quad\Leftrightarrow\quad x_n - \frac{3}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2} = 0.$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Da blir den generelle løsningen

$$x_n = \underline{A\cdot 1^n + B\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n}.$$

Finner A og B:

$x_0 = 2 \quad\Leftrightarrow\quad A + B = 2$

$x_1 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad A + \frac{1}{2}B = 3$

Trekker nederste likning fra øverste, og får

$\frac{1}{2}B = -1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{B = -2}.$

Av øverste likning følger nå

$A = 2 - B = 2 - (-2) = \underline{4}.$

Løsningen av likningen blir da

$$x_n = \underline{\underline{4 - 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n}} = \underline{\underline{4 - 2^{1-n}}}.$$

Oppgave 5b

$x_n = \frac{3}{2}x_{n-1} + x_{n-2} \quad\Leftrightarrow\quad x_n - \frac{3}{2}x_{n-1} - x_{n-2} = 0.$

Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 - \frac{3}{2}t - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Den generelle løsningen av diffferenslikningen er derfor

$$x_n = \underline{A\cdot 2^n + B\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n}.$$

Bruker startbetingelsene til å finne A og B:

$x_0 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad A\cdot 1 + B\cdot 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad B = -A$

$x_1 = 5 \quad\Leftrightarrow\quad A\cdot 2^1 + B\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = 5 \quad\Leftrightarrow\quad 2A + (-A)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$

$\quad\Leftrightarrow\quad \frac{5}{2}A = 5 \quad\Leftrightarrow\quad A = \underline{2} \quad\Leftrightarrow\quad B = -A = \underline{-2}$

$$x_n = 2\cdot 2^n - 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = \underline{\underline{2^{n+1} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}}}, \; n = 0, 1, \cdots$$

Oppgave 5c

Når neste tall i tallfølgen er gjennomsnittet av de to foregående, må vi ha at

$$x_n = \tfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right) = \tfrac{1}{2}x_{n-1} + \tfrac{1}{2}x_{n-2}$$

Den tilhørende karakteristiske likningen blir

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Løsningen av differenslikningen blir da

$$x_n = \underline{C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n}.$$

Finner konstantene:

$$x_1 = C_1 + C_2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^1 = C_1 - \tfrac{1}{2}C_2 = 1.$$

$$x_2 = C_1 + C_2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 = C_1 + \tfrac{1}{4}C_2 = 4.$$

Trekker disse likningene fra hverandre, og får

$$\tfrac{3}{4}C_2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \underline{4}.$$

Da blir

$$C_1 = 1 + \tfrac{1}{2}C_2 = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 4 = \underline{3}$$

slik at løsningen av differenslikningen blir

$$\underline{\underline{x_n = 3 + 4\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n}}.$$

Oppgave 6a

$$a_{n+2} = \tfrac{1}{4}a_n + n, \qquad a_0 = a_1 = 0.$$

Den tilhørende homogene likningen blir

$$h_{n+2} - \tfrac{1}{4}h_n = 0$$

som har karakteristisk likning

$$t^2 - \tfrac{1}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \underline{\pm\tfrac{1}{2}}.$$

Altså er løsningen av den homogene likningen

$$h_n = \underline{C_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + C_2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n}.$$

Søker en partikulær løsning av formen

$$p_n = An + B \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+2} = A(n+2) + B.$$

Setter inn i den gitte likningen:

$$A(n+2) + B = \tfrac{1}{4}(An + B) + n \quad \Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{3}{4}A - 1\right)n + \left(2A + \tfrac{3}{4}B\right) = 0$$

Dersom dette skal være oppfylt for alle n, må vi ha at

$$\tfrac{3}{4}A - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{\tfrac{4}{3}}$$

og at

$$2A + \tfrac{3}{4}B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = -\tfrac{8}{3}A = -\tfrac{8}{3} \cdot \tfrac{4}{3} = \underline{-\tfrac{32}{9}}.$$

Den komplette løsningen blir da

$$a_n = h_n + p_n = \underline{C_1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{4}{3}n - \tfrac{32}{9}}.$$

Finner til slutt konstantene:

$$a_0 = C_1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + C_2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^0 + \tfrac{4}{3} \cdot 0 - \tfrac{32}{9} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 = \tfrac{32}{9}$$

$$a_1 = C_1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + C_2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^1 + \tfrac{4}{3} \cdot 1 - \tfrac{32}{9} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 - C_2 = \tfrac{40}{9}$$

Legger sammen disse likningene, og får

$$2C_1 = \tfrac{72}{9} \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{4}.$$

$$C_2 = \tfrac{32}{9} - C_1 = \tfrac{32}{9} - 4 = \underline{-\tfrac{4}{9}}.$$

Altså blir løsningen av likningen

$$a_n = \underline{\underline{4\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \tfrac{4}{9}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{4}{3}n - \tfrac{32}{9}}}.$$

Oppgave 6b

$$x_n = -\tfrac{1}{2}x_{n-1} + \tfrac{1}{2}x_{n-2} + 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \quad \text{når} \quad n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ x_1 = \tfrac{1}{2},\ x_2 = \tfrac{3}{2}.$$

1)
$$x_3 = -\tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_1 + 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = -\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{8} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{8}}}.$$

$$x_4 = -\tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_2 + 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = -\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{8}\right) + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2} + 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \tfrac{1}{16} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{16} = \underline{\underline{1}}.$$

2) Omformer likningen til

$$x_n + \tfrac{1}{2}x_{n-1} - \tfrac{1}{2}x_{n-2} = 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Dette er en inhomogen likning. Finner først løsningen av den homogene likningen:

$$t^2 + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t = \frac{-\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 4\cdot\tfrac{1}{2}}}{2} = \frac{-\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}}}{2} = \frac{-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}}{2} = \begin{cases} \tfrac{1}{2} \\ \underline{-1} \end{cases}$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen blir da

$$h_n = \underline{A\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + B\cdot(-1)^n}.$$

Siden faktoren $\tfrac{1}{2}$ allerede inngår i løsningen av den homogene likningen, prøver jeg en partikulær løsning

$$p_n = C\cdot n\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Setter inn i likningen:

$$C\cdot n\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = -\tfrac{1}{2}\cdot C\cdot(n-1)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \tfrac{1}{2}\cdot C\cdot(n-2)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Multipliserer med 2^n og får:

$$C\cdot n = -C\cdot(n-1) + 2C\cdot(n-2) + 3 = -C\cdot n + C + 2C\cdot n - 4C + 3 = C\cdot n - 3C + 3$$

$$\Leftrightarrow\quad -3C + 3 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad C = \underline{1}.$$

Løsningen er da

$$x_n = h_n + p_n = A\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + B\cdot(-1)^n + n\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \underline{(A+n)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + B\cdot(-1)^n}.$$

Finner konstantene A og B:

$$x_1 = (A+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + B\cdot(-1)^1 = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2} - B = \tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}A - B = 0.$$

$$x_2 = (A+2)\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + B\cdot(-1)^2 = \tfrac{1}{4}A + \tfrac{1}{2} + B = \tfrac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{4}A + B = 1.$$

Legger sammen disse to likningene:

$$\tfrac{3}{4}A = 1 \quad\Leftrightarrow\quad A = \underline{\tfrac{4}{3}}$$

som videre gir

$$B = \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3} = \underline{\tfrac{2}{3}}.$$

Komplett løsning blir da

$$x_n = \underline{\underline{\left(\tfrac{4}{3} + n\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{2}{3}\cdot(-1)^n}}.$$

Oppgave 6c

$$x_n = 4x_{n-2} - 3n + 2\,,\ x_0 = 4\,,\ x_1 = 7\,.$$

Vet at løsningen er av formen $x_n = h_n + p_n$ der h_n er løsning av den homogene likningen mens p_n er en partikulær løsning. Finner først h_n:

$$t^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm 2$$

slik at

$$h_n = \underline{C_1 \cdot 2^n + C_2 \left(-2\right)^n}\,.$$

Prøver en partikulær løsning av formen $p_n = An + B$. Setter inn:

$$An + B = 4\Big(A\big(n-2\big) + B\Big) - 3n + 2 = 4An - 8A + 4B - 3n + 2$$

$$\big(-3A + 3\big)n + \big(8A - 3B - 2\big) = 0$$

Dersom denne identiteten skal være oppfylt for alle verdier av *n*, må vi ha

$$-3A + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 1\,.$$

$$8A - 3B - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3B = 8A - 2 = 8 \cdot 1 - 2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad B = 2\,.$$

Den partikulære løsningen blir da

$$p_n = \underline{n + 2}$$

slik at den generelle løsningen av differenslikningen blir

$$x_n = \underline{C_1 \cdot 2^n + C_2 \left(-2\right)^n + n + 2}\,.$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_0 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 \cdot 2^0 + C_2 \left(-2\right)^0 + 0 + 2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 = 2\,.$$

$$x_1 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 \cdot 2^1 + C_2 \left(-2\right)^1 + 1 + 2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 2C_1 - 2C_2 = 4\,.$$

Multipliserer øverste likning med 2 og legger sammen:

$$4C_1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 2\,.$$

Da blir

$$C_2 = 2 - C_1 = 2 - 2 = 0\,.$$

Løsningen blir derfor

$$x_n = \underline{\underline{2 \cdot 2^n + n + 2}} = \underline{\underline{2^{n+1} + n + 2}}\,.$$

Oppgave 6d

$$x_n = x_{n-1} - \tfrac{1}{4}x_{n-2} + \tfrac{1}{4}n \text{ når } n = 2, 3, 4, \cdots$$

Dette er en inhomogen differenslikning. Løser først den homogene likningen

$$h_n = h_{n-1} - \tfrac{1}{4}h_{n-2}$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 = \lambda - \tfrac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda + \tfrac{1}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \tfrac{1}{4}}}{2} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

Siden den karakteristiske likningen har to sammenfallende røtter, blir

$$h_n = \underline{C_1 \cdot n \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n}\,.$$

Finner deretter en partikulær løsning av formen

$$p_n = An + B\,.$$

$$An + B = \left(A(n-1)+B\right) - \tfrac{1}{4}\left(A(n-2)+B\right) + \tfrac{1}{4}n$$

$$An + B = An - A + B - \tfrac{1}{4}An + \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}B + \tfrac{1}{4}n$$

$$\left(\tfrac{1}{4}A - \tfrac{1}{4}\right)n = -A + \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}B = -\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}B$$

For at dette skal være oppfylt for alle verdier av *n*, må vi ha

$$\tfrac{1}{4}A - \tfrac{1}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 1$$

$$-\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = -2A = -2\,.$$

Den generelle løsningen er derfor

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C_1 \cdot n \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + n - 2}\,.$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_0 = C_1 \cdot 0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + C_2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + 0 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = 2\,.$$

$$x_1 = C_1 \cdot 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + C_2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + 1 - 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}C_1 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 2\,.$$

Da har vi løsningen

$$x_n = \underline{\underline{2n \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + n - 2}} = \underline{\underline{(n+1) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + n - 2}}\,.$$

Oppgave 6e

1) $x_2 = \tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_0 + 1 = \tfrac{3}{2} \cdot 1 - \tfrac{1}{2} \cdot 0 + 1 = \underline{\underline{\tfrac{5}{2}}}\,.$

$$x_3 = \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_1 + 1 = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot 1 + 1 = \underline{\underline{\tfrac{17}{4}}}\,.$$

