Bjørn Davidsen

Matematikk for ingeniører

Grunnleggende funksjonslære

Innhold

Forord

Kjære student!

Du bør ha et visst grunnlag i funksjonslære før du begynner på din ingeniørutdanning. Men mange studenter stiller med et for spinkelt grunnlag. Jeg har derfor laget dette heftet der jeg har samlet en del stoff som jeg vet at mange studenter sliter med.

Etter en kort innledning der jeg omtaler generelle definisjoner og egenskaper, ser jeg på noen enkle funksjoner. Jeg har lagt hovedvekt på lineære funksjoner fordi disse brukes mye i praksis, og fordi det er viktig å kjenne lineære funksjoner når vi kommer til derivasjon.

Deretter går jeg løs på trigonometriske funksjoner. Jeg forutsetter at du kjenner de grunnleggende definisjonene, for eksempel fra heftet om "forkunnskaper". Siden trigonometriske funksjoner er svært viktige i andre fag (elektroteknikk, fysikk osv.) blir disse funksjonene behandlet forholdsvis grundig, bl.a. med trigonometriske likninger og ulikheter.

Kapitlet om eksponential- og logaritmefunksjonser bygger på tilvarende kapitler i heftet om "forkunnskaper". Jeg har lagt vekt på å vise eksempler der eksponentialfunksjonen dukker opp i praktiske situasjoner.

De to kapitlene om grenseverdier og kontinuitet peker fram mot derivasjon, som omtales i et annet hefte.

Til slutt har jeg tatt med et kapitel om komplekse tall. Det kan virke litt merkelig å behandle komplekse tall i et hefte om grunnnleggende funksjoner. Men komplekse tall må taes en eller annen gang tidlig i matematikkstudiet, og da er det like greit å ta det i etterkant av at sinus- cosinus- og eksponentialfunksjonene er gjennomgått.

Jeg håper at dette stoffet kan bidra til at du får utbytte av ditt ingeniørstudium.

Bjørn Davidsen

1. Generelle egenskaper ved funksjoner.

1.1. Funksjonsbegrepet.

Vi starter med å definere hva vi mener med en *funksjon:*

En ***funksjon*** *f* fra en mengde *A* til en mengde *B* er en forskrift som til hvert element i *A* tilordner ett og kun ett element i *B*.

Legg merke til at vi ikke sier noe om hva slags elementer det er tale om. Vi kommer stort sett til å la elementene være reelle tall. Men i prinsippet kan elementene være nærmest hva som helst.

Dersom $x \in A$ og $y \in B$, skriver vi ofte $y = f(x)$. Vi sier at *x* er den ***fri variable*** mens *y* er den ***avhengige variable***. Skal vi være pirkete, er *f* navnet på funksjonen, mens $f(x)$ er den *verdien* vi får når vi setter inn *x* i funksjonsuttrykket. Det er imidlertid blitt innarbeidet praksis at vi bruker skrivemåten $f(x)$ både for funksjons*navnet* og funksjons*verdien*, fordi skrivemåten $f(x)$ angir at vi skal bruke symbolet *x* for den fri variable.

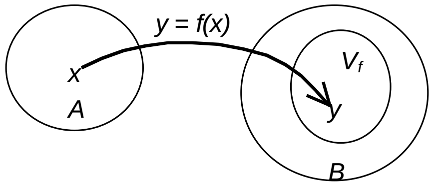
Legg også merke til at definisjonen krever at til enhver verdi *x* i definisjonsmengden skal det finnes ett *og kun ett* element *y*. Den matematiske sammenhengen $y = \pm\sqrt{x}$ er således *ikke* en funksjon fordi det fins *to* *y*-verdier for hver *x*-verdi (unntatt for $x = 0$). Derimot er $y = x^2$ en funksjon fordi det til hvert reelt tall *x* fins en og kun en verdi *y*.

Mengden *A* kalles ofte ***definisjonsmengden*** til funksjonen *f*, og vi bruker gjerne symbolet D_f for den. Dersom vi ikke sier noe annet, er det underforstått at D_f er den største mulige delmengden av $\mathbb{R}$ (mengden av reelle tall).

Mengden

$$V_f = \{y \in B \mid y = f(x) \wedge x \in D_f\}$$

kalles ***verdimengden*** til funksjonen *f*. Også den er vanligvis en passe delmengde av $\mathbb{R}$.
Disse begrepene er illustrert til høyre.