2) Løser først den tilhørende homogene likningen:

$$t^2 = \tfrac{3}{2}t - \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \tfrac{1}{2}}}{2} = \frac{\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}}{2} = \begin{cases} 1 \\ \tfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen er derfor

$$h_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \underline{C_1 + C_2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n}\,.$$

Siden konstanten C_1 allerede inngår i løsningen av den homogene likningen, kan vi ikke bruke en konstant som partikulær løsning. Vi prøver isteden en partikulær løsning av formen

$$p_n = A \cdot n$$

som ved innsetting i den gitte likningen gir

$$A \cdot n = \tfrac{3}{2}A \cdot (n-1) - \tfrac{1}{2}A \cdot (n-2) + 1$$

$$An = \tfrac{3}{2}An - \tfrac{3}{2}A - \tfrac{1}{2}An + A + 1$$

$$0 = -\tfrac{3}{2}A + A + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A = 2}$$

Den generelle løsningen av differenslikningen blir derfor

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C_1 + C_2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 2n}\,.$$

Finner konstantene C_1 og C_2 ved hjelp av de gitte startbetingelsene:

$$x_0 = C_1 + C_2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 + 2 \cdot 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -C_1\,.$$

$$x_1 = C_1 + C_2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + 2 \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + \tfrac{1}{2}C_2 + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + \tfrac{1}{2}C_2 = -1\,.$$

Setter inn $C_2 = -C_1$:

$$C_1 + \tfrac{1}{2}\left(-C_1\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}C_1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{-2} \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -C_1 = \underline{2}.$$

Dermed er løsningen av den gitte likningen

$$x_n = \underline{\underline{-2 + 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 2n}} = \underline{\underline{2^{1-n} + 2\left(n-1\right)}}.$$

Oppgave 6f

$$x_n = 4x_{n-2} - 3n + 2, \qquad x_0 = 0, \qquad x_1 = 3.$$

Finner først løsningen av den tilhørende homogene likningen $x_n - 4x_{n-2} = 0$.
Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 2$$

slik løsningen av den homogene likningen er

$$x_{h,n} = A\cdot 2^n + B\cdot\left(-2\right)^n.$$

Søker en partikulær løsning av formen

$$x_{p,n} = Cn + D \quad \Leftrightarrow \quad x_{p,n-2} = C\left(n-2\right) + D.$$

Setter inn i den gitte likningen, og ordner:

$$Cn + D = 4\left(C\left(n-2\right) + D\right) - 3n + 2$$

$$Cn + D = 4Cn - 8C + 4D - 3n + 2$$

$$\left(-3C + 3\right)n = -8C + 3D + 2$$

For at dette skal være oppfylt for alle n, må vi ha at

$$-3C + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 1}$$

og

$$-8C + 3D + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3D = 8C - 2 = 8\cdot 1 - 2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{D = 2}.$$

Den generelle løsningen av likningen er derfor

$$x_n = x_{h,n} + x_{p,n} = \underline{A\cdot 2^n + B\cdot\left(-2\right)^n + n + 2}.$$

Finner A og B av startbetingelsene:

$$x_0 = A\cdot 2^0 + B\cdot\left(-2\right)^0 + 0 + 2 = A + B + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A + B = -2$$

$$x_1 = A\cdot 2^1 + B\cdot\left(-2\right)^1 + 1 + 2 = 2A - 2B + 3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad A - B = 0$$

Legger sammen likningene, og får

$$2A = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A = -1}.$$

Trekker likningene fra hverandre, og får

$$2B = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{B = -1}.$$

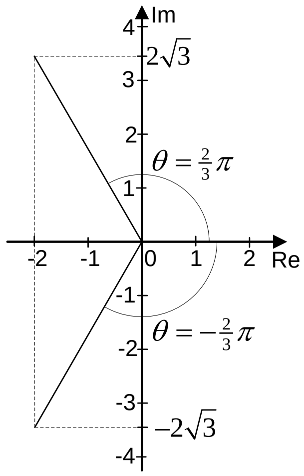
Komplett løsning:

$$x_n = \underline{\underline{-\left(2^n + \left(-2\right)^n\right) + n + 2}}.$$

Oppgave 7a

1) $\lambda^2 + 4\lambda + 16 = 0$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 16}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-48}}{2} = \frac{-4 \pm i\cdot 4\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{-2 \pm i\cdot 2\sqrt{3}}}.$$



Vi ser av figuren at:

Modulus $R = \sqrt{(-2)^2 + \left(\pm 2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$.

Argumentvinkelen θ er gitt ved

$$\tan\theta = \frac{\pm 2\sqrt{3}}{-2} = \mp\sqrt{3}.$$

Av figuren ser vi at de to aktuelle vinklene blir

$$\theta = \pm\tfrac{2}{3}\pi .$$

Dermed er

$$\lambda = R\cdot e^{\pm i\theta} = \underline{\underline{4e^{\pm\frac{2}{3}\pi i}}} .$$

2) $x_n = -4x_{n-1} - 16x_{n-2} + 7n$.

Vi vet fra teorien at løsningen er av formen

$$x_n = h_n + p_n$$

der h_n er løsning av den tilhørende homogene likningen, mens p_n er en partikulær løsning. Starter med å finne h_n:

$$x_n = -4x_{n-1} - 16x_{n-2} \quad\Leftrightarrow\quad x_n + 4x_{n-1} + 16x_{n-2} = 0.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 4\lambda + 16 = 0$$

som har løsningene $\lambda = 4e^{\pm\frac{2}{3}\pi i}$. Da vet vi fra teorien at

$$h_n = \underline{4^n\left(C_1\cos\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right) + C_2\sin\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)\right)}.$$

En partikulær løsning må være av formen

$$p_n = An + B \quad\Leftrightarrow\quad p_{n-1} = A(n-1) + B \quad\Leftrightarrow\quad p_{n-2} = A(n-2) + B.$$

Setter inn i den gitte likningen:

$$An + B = -4\left(A(n-1) + B\right) - 16\left(A(n-2) + B\right) + 7n$$

$$An + B = -4An + 4A - 4B - 16An + 32A - 16B + 7n$$

$$(A + 4A + 16A - 7)n + (B - 4A + 4B - 32A + 16B) = 0$$

$$(21A - 7)n + (-36A + 21B) = 0$$

Dersom denne likheten skal være oppfylt for alle verdier av *n*, må vi ha at:

$$21A - 7 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad A = \underline{\tfrac{1}{3}},$$

$$-36A + 21B = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 21B = 36\cdot\tfrac{1}{3} \quad\Leftrightarrow\quad B = \tfrac{12}{21} = \underline{\tfrac{4}{7}}.$$

Dermed blir den generelle løsningen

$$x_n = h_n + p_n = \underline{\underline{4^n\left(C_1\cos\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right) + C_2\sin\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)\right) + \tfrac{1}{3}n + \tfrac{4}{7}}}.$$

Oppgave 7b

1) $x_n = -2x_{n-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$.

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 = -2 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\,i .$$

Dette er et imaginært tall med modulus $r = \sqrt{2}$ og argumentvinkel $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.
"Kokebokoppskriften" for løsing av slike likninger gir oss nå løsningen

$$x_n = r^n\left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right) = \sqrt{2}^n\left(A\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) + B\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right)\right).$$

Av startbetingelsene får vi nå

$$x_0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}^0\left(A\cos(0) + B\sin(0)\right) = 1(A\cdot 1 + B\cdot 0) = \underline{A = 1}.$$

$$x_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}^1\left(A\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + B\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}(1\cdot 0 + B\cdot 1) = \sqrt{2}B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{B = 0}.$$

Dette gir

$$\underline{\underline{x_n = \sqrt{2}^n\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)}}.$$

2) Når $n = 1, 3, 5, 7, \cdots$ blir cosinus-faktoren av formen $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, osv. som alle er lik null.
Når $n = 0, 2, 4, 6, \cdots$ blir cosinus-faktoren vekselvis $+1$ og -1, slik at

$$\cos\left(0\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(4\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(8\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) = \cdots = 1$$

og

$$\cos\left(2\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(6\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(10\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) = \cdots = -1.$$

En faktor som veksler mellom $+1$ og -1 kan alltid skrives $(-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$. Men dette er det samme som $(-1)^{\frac{1}{2}n}$, $n = 0, 2, 4, \cdots$. Videre ser vi at når n er et jamt tall, blir

$$\left(\sqrt{2}\right)^n = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^n = 2^{\frac{1}{2}n}.$$

Setter vi sammen alt dette, får vi at

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad n = 1, 3, 5, 7, \cdots \\ (-2)^{\frac{1}{2}n} & \text{når} \quad n = 0, 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

Oppgave 7c

$$x_n = n - x_{n-1} - x_{n-2} \quad \Leftrightarrow \quad x_n + x_{n-1} + x_{n-2} = n \text{ når } n = 2, 3, \cdots.$$

1)

n	0	1	2	3	4
x_n	0	1	$2-1-0=1$	$3-1-1=1$	$4-1-1=2$

2) Karakteristisk likning:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-1\pm\sqrt{1^2 - 4\cdot 1}}{2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} = \underline{-\frac{1}{2}\pm i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}.$$

Omformes til eksponentiell form $r\cdot e^{i\varphi}$ der

$$r = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = 1$$

og

$$\tan\varphi = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = -\tfrac{1}{3}\pi + \pi = \underline{\tfrac{2}{3}\pi}.$$

Da blir den generelle løsningen av den tilhørende homogene differenslikningen

$$h_n = 1^n\left(C_1\cos\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)+C_2\sin\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)\right)=\underline{C_1\cos\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)+C_2\sin\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)}.$$

Må også finne en partikulær løsning. Prøver en løsning av formen

$$p_n = An+B \quad\Leftrightarrow\quad p_{n-1}=A(n-1)+B=An+(B-A)$$

$$\Leftrightarrow\quad p_{n-2}=A(n-2)+B=An+(B-2A)$$

Setter inn i den gitte likningen:

$$x_n = n - x_{n-1}-x_{n-2}\quad\Leftrightarrow\quad An+B=n-\left(An+(B-A)\right)-\left(An+(B-2A)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad (3A-1)n+(3B-3A)=0$$

Dersom dette skal være oppfylt for alle verdier av n, må vi ha

$$3A-1=0\quad\Leftrightarrow\quad A=\underline{\tfrac{1}{3}}.$$

$$3B-3A=0\quad\Leftrightarrow\quad B=A=\underline{\tfrac{1}{3}}.$$

Dermed har vi partikulærløsningen $p_n=\underline{\tfrac{1}{3}n+\tfrac{1}{3}}$

slik at den generelle løsningen blir

$$x_n=\underline{C_1\cos\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)+C_2\sin\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)+\tfrac{1}{3}(n+1)}.$$

Nå gjenstår det å finne C_1 og C_2. Vi bruker startbetingelsene og får:

$$x_0=C_1\cos(0)+C_2\sin(0)+\tfrac{1}{3}(0+1)=0\quad\Leftrightarrow\quad C_1\cdot 1+C_2\cdot 0+\tfrac{1}{3}=0\quad\Leftrightarrow\quad C_1=-\tfrac{1}{3}.$$

$$x_1=C_1\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)+C_2\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)+\tfrac{1}{3}(1+1)=1$$

$$\Leftrightarrow\quad -\tfrac{1}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)+C_2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\tfrac{1}{3}\quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{3}C_2=\tfrac{1}{6}\quad\Leftrightarrow\quad C_2=\underline{\tfrac{1}{3\sqrt{3}}}$$

Da blir løsningen av differenslikningen

$$x_n=\underline{\underline{-\tfrac{1}{3}\cos\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)+\tfrac{1}{3\sqrt{3}}\sin\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)+\tfrac{1}{3}(n+1)}}.$$

Oppgave 8

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1}&=2y_n-1\\ y_{n+1}&=-x_n+3y_n\end{aligned}\right\}\text{ når } n=0,1,2,\cdots$$

$$x_0=1,\ y_0=2.$$

Av den øverste likningen får vi

$$y_n=\tfrac{1}{2}(x_{n+1}+1).$$

Dette "forskyver" vi ett trinn, og får

$$y_{n+1}=\tfrac{1}{2}(x_{n+2}+1).$$

Nå kan vi sette inn i den nederste likningen:

$$y_{n+1}=-x_n+3y_n\quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}(x_{n+2}+1)=-x_n+3\cdot\tfrac{1}{2}(x_{n+1}+1)$$

$$\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}x_{n+2}+\tfrac{1}{2}=-x_n+\tfrac{3}{2}x_{n+1}+\tfrac{3}{2}\quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x_{n+2}-3x_{n+1}+2x_n=2}}$$

Vi løser først den homogene likningen. Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2-3\lambda+2=0\quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}.$$

Løsningen av den homogene likningen blir da

$$h_n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 1^n=\underline{C_1\cdot 2^n+C_2}.$$

Siden løsningen av den homogene likningen allerede inneholder en konstant, prøver jeg en partikulær løsning av formen

$$p_n = K \cdot n \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = K \cdot (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+2} = K \cdot (n+2).$$

Setter inn, og får

$$K(n+2) - 3K(n+1) + 2K \cdot n = 2$$

$$K \cdot n + 2K - 3K \cdot n - 3K + 2K \cdot n = 2$$

$$-K = 2 \quad \Leftrightarrow \quad K = \underline{-2}$$

Da har vi at

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C_1 \cdot 2^n + C_2 - 2}.$$

Videre blir

$$y_n = \tfrac{1}{2}(x_{n+1} + 1) y_n = \tfrac{1}{2}\left(\left(C_1 \cdot 2^{n+1} + C_2 - 2\right) + 1\right) = \underline{\tfrac{1}{2}\left(C_1 \cdot 2^{n+1} + C_2 - 1\right)}.$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 \cdot 2^0 + C_2 - 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + C_2 = 3.$$

$$y_0 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\left(C_1 \cdot 2^{0+1} + C_2 - 1\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2C_1 + C_2 = 5.$$

Trekker øverste likning fra den nederste, og får

$$C_1 = 2.$$

Da gir den øverste likningen

$$C_2 = 3 - C_1 = 3 - 2 = 1.$$

Løsningen av likningssystemet blir derfor

$$x_n = 2 \cdot 2^n + 1 - 2 = \underline{\underline{2^{n+1} - 1}},$$

$$y_n = \tfrac{1}{2}\left(2 \cdot 2^{n+1} + 1 - 1\right) = \underline{\underline{2^{n+1}}}.$$

4.Tillegg

4.1. Løsning av inhomogene lineære 1.ordens differenslikninger.

Vi skal nå bevise denne setningen:

La tallfølgen $\{p_n\}$ være en *partikulær løsning* av den inhomogene likningen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n + f(n).$$

La tallfølgen $\{h_n\}$ være løsning av den tilhørende homogene likningen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n .$$

Den generelle løsningen av den inhomogene likningen er da

$$\{x_n\} = \{h_n + p_n\} = \{C \cdot A^n + p_n\}.$$

Vi skal først vise at $\{x_n\} = \{h_n + p_n\}$ virkelig er løsning av differenslikningen

$$x_{n+1} = A \cdot x_n + f(n). \tag{1}$$

Vi setter den antatte løsningen inn i likningen, og får:

$$x_{n+1} = A \cdot x_n + f(n)$$

$$h_{n+1} + p_{n+1} = A \cdot (h_n + p_n) + f(n)$$

$$h_{n+1} - A \cdot h_n + p_{n+1} - A \cdot p_n - f(n) = 0$$

Men siden $\{h_n\}$ er løsning av den homogene likningen, blir

$$h_{n+1} = A \cdot h_n \quad \Leftrightarrow \quad h_{n+1} - A \cdot h_n = 0.$$

Og siden $\{p_n\}$ er løsning av den inhomogene likningen, blir også

$$p_{n+1} = A \cdot p_n + f(n) \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} - A \cdot p_n - f(n) = 0.$$

Altså passer $\{x_n\} = \{h_n + p_n\}$ inn i den opprinnelige differenslikningen.

Så skal jeg vise at $\{x_n\} = \{h_n + p_n\}$ er den mest generelle løsningen av likningen, d.v.s. at det ikke fins andre løsninger. Anta at det fins en annen løsning $\{y_n\}$ slik at

$$y_{n+1} = A \cdot y_n + f(n) \tag{2}$$

Trekker (1) fra (2), og får

$$y_{n+1} - x_{n+1} = A \cdot y_n - A \cdot x_n = A(y_n - x_n).$$

Dette uttrykket viser at $y_n - x_n$ er løsning av den tilhørende homogene likningen, d.v.s. at

$$y_n - x_n = C_1 \cdot A^n \quad \Leftrightarrow \quad y_n = C_1 \cdot A^n + x_n$$

Men vi vet jo at

$$x_n = C \cdot A^n + p_n. \tag{3}$$

Setter inn dette, og får

$$y_n = C_1 \cdot A^n + C \cdot A^n + p_n = (C_1 + C) \cdot A^n + p_n.$$

Men dette er jo nøyaktig det samme som uttrykket (3) for x_n, bortsett fra at uttrykket for konstanten er annerledes. Men denne forskjellen betyr ingen ting fordi konstanten uansett må bestemmes av startbetingelsen. Altså er $y_n = x_n$, slik at det ikke fins andre løsninger enn

$$x_n = C \cdot A^n + p_n .$$

4.2. Løsning av homogene lineære 2.ordens differenslikninger.

Vi skal nå vise at:

> Dersom den homogene lineære differenslikningen
> $$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}$$
> har to lineært uavhengige løsninger $\{x_{1,n}\}$ og $\{x_{2,n}\}$, er også lineærkombinasjonen
> $$\{x_n\} = \{C_1x_{1,n} + C_2x_{2,n}\}$$
> en løsning av likningen.

Påstanden vises ved direkte innsetting:

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}$$
$$C_1x_{1,n} + C_2x_{2,n} = A\left(C_1x_{1,n-1} + C_2x_{2,n-1}\right) + B\left(C_1x_{1,n-2} + C_2x_{2,n-2}\right)$$
$$C_1\left(x_{1,n} - Ax_{1,n-1} - Bx_{1,n-2}\right) + C_2\left(x_{2,n} - Ax_{2,n-1} - Bx_{2,n-2}\right) = 0$$

Men siden $\{x_{1,n}\}$ og $\{x_{2,n}\}$ begge er løsninger av differenslikningen, må begge parentesene være lik null. Altså har vi vist at dersom $\{x_{1,n}\}$ og $\{x_{2,n}\}$ begge er løsninger av differenslikningen

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2},$$

så er også

$$\{x_n\} = \{C_1x_{1,n} + C_2x_{2,n}\}$$

løsning av likningen.

4.3. Løsningsoppskrift for lineære 2.ordens differenslikninger.

Vi skal nå vise hvordan vi kommer fram til "oppskriften" for løsing av lineære, homogene 2.ordens differenslikninger. Vi starter med å *anta* at likningen

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}$$

har en løsning av formen

$$x_n = t^n .$$

Hvis dette er tilfelle, må vi ha at

$$t^n = A\cdot t^{n-1} + B\cdot t^{n-2}.$$

Vi deler på t^{n-2}, og får

$$t^2 = A\cdot t + B.$$

Vi har altså vist at *dersom t* tilfredsstiller denne likningen, så vil

$$x_n = t^n$$

være en løsning av differenslikningen.

Vi må nå se på de tre situasjonene som kan oppstå:

1. Den karakteristiske likningen

   $$t^2 = A\cdot t + B$$

   har to forskjellige reelle røtter t_1 og t_2:

   Da er både $x_{1,n} = t_1^{\,n}$ og $x_{2,n} = t_2^{\,n}$ løsninger av den gitte differenslikningen. Dermed må også lineærkombinasjonen

   $$\{x_n\} = \left\{C_1 t_1^{\,n} + C_2 t_2^{\,n}\right\}$$

   være løsning av den gitte differenslikningen.

2. Den karakteristiske likningen

   $$t^2 = At + B$$

   har to sammenfallende røtter $t_1 = t_2 = t$.

   Undersøker først betingelsene for at dette skal skje. Løser likningen:

   $$t^2 - At - B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2}.$$

   For å få to sammenfallende røtter, må vi ha

   $$A^2 + 4B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = -\tfrac{1}{4}A^2.$$

   Da er de sammenfallende røttene

   $$t = \tfrac{1}{2}A.$$

   Differenslikningen har altså en løsning

   $$\{x_n\} = \{t^n\} = \left\{\left(\tfrac{1}{2}A\right)^n\right\}.$$

   Men ifølge den innledende teorien må vi finne en løsning til. Vi undersøker om

   $$x_n = n\cdot t^n \quad \Leftrightarrow \quad x_{n-1} = (n-1)t^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad x_{n-2} = (n-2)t^{n-2}$$

   kan være en mulig løsning av differenslikningen

   $$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}.$$

   Vi setter inn i differenslikningen:

   $$n\cdot t^n = A\cdot(n-1)\cdot t^{n-1} + B\cdot(n-2)\cdot t^{n-2}.$$

   Deler på t^{n-2}, og multipliserer ut:

   $$n\cdot t^2 = A\cdot n\cdot t - A\cdot t + B\cdot n - 2B.$$

   Samler ledd som har *n* som faktor på venstre side av likhetstegnet:

   $$n\left(t^2 - A\cdot t - B\right) = -\left(A\cdot t + 2B\right).$$

   Venstre side er åpenbart lik null fordi *t* er rot i den karakteristiske likningen. Men også høyre side er lik null, fordi

$$A \cdot t + 2B = A \cdot \tfrac{1}{2} A + 2\left(-\tfrac{1}{4} A^2\right) = \tfrac{1}{2} A^2 - \tfrac{1}{2} A^2 = 0 .$$

Altså er både

$$x_{1,n} = t^n$$

og

$$x_{2,n} = n \cdot t^n \text{ der } t = \tfrac{1}{2} A$$

løsninger av differenslikningen når den karakteristiske likningen har to like røtter, slik at den generelle løsningen blir

$$\{x_n\} = \left\{C_1 t^n + C_2 \cdot n \cdot t^n\right\} .$$

3. Dersom den karakteristiske likningen har to kompleks konjugerte røtter, kan disse alltid skrives på formen $t = r \cdot e^{\pm\theta i}$. Løsningen av differenslikningen er da gitt ved

$$\{x_n\} = \left\{C_1 x_{1,n} + C_2 x_{2,n}\right\} = \left\{C_1 t_1^{\ n} + C_2 t_2^{\ n}\right\} = \left\{C_1 \left(r \cdot e^{\theta i}\right)^n + C_2 \left(r \cdot e^{-\theta i}\right)^n\right\}$$

$$= \left\{C_1 r^n e^{n\theta i} + C_2 r^n e^{-n\theta i}\right\}$$

Så benytter vi at

$$e^{\pm n\theta i} = \cos(n\theta) \pm i \sin(n\theta),$$

og får

$$\{x_n\} = \left\{C_1 r^n \left(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)\right) + C_2 r^n \left(\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)\right)\right\}$$

$$= \left\{(C_1 + C_2) r^n \cos(n\theta) + i(C_1 - C_2) r^n \sin(n\theta)\right\}$$

Men siden C_1 og C_2 begge er konstanter, kan $(C_1 + C_2)$ erstattes med en konstant K_1, og $i(C_1 - C_2)$ kan erstattes av en konstant K_2. Da får vi at

$$\{x_n\} = \left\{r^n \left(K_1 \cos(n\theta) + K_2 \sin(n\theta)\right)\right\} .$$

5. Småoppgaver i teksten.

5.1. Oppgaver.

Du finner løsningsforslag ved å klikke på oppgavenummeret.

Oppgave 1.1.1
Sett opp de 5 første tallene i disse tallfølgene:

a) $\left\{n^2-1\right\}, \qquad n\in\mathbb{N}$.

b) $\left\{\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}\right\}, \qquad n=0,1,2,3,\cdots$.

c) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\right\}, \qquad n\in\mathbb{N}$.

Oppgave 1.1.2
Sett opp de 5 første tallene i disse rekursivt gitte tallfølgene:

a) $a_{n+1}=2a_n-1$ når $n=0,1,2,\cdots$, $a_0=2$.

b) $a_{n+1}=2a_{n-1}$ når $n=1,2,3,\cdots$, $a_0=0$, $a_1=2$.

c) $x_n+2x_{n-1}=x_{n-2}+1$ når $n=2,3,4,\cdots$, $x_0=-1$, $x_1=1$.

d) $x_{n+1}=-x_n+2n-3$ når $n=1,2,3,\cdots$, $x_1=2$.

e) $x_n=x_{n-1}+2(-1)^n+2^n$ når $n=2,3,4,\cdots$, $x_1=0$.

Oppgave 1.2.1
Undersøk konvergensen til disse tallfølgene:

a) $\left\{\dfrac{n-2}{n^2}\right\}, \qquad n\in\mathbb{N}$

b) $\left\{\dfrac{(n-1)^2}{n(n+2)}\right\}, \qquad n\in\mathbb{N}$

c) $\left\{\dfrac{n^2}{n-1}-\dfrac{n^2}{n+1}\right\}, \qquad n=2,3,4,\cdots$

d) $\left\{\dfrac{n^3}{n-1}-\dfrac{n^2}{n+1}\right\}, \qquad n=2,3,4,\cdots$

Oppgave 1.2.2
Undersøk konvergensen til disse tallfølgene:

a) $\left\{n-\sqrt{n^2-1}\right\}, \qquad n\in\mathbb{N}$.

b) $\left\{n-\sqrt{n^2-n}\right\}, \qquad n\in\mathbb{N}$.

Oppgave 1.2.3
Undersøk konvergensen til tallfølgen

$$\left\{ n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Oppgave 1.2.4
I oppgave 1.2.3 viste vi at tallfølgen

$$\left\{ n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

konvergerer mot π. Bruk dette resultatet til å undersøke konvergensen til tallfølgen

$$\left\{ n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Oppgave 1.2.5
Undersøk monotoniegenskapene til tallfølgene nedenfor, både ved å regne ut differansen mellom to ledd, og ved å derivere en passe funksjon. Avgjør også om tallfølgene er begrenset.

a) $\left\{ \frac{4n-1}{n+1} \right\}, \qquad n \in \mathbb{N}$

b) $\left\{ \frac{2-n^2}{n+2} \right\}, \qquad n \in \mathbb{N}$

Oppgave 2.2.1
Løs disse differenslikningene:

a) $x_{n+1} = -2x_n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots, \ x_1 = 1$.

b) $x_{n+1} = 3x_n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots, \ x_1 = \frac{1}{3}$.

Oppgave 2.2.2
Løs differenslikningene nedenfor, og kontroller svaret ved å regne ut de 5 første leddene i tallfølgen:

a) $x_{n+1} = -x_n + 2^n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots, \ x_1 = 1$.

b) $x_{n+1} = 2x_n - n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots, \ x_1 = 5$.

c) $x_{n+1} = x_n + \sin\left(n \cdot \frac{1}{2}\pi\right)$ når $n = 1, 2, 3, \cdots, \ x_1 = 1$.

Oppgave 2.2.3
Løs differenslikningene nedenfor, og kontroller svaret ved å regne ut de 5 første leddene i tallfølgen:

a) $x_{n+1} = x_n - 3$ når $n = 1, 2, 3, \cdots, \ x_1 = 8$.

b) $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - 1$ når $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 4$.

c) $x_{n+1} = 2x_n - 2^n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots, \ x_1 = 2$.

Oppgave 2.3.1
Løs differenslikningene nedenfor, og beregn de 5 første leddene til kontroll:

a) $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ når $n = 3, 4, 5, \cdots$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

b) $x_n = -2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ når $n = 3, 4, 5, \cdots$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

c) $x_n = 4x_{n-2}$ når $n = 3, 4, 5, \cdots$, $x_1 = x_2 = 1$.

Oppgave 2.3.2
Løs differenslikningene nedenfor, og beregn de 5 første leddene til kontroll:

a) $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ når $n = 1, 2, 3, \cdots$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

b) $x_n = -4x_{n-1} - 4x_{n-2}$ når $n = 1, 2, 3, \cdots$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Oppgave 2.3.3
Løs differenslikningene nedenfor, og beregn de 5 første leddene til kontroll:

a) $x_n = -x_{n-2}$ når $n = 3, 4, 5, \cdots$, $x_1 = x_2 = 1$.

b) $x_n = \sqrt{2} \cdot x_{n-1} - x_{n-2}$ når $n = 3, 4, 5, \cdots$, $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$.

Oppgave 2.3.4
Løs differenslikningen

$$x_n = 4x_{n-1} - r \cdot x_{n-2} \quad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots, \; x_1 = 1, \; x_2 = 2$$

når

a) $r = 3$

b) $r = 4$

c) $r = 8$

Oppgave 2.3.5
Løs differenslikningene nedenfor:

a) $x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2} - 6n + 1$ når $n = 1, 2, 3, \cdots$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

b) $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} - 4$ når $n = 1, 2, 3, \cdots$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

c) $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + 3^n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Oppgave 2.4.1
Løs differenslikningen

$$x_n = x_{n-1} + 4x_{n-2} - 4x_{n-3}.$$

Oppgave 2.5.1
Løs systemene av differenslikninger nedenfor:

a) $\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n - 3y_n \\ y_{n+1} &= -x_n \end{aligned}$, $\begin{aligned} x_0 &= 5 \\ y_0 &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_{n+1} &= -2x_n + y_n \\ y_{n+1} &= 4x_n + y_n \end{aligned}$, $\begin{aligned} x_0 &= 3 \\ y_0 &= 2 \end{aligned}$

5.2. Løsninger på småoppgaver.

Oppgave 1.1.1
De 5 første leddene i disse tallfølgene blir:

a) $\{n^2 - 1\}$, $n \in \mathbb{N}$:

$1^2 - 1 = 0$, $2^2 - 1 = 3$, $3^2 - 1 = 8$, $4^2 - 1 = 15$, $5^2 - 1 = 24$.

b) $\left\{\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}\right\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$:

$\dfrac{0}{1\cdot 2} = 0$, $\dfrac{1}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{6}$, $\dfrac{2}{3\cdot 4} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$, $\dfrac{3}{4\cdot 5} = \dfrac{3}{20}$, $\dfrac{4}{5\cdot 6} = \dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15}$.

c) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\dfrac{(-1)^{1+1}}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{(-1)^{2+1}}{(2+1)^2} = -\dfrac{1}{9}$, $\dfrac{(-1)^{3+1}}{(3+1)^2} = \dfrac{1}{16}$, $\dfrac{(-1)^{4+1}}{(4+1)^2} = -\dfrac{1}{25}$, $\dfrac{(-1)^{5+1}}{(5+1)^2} = \dfrac{1}{36}$

Oppgave 1.1.2

a) $a_{n+1} = 2a_n - 1$ når $n = 0, 1, 2, \cdots$, $a_0 = 2$.

Starter med å sette $n = 0$, og setter deretter etter tur $n = 1, 2, 3, 4$. Da blir

$a_1 = 2a_0 - 1 = 2\cdot 2 - 1 = 3$.

$a_2 = 2a_1 - 1 = 2\cdot 3 - 1 = 5$.

$a_3 = 2a_2 - 1 = 2\cdot 5 - 1 = 9$.

$a_4 = 2a_3 - 1 = 2\cdot 9 - 1 = 17$.

b) $a_{n+1} = 2a_{n-1}$ når $n = 1, 2, 3, \cdots$, $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.

Starter med å sette $n = 1$, og setter deretter etter tur $n = 2, 3, 4$. Da blir

$a_2 = 2a_0 = 2\cdot 0 = 0$.

$a_3 = 2a_1 = 2\cdot 2 = 4$.

$a_4 = 2a_2 = 2\cdot 0 = 0$.

c) $x_n + 2x_{n-1} = x_{n-2} + 1$ når $n = 2, 3, 4, \cdots$, $x_0 = -1$, $x_1 = 1$.

Likningen omformes først til

$x_n = -2x_{n-1} + x_{n-2} + 1$.

Starter med å sette $n=2$, og setter deretter etter tur $n=3, 4, 5$. Da blir

$$x_2 = -2x_1 + x_0 + 1 = -2\cdot 1 + (-1) + 1 = -2\,.$$
$$x_3 = -2x_2 + x_1 + 1 = -2\cdot(-2) + 1 + 1 = 6\,.$$
$$x_4 = -2x_3 + x_2 + 1 = -2\cdot 6 + (-2) + 1 = -13\,.$$

d) $x_{n+1} = -x_n + 2n - 3$ når $n = 1, 2, 3, \cdots,\ x_1 = 2$.

Starter med å sette $n=1$, og setter deretter etter tur $n=2, 3, 4$. Da blir

$$x_2 = -x_1 + 2\cdot 1 - 3 = -2 + 2\cdot 1 - 3 = -3$$
$$x_3 = -x_2 + 2\cdot 2 - 3 = -(-3) + 2\cdot 2 - 3 = 4$$
$$x_4 = -x_3 + 2\cdot 3 - 3 = -4 + 2\cdot 3 - 3 = -1$$
$$x_5 = -x_4 + 2\cdot 4 - 3 = -(-1) + 2\cdot 4 - 3 = 6$$

e) $x_n = x_{n-1} + 2(-1)^n + 2^n$ når $n = 2, 3, 4, \cdots,\ x_1 = 0$.

Starter med å sette $n=2$, og setter deretter etter tur $n=3, 4, 5$. Da blir

$$x_2 = x_1 + 2(-1)^2 + 2^2 = 0 + 2\cdot 1 + 4 = 6$$
$$x_3 = x_2 + 2(-1)^3 + 2^3 = 6 + 2\cdot(-1) + 8 = 12$$
$$x_4 = x_3 + 2(-1)^4 + 2^4 = 12 + 2\cdot 1 + 16 = 30$$
$$x_5 = x_4 + 2(-1)^5 + 2^5 = 30 + 2\cdot(-1) + 32 = 60$$

Oppgave 1.2.1

a) $\left\{\dfrac{n-2}{n^2}\right\}, \qquad n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)\cdot\frac{1}{n^2}}{n^2\cdot\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{1} = \frac{0-0}{1} = 0\,.$$

Tallfølgen konvergerer mot 0.

b) $\left\{\dfrac{(n-1)^2}{n(n+2)}\right\}, \quad n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-2n+1)\cdot\frac{1}{n^2}}{(n^2+2n)\cdot\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1-0+0}{1+0} = 1$$

Tallfølgen konvergerer mot 1.

c) $\left\{\dfrac{n^2}{n-1}-\dfrac{n^2}{n+1}\right\}, \qquad n = 2,3,4,\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)-n^2(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2-n^3+n^2}{n^2-1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2\cdot\frac{1}{n^2}}{(n^2-1)\cdot\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1-0} = 2$$

Tallfølgen konvergerer mot 2.

d) $\left\{\dfrac{n^3}{n-1}-\dfrac{n^2}{n+1}\right\}, \qquad n=2,3,4,\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n-1}-\frac{n^2}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+1)-n^2(n-1)}{(n+1)(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^3-n^3+n^2}{n^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^4+n^2\right)\cdot\frac{1}{n^4}}{\left(n^2-1\right)\cdot\frac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}}=\frac{1+0}{0-0}=\frac{1}{0}$$

Denne grenseverdien eksisterer ikke, slik at tallfølgen divergerer.

Oppgave 1.2.2

a) $\left\{n-\sqrt{n^2-1}\right\}, \qquad n\in\mathbb{N}.$

$$n-\sqrt{n^2-1}=\frac{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}{n+\sqrt{n^2-1}}=\frac{n^2-\left(n^2-1\right)}{n+\sqrt{n^2-1}}=\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}.$$

Da blir

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\frac{1}{n}}{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\sqrt{\frac{1}{n^2}\left(n^2-1\right)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{0}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{0}{2}=0$$

Tallfølgen konvergerer mot 0.

b) $\left\{n-\sqrt{n^2-n}\right\}, \qquad n\in\mathbb{N}.$

$$n-\sqrt{n^2-n}=\frac{\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)}{n+\sqrt{n^2-n}}=\frac{n^2-\left(n^2-n\right)}{n+\sqrt{n^2-n}}=\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}.$$

Da blir

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n^2}\left(n^2-n\right)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{2}$$

Tallfølgen konvergerer mot $\frac{1}{2}$.

Oppgave 1.2.3

$\left\{n\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right\}, \qquad n\in\mathbb{N}.$

Danner funksjonen

$$f(x)=x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{x}\right), \qquad x\geq 1.$$

Når $x \to \infty$, blir dette et "$\infty \cdot 0$"-uttrykk fordi $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \sin 0 = 0$. Omformer derfor slik:

$$x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\sin\left(\pi x^{-1}\right)}{x^{-1}}$$

slik at

$$\lim_{x\to\infty}\left(x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\pi x^{-1}\right)}{x^{-1}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\pi x^{-1}\right)\cdot\left(-\pi x^{-2}\right)}{-x^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\cos\left(\pi x^{-1}\right)\cdot \pi\right) = \pi \cdot \lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = \pi \cdot \cos 0 = \pi$$

Tallfølgen konvergerer mot π.

Oppgave 1.2.4

$$n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = n \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Da blir

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} = \frac{\pi}{\cos 0} = \frac{\pi}{1} = \pi .$$

Tallfølgen konvergerer mot π.

Oppgave 1.2.5

a) $\left\{\frac{4n-1}{n+1}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}$

Differansen mellom to ledd blir

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \frac{4(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{4n-1}{n+1} = \frac{4n+3}{n+2} - \frac{4n-1}{n+1}$$

$$= \frac{(4n+3)(n+1)-(4n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{\left(4n^2+4n+3n+3\right)-\left(4n^2+8n-n-2\right)}{(n+2)(n+1)} = \frac{5}{(n+2)(n+1)}$$

Denne differansen blir alltid positiv, slik at tallfølgen er strengt voksende.
Kontroll: Definerer

$$f(x) = \frac{4x-1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4(x+1)-(4x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{4x+4-4x+1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

som alltid er positiv. Videre ser vi at

$$a_1 = \frac{4\cdot 1-1}{1+1} = \frac{3}{2},$$

og at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(4n-1)\cdot\frac{1}{n}}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{4-0}{1+0} = 4$$

slik at tallfølgen er begrenset.

b) $\left\{\dfrac{2-n^2}{n+2}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}$

Differansen mellom to ledd blir

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \frac{2-(n+1)^2}{(n+1)+2} - \frac{2-n^2}{n+2} = \frac{2-n^2-2n-1}{n+3} - \frac{2-n^2}{n+2}$$
$$= \frac{(1-2n-n^2)(n+2)-(2-n^2)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$
$$= \frac{(n-2n^2-n^3+2-4n-2n^2)-(2n+6-n^3-3n^2)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-n^2-5n-4}{(n+3)(n+2)}$$

Denne differansen blir alltid negativ, slik at tallfølgen er strengt avtakende.
Kontroll: Definerer

$$f(x) = \frac{2-x^2}{x+2}.$$
$$f'(x) = \frac{-2x(x+2)-(2-x^2)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x-2+x^2}{(x+2)^2} = \frac{-x^2-4x-2}{(x+2)^2}$$

som alltid er negativ når $x \geq 1$. Videre ser vi at

$$a_1 = \frac{2-1^2}{1+2} = \frac{1}{3},$$

men at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2-n^2)\cdot\frac{1}{n^2}}{(n+2)\cdot\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}-1}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{0-1}{0+0} = \frac{-1}{0}$$

som ikke eksisterer. Tallfølgen er derfor opptil begrenset, men ikke nedtil begrenset fordi leddene går mot $-\infty$ når $n \to \infty$.

Oppgave 2.2.1

a) $x_{n+1} = -2x_n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots$

Løsningen blir

$$x_n = C \cdot (-2)^n.$$

Finner C:

$$x_1 = C \cdot (-2)^1 = -2C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = -\tfrac{1}{2}}.$$

Altså blir

$$\{x_n\} = \left\{-\tfrac{1}{2}(-2)^n\right\} = \underline{\underline{\left\{(-2)^{n-1}\right\}}}.$$

b) $x_{n+1} = 3x_n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots$

Løsningen blir

$$x_n = C \cdot 3^n.$$

Finner C:

$$x_1 = C \cdot 3^1 = \tfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = \tfrac{1}{9}}.$$

Altså blir

$$\{x_n\} = \left\{\tfrac{1}{9}\cdot 3^n\right\} = \underline{\underline{\left\{3^{n-2}\right\}}}.$$

Oppgave 2.2.2a

a) $x_{n+1} = -x_n + 2^n$ når $n = 1, 2, 3, \cdots$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen blir

$$\{h_n\} = \underline{\left\{C\cdot(-1)^n\right\}}.$$

Prøver en partikulær løsning av formen

$$p_n = D\cdot 2^n \quad\Leftrightarrow\quad p_{n+1} = D\cdot 2^{n+1}.$$

Setter inn:

$$p_{n+1} = -p_n + 2^n \quad\Leftrightarrow\quad D\cdot 2^{n+1} = -D\cdot 2^n + 2^n$$

Deler på 2^n, og får:

$$D\cdot 2 = -D + 1 \quad\Leftrightarrow\quad 3D = 1 \quad\Leftrightarrow\quad D = \underline{\tfrac{1}{3}}.$$

Løsningen er da

$$\{x_n\} = \{h_n + p_n\} = \underline{\left\{C\cdot(-1)^n + \tfrac{1}{3}\cdot 2^n\right\}}.$$

Finner *C*:

$$x_1 = C\cdot(-1)^1 + \tfrac{1}{3}\cdot 2^1 = -C + \tfrac{2}{3} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad C = \underline{-\tfrac{1}{3}}.$$

Komplett løsning blir da

$$\{x_n\} = \left\{-\tfrac{1}{3}(-1)^n + \tfrac{1}{3}\cdot 2^n\right\} = \underline{\underline{\left\{\tfrac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)\right\}}}.$$

n	$x_{n+1} = -x_n + 2^n$	$x_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$
1	1	$\frac{1}{3}\left(2^1 + 1\right) = 1$
2	$-1 + 2^1 = 1$	$\frac{1}{3}\left(2^2 - 1\right) = 1$
3	$-1 + 2^2 = 3$	$\frac{1}{3}\left(2^3 + 1\right) = 3$
4	$-3 + 2^3 = 5$	$\frac{1}{3}\left(2^4 - 1\right) = 5$
5	$-5 + 2^4 = 11$	$\frac{1}{3}\left(2^5 + 1\right) = 11$

Oppgave 2.2.2b

$$x_{n+1} = 2x_n - n \quad \text{når } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen blir

$$\{h_n\} = \underline{\left\{C\cdot 2^n\right\}}.$$

Prøver en partikulær løsning av formen

$p_n = D\cdot n + E$ (førstegradspolynom i *n*)

Setter inn:

$$p_{n+1} = 2p_n - n \quad\Leftrightarrow\quad D\cdot(n+1) + E = 2(D\cdot n + E) - n$$

$$\Leftrightarrow\quad D\cdot n + D + E = 2D\cdot n + 2E - n$$

Samler alle ledd som inneholder *n* på venstre side av likhetstegnet:

$$-D\cdot n+n=-D+E \quad\Leftrightarrow\quad (-D+1)n=-D+E$$

Dersom dette skal være oppfylt for *alle* verdier av *n*, må vi ha at

$$-D+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad D=\underline{1}$$

og at

$$-D+E=0 \quad\Leftrightarrow\quad E=D=\underline{1}.$$

Løsningen på differenslikningen blir da

$$\{x_n\}=\{h_n+p_n\}=\underline{\{C\cdot 2^n+n+1\}}.$$

Finner til slutt *C*:

$$x_1=C\cdot 2^1+1+1=5 \quad\Leftrightarrow\quad 2C=2 \quad\Leftrightarrow\quad C=\underline{\tfrac{3}{2}}.$$

Komplett løsning blir altså

$$\{x_n\}=\left\{\tfrac{3}{2}\cdot 2^n+n+1\right\}=\underline{\underline{\left\{3\cdot 2^{n-1}+n+1\right\}}}.$$

n	$x_{n+1}=2x_n-n$	$x_n=3\cdot 2^{n-1}+n+1$
1	5	$3\cdot 2^0+1+1=5$
2	$2\cdot 5-1=9$	$3\cdot 2^1+2+1=9$
3	$2\cdot 9-2=16$	$3\cdot 2^2+3+1=16$
4	$2\cdot 16-3=29$	$3\cdot 2^3+4+1=29$
5	$2\cdot 29-4=54$	$3\cdot 2^4+5+1=54$

Oppgave 2.2.2c

$$x_{n+1}=x_n+\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) \quad \text{når } n=1,2,3,\cdots$$

Løsningen av den tilhørende homogene likningen er

$$\{h_n\}=\{C\cdot 1^n\}=\underline{\{C\}}.$$

Prøver en partikulær løsning av formen

$$p_n=D\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+E\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right).$$

Setter inn, og benytter at $\cos\left(v+\tfrac{1}{2}\pi\right)=-\sin v$ og at $\sin\left(v+\tfrac{1}{2}\pi\right)=\cos v$:

$$p_{n+1}=p_n+\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)$$
$$D\cos\left((n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+E\sin\left((n+1)\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)=D\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+E\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)$$
$$D\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\pi\right)+E\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\pi\right)=D\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+E\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)$$
$$D\left(-\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)\right)+E\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)=D\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+E\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)$$

Samler ledd:

$$(-D-E-1)\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)+(E-D)\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)=0.$$

Skal denne likningen være oppfylt for *alle* verdier av *n*, må vi ha at:

$$-D-E-1=0$$
$$-D+E=0$$

Legger sammen, og får

$$-2D-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad D=\underline{-\tfrac{1}{2}}.$$

Da er også

$$E=D=\underline{-\tfrac{1}{2}}.$$

Løsningen blir altså

$$\{x_n\} = \underline{\left\{C - \tfrac{1}{2}\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) - \tfrac{1}{2}\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)\right\}}.$$

Finner C:

$$x_n = C - \tfrac{1}{2}\cos\left(1\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) - \tfrac{1}{2}\sin\left(1\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) = C - \tfrac{1}{2}\cdot 0 - \tfrac{1}{2}\cdot 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{\tfrac{3}{2}}.$$

Komplett løsning:

$$\{x_n\} = \left\{\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) - \tfrac{1}{2}\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)\right\} = \underline{\underline{\left\{\tfrac{1}{2}\left(3 - \cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)\right)\right\}}}.$$

n	$x_{n+1} = x_n + \sin\left(n\cdot\frac{1}{2}\pi\right)$	$\frac{1}{2}\left(3-\cos\left(n\cdot\frac{1}{2}\pi\right)-\sin\left(n\cdot\frac{1}{2}\pi\right)\right)$
1	1	$\frac{1}{2}\left(3-\cos\left(1\cdot\frac{1}{2}\pi\right)-\sin\left(1\cdot\frac{1}{2}\pi\right)\right)=\frac{1}{2}(3-0-1)=1$
2	$1+\sin\left(1\cdot\frac{1}{2}\pi\right)=1+1=2$	$\frac{1}{2}\left(3-\cos\left(2\cdot\frac{1}{2}\pi\right)-\sin\left(2\cdot\frac{1}{2}\pi\right)\right)=\frac{1}{2}(3-(-1)-0)=2$
3	$2+\sin\left(2\cdot\frac{1}{2}\pi\right)=2+0=2$	$\frac{1}{2}\left(3-\cos\left(3\cdot\frac{1}{2}\pi\right)-\sin\left(3\cdot\frac{1}{2}\pi\right)\right)=\frac{1}{2}(3-0-(-1))=2$
4	$2+\sin\left(3\cdot\frac{1}{2}\pi\right)=2-1=1$	$\frac{1}{2}\left(3-\cos\left(4\cdot\frac{1}{2}\pi\right)-\sin\left(4\cdot\frac{1}{2}\pi\right)\right)=\frac{1}{2}(3-1-0)=1$
5	$1+\sin\left(4\cdot\frac{1}{2}\pi\right)=1+0=1$	$\frac{1}{2}\left(3-\cos\left(5\cdot\frac{1}{2}\pi\right)-\sin\left(5\cdot\frac{1}{2}\pi\right)\right)=\frac{1}{2}(3-0-1)=1$

Oppgave 2.2.3a

$$x_{n+1} = x_n - 3 \text{ når } n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots$$

Den tilhørende homogene likningen har løsning

$$\{x_h\} = \left\{C\cdot 1^n\right\} = \underline{\{C\}}.$$

Vi kan da ikke bruke $p_n = D$ som partikulær løsning fordi den homogene likningen allerede har en konstant som løsning. Vi prøver isteden en partikulær løsning

$$p_n = n\cdot D.$$

Setter inn i differenslikningen:

$$p_{n+1} = p_n - 3 \quad\Leftrightarrow\quad (n+1)D = n\cdot D - 3 \quad\Leftrightarrow\quad n\cdot D + D = n\cdot D - 3 \quad\Leftrightarrow\quad D = \underline{-3}.$$

Løsningen av differenslikningen blir da

$$\underline{C - 3n}.$$

Finner C:

$$x_1 = C - 3\cdot 1 = 8 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{C = 11}.$$

Komplett løsning blir da

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\{11 - 3n\}}}.$$

n	1	2	3	4	5
$x_{n+1} = x_n - 3$	8	$8-3=5$	$5-3=2$	$2-3=-1$	$-1-3=-4$
$11-3n$	$11-3\cdot1=8$	$11-3\cdot2=5$	$11-3\cdot3=2$	$11-3\cdot4=-1$	$11-3\cdot5=-4$

Oppgave 2.2.3b

Løsningen av den homogene likningen er

$$h_n = \underline{C\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^n}.$$

I den gitte likningen er $f(n) = -1$. Jeg prøver derfor en partikulær løsning som er en konstant:

$$p_n = K \quad \Leftrightarrow \quad p_{n+1} = K\,.$$

Setter inn i likningen for å finne K:

$$p_{n+1} = \tfrac{3}{2}p_n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad K = \tfrac{3}{2}\cdot K - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}K = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{K = 2}\,.$$

Den generelle løsningen av likningen blir da

$$x_n = h_n + p_n = \underline{C\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^n + 2}\,.$$

Finner til slutt C:

$$x_0 = C\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^0 + 2 = C + 2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C = 2}\,.$$

Altså blir løsningen

$$x_n = \underline{\underline{2\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^n + 2}}\,.$$

Oppgave 2.2.3c

$$x_{n+1} = 2x_n - 2^n \text{ når } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Den homogene likningen blir $h_{n+1} = 2h_n$ som har løsning

$$\{h_n\} = \{C\cdot 2^n\}\,.$$

Nå kan vi ikke bruke $p_n = D\cdot 2^n$ som partikulær løsning selv om denne løsningen er av samme form som leddet -2^n. Grunnen er at ledd av formen 2^n allerede fins i løsningen av den homogene likningen. Vi prøver derfor

$$p_n = D\cdot n\cdot 2^n\,.$$

Setter inn:

$$p_{n+1} = 2p_n - 2^n \quad \Leftrightarrow \quad D(n+1)\cdot 2^{n+1} = 2D\cdot n\cdot 2^n - 2^n\,.$$

Forkorter bort 2^n og multipliserer ut:

$$2D\cdot n + 2D = 2D\cdot n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2D = -1 \quad \Leftrightarrow \quad D = \underline{-\tfrac{1}{2}}\,.$$

Løsningen av differenslikningen blir da av formen

$$\{x_n\} = \left\{C\cdot 2^n - \tfrac{1}{2}\cdot n\cdot 2^n\right\} = \underline{\left\{\left(C - \tfrac{1}{2}n\right)\cdot 2^n\right\}}\,.$$

Finner *C*:

$$x_1 = \left(C - \tfrac{1}{2}\right)\cdot 2^1 = 2C - 1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2C = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{\tfrac{3}{2}}\,.$$

Komplett løsning blir da

$$\{x_n\} = \left\{\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}n\right)\cdot 2^n\right\} = \underline{\underline{\left\{(3-n)\cdot 2^{n-1}\right\}}}\,.$$

n	$x_{n+1} = 2x_n - 2^n$	$(3-n)\cdot 2^{n-1}$
1	2	$(3-1)\cdot 2^0 = 2$
2	$2\cdot 2 - 2^1 = 2$	$(3-2)\cdot 2^{2-1} = 2$
3	$2\cdot 2 - 2^2 = 0$	$(3-3)\cdot 2^{3-1} = 0$
4	$2\cdot 0 - 2^3 = -8$	$(3-4)\cdot 2^{4-1} = -8$
5	$2\cdot(-8) - 2^4 = -32$	$(3-5)\cdot 2^{5-1} = -32$

Oppgave 2.3.1

a) $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}\,,\quad x_1 = 1\,,\quad x_2 = 2\,.$

Karakteristisk likning

$$t^2 = t + 2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Generell løsning

$$\{x_n\} = \underline{\left\{C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n\right\}}\,.$$

Finner konstantene:

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot (-1)^1 = 2C_1 - C_2 = 1$$

$$x_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot (-1)^2 = 4C_1 + C_2 = 2$$

Legger sammen likningene:

$$6C_1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{\tfrac{1}{2}}\,.$$

Da blir

$$C_2 = 2 - 4C_1 = 2 - 4 \cdot \tfrac{1}{2} = \underline{0}\,.$$

Komplett løsning:

$$\{x_n\} = \left\{\tfrac{1}{2} \cdot 2^n\right\} = \underline{\underline{\left\{2^{n-1}\right\}}}\,.$$

De første leddene blir:

n	1	2	3	4	5
$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$	1	2	$2 + 2 \cdot 1 = 4$	$4 + 2 \cdot 2 = 8$	$8 + 2 \cdot 4 = 16$
$x_n = 2^{n-1}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^4 = 8$	$2^5 = 16$

b) $x_n = -2x_{n-1} + 3x_{n-2}\,,\quad x_1 = 1\,,\quad x_2 = 3\,.$

Karakteristisk likning

$$t^2 = -2t + 3 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Generell løsning

$$\{x_n\} = \left\{C_1 (-3)^n + C_2 \cdot 1^n\right\} = \underline{\left\{C_1 (-3)^n + C_2\right\}}\,.$$

Finner konstantene:

$$x_1 = C_1 \cdot (-3)^1 + C_2 = -3C_1 + C_2 = 1$$

$$x_2 = C_1 \cdot (-3)^2 + C_2 = 9C_1 + C_2 = 3$$

Trekker den øverste likningen fra den nederste:

$$12C_1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{\tfrac{1}{6}}\,.$$

Da blir

$$C_2 = 1 + 3C_1 = 1 + 3 \cdot \tfrac{1}{6} = \underline{\tfrac{3}{2}}\,.$$

Komplett løsning:

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\left\{\tfrac{1}{6} \cdot (-3)^n + \tfrac{3}{2}\right\}}}\,.$$

De første leddene blir:

n	$x_n = -2x_{n-1} + 3x_{n-2}$	$\frac{1}{6}\cdot(-3)^n + \frac{3}{2}$
1	1	$\frac{1}{6}\cdot(-3)^1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$
2	3	$\frac{1}{6}\cdot(-3)^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$
3	$-2\cdot 3 + 3\cdot 1 = -3$	$\frac{1}{6}\cdot(-3)^3 + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2} = -3$
4	$-2(-3) + 3\cdot 3 = 15$	$\frac{1}{6}\cdot(-3)^4 + \frac{3}{2} = \frac{27}{2} + \frac{3}{2} = 15$
5	$-2\cdot 15 + 3(-3) = -39$	$\frac{1}{6}\cdot(-3)^5 + \frac{3}{2} = -\frac{81}{2} + \frac{3}{2} = -39$

c) $x_n = 4x_{n-2}$, $x_1 = x_2 = 1$.

Karakteristisk likning

$$t^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t = \pm 2}.$$

Generell løsning

$$\{x_n\} = \underline{\left\{C_1\cdot 2^n + C_2\cdot(-2)^n\right\}}.$$

Finner konstantene:

$$x_1 = C_1\cdot 2^1 + C_2\cdot(-2)^1 = 2C_1 - 2C_2 = 1.$$

$$x_2 = C_1\cdot 2^2 + C_2\cdot(-2)^2 = 4C_1 + 4C_2 = 1.$$

Multipliserer øverste likning med 2, og legger sammen:

$$8C_1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{\tfrac{3}{8}}.$$

Da blir

$$4C_2 = 1 - 4C_1 = 1 - 4\cdot\tfrac{3}{8} = -\tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \underline{-\tfrac{1}{8}}.$$

Komplett løsning:

$$\{x_n\} = \left\{\tfrac{3}{8}\cdot 2^n - \tfrac{1}{8}\cdot(-2)^n\right\} = \left\{\tfrac{3}{2^3}\cdot 2^n + \tfrac{1}{(-2)^3}\cdot(-2)^n\right\} = \underline{\underline{\left\{3\cdot 2^{n-3} + (-2)^{n-3}\right\}}}.$$

De første leddene blir:

n	$x_n = 4x_{n-2}$	$3\cdot 2^{n-3} + (-2)^{n-3}$
1	1	$3\cdot 2^{1-3} + (-2)^{1-3} = 3\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$
2	1	$3\cdot 2^{2-3} + (-2)^{2-3} = 3\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$
3	$4\cdot 1 = 4$	$3\cdot 2^{3-3} + (-2)^{3-3} = 3\cdot 1 + 1 = 4$
4	$4\cdot 1 = 4$	$3\cdot 2^{4-3} + (-2)^{4-3} = 3\cdot 2 - 2 = 4$
5	$4\cdot 4 = 16$	$3\cdot 2^{5-3} + (-2)^{5-3} = 3\cdot 4 + 4 = 16$

Oppgave 2.3.2

a) $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Karakteristisk likning

$$t^2 = 2t - 1 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 2t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \underline{1}.$$

Generell løsning

$$\{x_n\} = \left\{C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n\right\} = \underline{\{C_1 + C_2 \cdot n\}}.$$

Finner konstantene:

$$x_1 = C_1 + C_2 \cdot 1 = C_1 + C_2 = 1$$

$$x_2 = C_1 + C_2 \cdot 2 = C_1 + 2C_2 = 3$$

Trekker den øverste likningen fra den nederste, og får

$$C_2 = \underline{2}.$$

Da blir

$$C_1 = 1 - C_2 = 1 - 2 = \underline{-1}.$$

Komplett løsning:

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\{-1 + 2n\}}}.$$

De første leddene blir:

n	$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$	$x_n = 2n - 1$
1	1	$x_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
2	3	$x_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
3	$2 \cdot 3 - 1 = 5$	$x_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$
4	$2 \cdot 5 - 3 = 7$	$x_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$
5	$2 \cdot 7 - 5 = 9$	$x_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

b) $x_n = -4x_{n-1} - 4x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4.$

Karakteristisk likning

$$t^2 = -4t - 4 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 4t + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 16}}{2} = \underline{-2}.$$

Generell løsning

$$\{x_n\} = \underline{\left\{C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot n \cdot (-2)^n\right\}}.$$

Finner konstantene:

$$x_1 = C_1 \cdot (-2)^1 + C_2 \cdot 1 \cdot (-2)^1 = -2C_1 - 2C_2 = 1$$

$$x_2 = C_1 \cdot (-2)^2 + C_2 \cdot 2 \cdot (-2)^2 = 4C_1 + 8C_2 = 4$$

Deler den nederste likningen på 4 og legger sammen:

$$-C_1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1 = -2}.$$

Da blir

$$2C_2 = -2C_2 - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \underline{\tfrac{3}{2}}.$$

Komplett løsning:

$$\{x_n\} = \left\{-2 \cdot \left(-2^n\right) + \tfrac{3}{2} n \cdot (-2)^n\right\} = \underline{\underline{\left\{(-2)^{n+1} - 3n \cdot (-2)^{n-1}\right\}}} = \underline{\underline{\left\{(4 - 3n) \cdot (-2)^{n-1}\right\}}}.$$

De første leddene blir:

n	$x_n = -4x_{n-1} - 4x_{n-2}$	$x_n = (4-3n)(-2)^{n-1}$
1	1	$x_1 = (4-3\cdot 1)(-2)^{1-1} = 1\cdot 1 = 1$
2	4	$x_2 = (4-3\cdot 2)(-2)^{2-1} = (-2)\cdot(-2) = 4$
3	$-4\cdot 4 - 4\cdot 1 = -20$	$x_3 = (4-3\cdot 3)(-2)^{3-1} = (-5)\cdot 4 = -20$
4	$-4\cdot(-20) - 4\cdot 4 = 64$	$x_4 = (4-4\cdot 2)(-2)^{4-1} = (-4)\cdot(-8) = 32$
5	$-4\cdot 64 - 4\cdot(-20) = -176$	$x_5 = (4-5\cdot 3)(-2)^{5-1} = (-11)\cdot 16 = -176$

Oppgave 2.3.3a

$$x_n = -x_{n-2}\,,\ x_1 = x_2 = 1\,.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 = -1$$

som har røttene

$$t = \pm i = e^{\pm\frac{1}{2}\pi i}\,.$$

Den generelle løsningen av differenslikningen blir da

$$\{x_n\} = \underline{\left\{K_1\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) + K_2\sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)\right\}}\,.$$

Finner konstantene:

$$x_1 = K_1\cos\left(1\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) + K_2\sin\left(1\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) = K_1\cdot 0 + K_2\cdot 1 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad K_2 = \underline{1}\,.$$

$$x_2 = K_1\cos\left(2\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) + K_2\sin\left(2\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) = K_1\cdot(-1) + K_2\cdot 0 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad K_1 = \underline{-1}\,.$$

Komplett løsning blir da

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\left\{-\cos\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(n\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)\right\}}}\,.$$

De første leddene blir:

n	$x_n = -x_{n-2}$	$-\cos\left(n\cdot\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(n\cdot\frac{1}{2}\pi\right)$
1	1	$-\cos\left(1\cdot\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(1\cdot\frac{1}{2}\pi\right) = -0 + 1 = 1$
2	1	$-\cos\left(2\cdot\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(2\cdot\frac{1}{2}\pi\right) = -(-1) + 0 = 1$
3	-1	$-\cos\left(3\cdot\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(3\cdot\frac{1}{2}\pi\right) = -0 - 1 = -1$
4	-1	$-\cos\left(4\cdot\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(4\cdot\frac{1}{2}\pi\right) = -1 + 0 = -1$
5	1	$-\cos\left(5\cdot\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(5\cdot\frac{1}{2}\pi\right) = -0 + 1 = 1$

Oppgave 2.3.3b

$$x_n = \sqrt{2}\cdot x_{n-1} - x_{n-2}\,,\quad x_1 = 1\,,\quad x_2 = \sqrt{2}\,.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 = \sqrt{2}\,t - 1 \quad\Leftrightarrow\quad t^2 - \sqrt{2}\,t + 1 = 0$$

$$t = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{\sqrt{2}^2 - 4}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2} = \underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}$$

Disse kompleks konjugerte tallene har:

Modulus: $r = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{2}{4} + \tfrac{2}{4}} = \underline{1}$.

Argumentvinkel: $\tan\theta = \dfrac{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \underline{\tfrac{1}{4}\pi}$.

Røttene i den karakteristiske likningen blir derfor

$$t = 1 \cdot e^{\pm\frac{1}{4}\pi i}$$

slik at den generelle løsningen av differenslikningen blir

$$\underline{\{x_n\} = \left\{K_1 \cos\left(n \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right) + K_2 \sin\left(n \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right)\right\}}.$$

Finner konstantene:

$$x_1 = K_1 \cos\left(1 \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right) + K_2 \sin\left(1 \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right) = K_1 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + K_2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 1.$$

$$x_2 = K_1 \cos\left(2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right) + K_2 \sin\left(2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right) = K_1 \cdot 0 + K_2 \cdot 1 = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad K_2 = \underline{\sqrt{2}}.$$

Settes dette inn i den første likningen, får vi

$$K_1 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad K_1 = \underline{0}.$$

Komplett løsning blir da

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\left\{\sqrt{2} \cdot \sin\left(n \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right)\right\}}}.$$

De første leddene blir:

n	$x_n = \sqrt{2} \cdot x_{n-1} - x_{n-2}$	$\sqrt{2} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{1}{4}\pi\right)$
1	1	$\sqrt{2} \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1$
2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$
3	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 1 = 1$	$\sqrt{2} \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1$
4	$\sqrt{2} \cdot 1 - \sqrt{2} = 0$	$\sqrt{2} \cdot \sin\left(4 \cdot \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2} \cdot 0 = 0$
5	$\sqrt{2} \cdot 0 - 1 = -1$	$\sqrt{2} \cdot \sin\left(5 \cdot \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -1$

Oppgave 2.3.4

$$x_n = 4x_{n-1} - r \cdot x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Karakteristisk likning

$$t^2 = 4t - r \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 4t + r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4r}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4(4-r)}}{2} = \underline{2 \pm \sqrt{4-r}}.$$

a) Når $r = 3$, får vi to reelle røtter

$$t_1 = 2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{cases} 2 + 1 = \underline{3} \\ 2 - 1 = \underline{1} \end{cases}$$

Generell løsning

$$\{x_n\} = \left\{C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 1^n\right\} = \underline{\left\{C_1 \cdot 3^n + C_2\right\}}.$$

Finner konstantene:

$$x_1 = C_1 \cdot 3^1 + C_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3C_1 + C_2 = 1.$$

$$x_2 = C_1 \cdot 3^2 + C_2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 9C_1 + C_2 = 2.$$

Trekker øverste likning fra den nederste, og får

$$6C_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1 = \tfrac{1}{6}}.$$

Da blir

$$C_2 = 1 - 3C_1 = 1 - 3 \cdot \tfrac{1}{6} = \underline{\tfrac{1}{2}}.$$

Komplett løsning er altså

$$\{x_n\} = \left\{\tfrac{1}{6} \cdot 3^n + \tfrac{1}{2}\right\} = \left\{\tfrac{1}{2\cdot 3} \cdot 3^n + \tfrac{1}{2}\right\} = \underline{\underline{\left\{\tfrac{1}{2}\left(3^{n-1} + 1\right)\right\}}}.$$

b) Når $r = 4$, får vi to like røtter $\underline{t = 2}$.

Generell løsning

$$\{x_n\} = \underline{\left\{C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n\right\}}.$$

Finner konstantene:

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 1 \cdot 2^1 = 2C_1 + 2C_2 = 1.$$

$$x_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot 2 \cdot 2^2 = 4C_1 + 8C_2 = 2.$$

Deler nederste likning på 2, og trekker øverste likning fra den nederste:

$$2C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_2 = 0}.$$

Da blir

$$2C_1 = 1 - 2C_2 = 1 - 2 \cdot 0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{\tfrac{1}{2}}.$$

Komplett løsning er altså

$$\{x_n\} = \left\{\tfrac{1}{2} \cdot 2^n\right\} = \underline{\underline{\left\{2^{n-1}\right\}}}.$$

c) Når $r = 8$, får vi to kompleks konjugerte røtter

$$t = 2 \pm \sqrt{-4} = 2 \pm 2i = \underline{2\sqrt{2}\, e^{\pm\frac{1}{4}i}}.$$

Mellomregninger:

Modulus $R = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \underline{2\sqrt{2}}$.

Argumentvinkel: $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\theta = \tfrac{1}{4}\pi}$.

Generell løsning

$$\{x_n\} = \underline{\left\{K_1 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right) + K_2 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right)\right\}}.$$

Finner konstantene:

$$x_1 = K_1 \cdot 2\sqrt{2}\cos\left(1 \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right) + K_2 \cdot 2\sqrt{2}\sin\left(1 \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

$$= K_1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + K_2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 2K_1 + 2K_2 = 1$$

$$x_2 = K_1 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \cos\left(2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right) + K_2 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \sin\left(2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right) = K_1 \cdot 8 \cdot 0 + K_2 \cdot 8 \cdot 1 = 8K_2 = 2.$$

Av den siste likningen får vi

$$K_2 = \underline{\tfrac{1}{4}}$$

som innsatt i den første gir

$$2K_1 = 1 - 2K_2 = 1 - 2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad K_1 = \underline{\tfrac{1}{4}}.$$

Komplett løsning er altså

$$\{x_n\} = \left\{\left(2\sqrt{2}\right)^n \left(\tfrac{1}{4}\cos\left(n \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right) + \tfrac{1}{4}\sin\left(n \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right)\right)\right\}$$

$$= \underline{\underline{\left\{\tfrac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(n \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(n \cdot \tfrac{1}{4}\pi\right)\right)\right\}}}$$

Oppgave 2.3.5a

$$x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2} - 6n + 1$$

Karakteristisk likning for den tilhørende homogene likningen:

$$t^2 = t + 6 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Løsningen av den homogene likningen blir da

$$h_n = \underline{\left\{C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot (-2)^n\right\}}.$$

Søker en partikulær løsning av formen

$$p_n = D \cdot n + E.$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$p_n = p_{n-1} + 6p_{n-2} - 6n + 1$$

$$D \cdot n + E = D(n-1) + E + 6\left(D(n-2) + E\right) - 6n + 1$$

$$D \cdot n + E = D \cdot n - D + E + 6D \cdot n - 12D + 6E - 6n + 1$$

$$(-6D + 6)n = -13D + 6E + 1$$

Dersom dette skal være oppfylt for *alle* verdier av n, nå vi ha at

$$-6D + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = \underline{1}.$$

og at

$$-13D + 6E + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{13D - 1}{6} = \underline{2}.$$

Løsningen blir altså

$$\{x_n\} = \underline{\left\{C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot (-2)^n + n + 2\right\}}.$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_1 = C_1 \cdot 3^1 + C_2 \cdot (-2)^1 + 1 + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3C_1 - 2C_2 = -2.$$

$$x_2 = C_1 \cdot 3^2 + C_2 \cdot (-2)^2 + 2 + 2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9C_1 + 4C_2 = -1.$$

Multipliserer øverste likning med 2 og legger sammen:

$$15C_1 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{-\tfrac{1}{3}}.$$

Den øverste likningen gir nå

$$2C_2 = 3C_1 + 2 = 3\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \underline{\tfrac{1}{2}}.$$

Komplett løsning blir da

$$\{x_n\} = \left\{\left(-\tfrac{1}{3}\right) \cdot 3^n + \tfrac{1}{2} \cdot (-2)^n + n + 2\right\} = \underline{\underline{\left\{-3^{n-1} - (-2)^{n-1} + n + 2\right\}}}.$$

Oppgave 2.3.5b

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} - 4\,.$$

Karakteristisk likning for den tilhørende homogene likningen:

$$t^2 = 3t - 2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 3t + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Løsningen av den homogene likningen blir da

$$\{h_n\} = \{C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 1^n\} = \underline{\{C_1 \cdot 2^n + C_2\}}\,.$$

Det naturlige er å søke en partikulær løsning av formen $p_n = D$ fordi leddet -4 er en konstant. Men løsningen av den homogene likningen inneholder allerede konstanten C_2. Derfor multipliserer jeg konstanten D med n og søker en partikulær løsning av formen

$$p_n = D \cdot n\,.$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2} - 4$$

$$D \cdot n = 3D(n-1) - 2D(n-2) - 4$$

$$D \cdot n = 3D \cdot n - 3D - 2D \cdot n + 4D - 4$$

$$D = \underline{4}$$

Løsningen blir altså

$$\{x_n\} = \underline{\{C_1 \cdot 2^n + C_2 + 4n\}}\,.$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 + 4 \cdot 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2C_1 + C_2 = -3\,.$$

$$x_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 + 4 \cdot 2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4C_1 + C_2 = -5\,.$$

Trekker øverste likning fra den nederste:

$$2C_1 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \underline{-1}\,.$$

Den øverste likningen gir nå

$$C_2 = -2C_1 - 3 = \underline{-1}\,.$$

Komplett løsning blir da

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\{-2^n - 1 + 4n\}}}\,.$$

Oppgave 2.3.5c

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + 3^n\,.$$

Karakteristisk likning for den tilhørende homogene likningen:

$$t^2 = 6t - 9 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 6t + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 36}}{2} = \underline{3}$$

Løsningen av den homogene likningen blir da

$$\underline{\{h_n\} = \{C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n\}}\,.$$

Første innskytelse vil være å prøve en partikulær løsning av formen $p_n = D \cdot 3^n$. Men et slikt ledd inngår allerede i løsningen av den homogene likningen. Det samme er tilfelle hvis vi multipliserer med n. Vi må altså multiplisere med n^2, og får en partikulær løsning av formen

$$p_n = D \cdot n^2 \cdot 3^n\,.$$

Setter inn i den opprinnelige likningen:

$$p_n = 6p_{n-1} - 9p_{n-2} + 3^n$$

$$D \cdot n^2 \cdot 3^n = 6D(n-1)^2 \cdot 3^{n-1} - 9D(n-2)^2 \cdot 3^{n-2} + 3^n$$

Deler på 3^n og ordner:

$$D \cdot n^2 = 2D \cdot n^2 - 4D \cdot n + 2D - D \cdot n^2 + 4D \cdot n - 4D + 1$$

$$2D = 1 \quad \Leftrightarrow \quad D = \underline{\tfrac{1}{2}}$$

Løsningen blir altså

$$\{x_n\} = \underline{\left\{C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n + \tfrac{1}{2} \cdot n^2 \cdot 3^n\right\}}.$$

Finner C_1 og C_2:

$$x_1 = C_1 \cdot 3^1 + C_2 \cdot 1 \cdot 3^1 + \tfrac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 3^1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3C_1 + 3C_2 = -\tfrac{3}{2}.$$

$$x_2 = C_1 \cdot 3^2 + C_2 \cdot 2 \cdot 3^2 + \tfrac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9C_1 + 18C_2 = -15 \quad \Leftrightarrow \quad 3C_1 + 6C_2 = -5.$$

Trekker øverste likning fra den nederste, og får

$$3C_2 = -\tfrac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \underline{-\tfrac{7}{6}}.$$

Den øverste likningen gir nå

$$C_1 = -\tfrac{1}{2} - C_2 = -\tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{7}{6}\right) = \underline{\tfrac{2}{3}}.$$

Komplett løsning blir da

$$\{x_n\} = \left\{\tfrac{2}{3} \cdot 3^n - \tfrac{7}{6} n \cdot 3^n + \tfrac{1}{2} n^2 \cdot 3^n\right\} = \underline{\underline{\left\{3^n \cdot \tfrac{1}{6}\left(3n^2 - 7n + 4\right)\right\}}}.$$

Oppgave 2.4.1

$$x_n = x_{n-1} + 4x_{n-2} - 4x_{n-3}$$

Karakteristisk likning:

$$t^3 = t^2 + 4t - 4 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2(t-1) - 4(t-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(t^2 - 4\right)(t-1) = 0$$

Tre reelle røtter:

$$\underline{t_1 = -2}, \quad \underline{t_2 = 2}, \quad \underline{t_3 = 1}.$$

Løsningen blir

$$\{x_n\} = \underline{\underline{\left\{C_1(-2)^n + C_2 \cdot 2^n + C_3\right\}}}.$$

Oppgave 2.5.1

a) $\begin{matrix} x_{n+1} = 2x_n - 3y_n \\ y_{n+1} = -x_n \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} x_0 = 5 \\ y_0 = 1 \end{matrix}$

Forskyver den øverste likningen ett trinn utover i tallfølgene:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 3y_{n+1} = 2x_{n+1} - 3(-x_n) = 2x_{n+1} + 3x_n.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 = 2t + 3 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 2t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Dermed blir

$$x_n = \underline{C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot (-1)^n}.$$

Av den øverste likningen finner vi nå

$$\begin{aligned} y_n &= \tfrac{1}{3}\left(2x_n - x_{n+1}\right) = \tfrac{1}{3}\left(2\left(C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot (-1)^n\right) - \left(C_1 \cdot 3^{n+1} + C_2 \cdot (-1)^{n+1}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\left(2C_1 \cdot 3^n + 2C_2 \cdot (-1)^n - 3C_1 \cdot 3^n - (-1)C_2 \cdot (-1)^n\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\left((2-3)C_1 \cdot 3^n + (2+1)C_2 \cdot (-1)^n\right) = \underline{-\tfrac{1}{3}C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot (-1)^n} \end{aligned}$$

Så benytter vi startbetingelsene:

$$\begin{matrix} x_0 = 5 \\ y_0 = 1 \end{matrix} \iff \begin{matrix} C_1 \cdot 3^0 + C_2 \cdot (-1)^0 = 5 \\ -\tfrac{1}{3}C_1 \cdot 3^0 + C_2 \cdot (-1)^0 = 1 \end{matrix} \iff \begin{matrix} C_1 + C_2 = 5 \\ -\tfrac{1}{3}C_1 + C_2 = 1 \end{matrix}$$

Multipliserer nederste likning med 3 og legger sammen likningene. Får da

$$4C_2 = 8 \iff C_2 = \underline{2}.$$

Av den øverste likningen får vi nå

$$C_1 = 5 - C_2 = 5 - 2 = \underline{3}.$$

Da har vi løsningen

$$x_n = 3 \cdot 3^n + 2 \cdot (-1)^n = \underline{\underline{3^{n+1} + 2 \cdot (-1)^n}}$$

$$y_n = -\tfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3^n + 2 \cdot (-1)^n = \underline{\underline{-3^n + 2 \cdot (-1)^n}}$$

b) $$\begin{matrix} x_{n+1} = -2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + y_n \end{matrix}, \quad \begin{matrix} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{matrix}$$

Forskyver den øverste likningen ett trinn utover i tallfølgene:

$$x_{n+2} = -2x_{n+1} + y_{n+1} = -2x_{n+1} + \left(4x_n + y_n\right).$$

Av den øverste likningen finner vi nå

$$y_n = x_{n+1} + 2x_n$$

som settes inn:

$$x_{n+2} = -2x_{n+1} + 4x_n + \left(x_{n+1} + 2x_n\right) = -x_{n+1} + 6x_n.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$t^2 = -t + 6 \iff t^2 + t - 6 = 0 \iff t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Dermed blir

$$x_n = \underline{C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-3)^n}.$$

Av den øverste likningen finner vi nå

$$\begin{aligned} y_n &= x_{n+1} + 2x_n = \left(C_1 \cdot 2^{n+1} + C_2 \cdot (-3)^{n+1}\right) + 2\left(C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-3)^n\right) \\ &= C_1 \cdot 2 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-3) \cdot (-3)^n + 2C_1 \cdot 2^n + 2C_2 \cdot (-3)^n \\ &= C_1 \cdot 2^n (2+2) + C_2 \cdot (-3)^n (-3+2) = \underline{4C_1 \cdot 2^n - C_2 \cdot (-3)^n} \end{aligned}$$

Så benytter vi startbetingelsene:

$$\begin{matrix} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} C_1 \cdot 2^0 + C_2 \cdot (-3)^0 = 3 \\ 4C_1 \cdot 2^0 - C_2 \cdot (-3)^0 = 2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} C_1 + C_2 = 3 \\ 4C_1 - C_2 = 2 \end{matrix}$$

Legger sammen likningene, og får

$$5C_1 = 5 \iff C_1 = \underline{1}.$$

Av den øverste likningen får vi nå

$$C_2 = 3 - C_1 = 3 - 1 = \underline{2}\ .$$

Da har vi løsningen

$$x_n = 1 \cdot 2^n + 2 \cdot (-3)^n = \underline{\underline{2^n + 2 \cdot (-3)^n}}$$

$$y_n = 4 \cdot 1 \cdot 2^n - 2 \cdot (-3)^n = \underline{\underline{2^{n+2} - 2 \cdot (-3)^n}}$$