Eksempel 1.1.1**:** Vi har gitt funksjonen

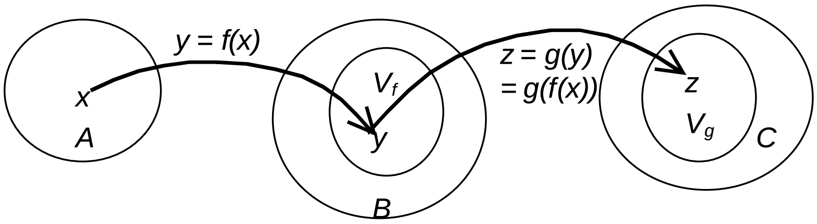
$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

Hva er størst mulig definisjonsmengde for *f*? Hva er verdimengden til *f*?

Løsning: Dersom verdimengden skal være en delmengde av $\mathbb{R}$, kan vi ikke ha negativt tall under rottegnet. Vi må altså kreve at $x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$. Størst mulig definisjonsmengde blir derfor $D_f = \underline{\underline{[-1, \rightarrow\rangle}}$. Vi ser at $f(-1) = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0$. For alle andre *x*-verdier i D_f får vi større funksjonsverdier. Altså er $V_f = \underline{\underline{[0, \rightarrow\rangle}}$.

[Oppgave 1.1.1](#).

Vi kan lage *sammensatte funksjoner* ved å la verdimengden for en funksjon være delmengde av definisjonsmengden for en annen funksjon. Situasjonen er illustrert nedenfor:



Du må være klar over at $f\left(g\left(x\right)\right)$ som regel er forskjellig fra $g\left(f\left(x\right)\right)$. Eksemplet nedenfor illustrerer dette.

***Eksempel 1.1.2*:** Gitt funksjonene

$$f\left(x\right)=\sqrt{x}\,,\qquad g\left(x\right)=x^2+1\,.$$

Hva blir $f\left(g\left(x\right)\right)$ og $g\left(f\left(x\right)\right)$?

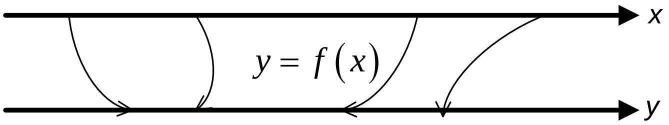
Løsning:

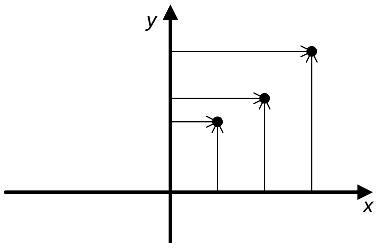
$$f\left(g\left(x\right)\right)=\sqrt{g\left(x\right)}=\underline{\underline{\sqrt{x^2+1}}}\,.$$

$$g\left(f\left(x\right)\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2+1=\left(\sqrt{x}\right)^2+1=\underline{\underline{x+1}}\,.$$

1.2. Grafer.

Vi skal nå se å funksjoner av typen $y=f\left(x\right)$ der både *x* og *y* er reelle tall som kan avbildes på hver sin tall-linje. Da kan funksjonen *f* illustreres slik:





Det er imidlertid mye smartere å la de to tall-linjene stå vinkelrett på hverandre slik figuren til venstre viser. Da får vi et ***kartesisk koordinat-system***. Sammenhengen mellom *x* og *y* kan da illustreres som punkter i dette koordinatsystemet.

Dersom *x* er et reelt tall, danner punktene en sammenhengende linje i koordinatsystemet. I dagligtalen kalles denne linja ofte for ***grafen til f***. Strengt tatt er ikke dette helt korrekt, fordi:

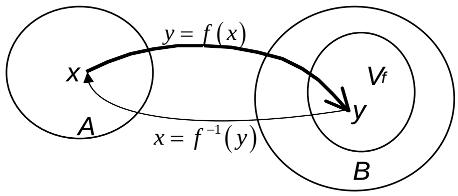
Gitt en funksjon $y = f(x)$. ***Grafen til*** *f* er mengden av tallsett

$$G_f = \{(x,y) \mid x \in D_f \quad \wedge \quad y = f(x)\}.$$

Men så lenge vi begrenser oss til funksjoner av en variabel, er det helt i orden at du bruker den velkjente terminologien der linja i koordinatsystemet omtales som *graf*.

1.3. Inverse funksjoner og monotoni.

Generelt kan en funksjon *f* være slik at to eller flere forskjellige *x*-verdier leder til samme *y*-verdi. Men noen ganger er det kun *en* *x*-verdi som fører til hver *y*-verdi. Slike funksjoner kalles ***en-en-tydige***. Det er da mulig å gå tilbake fra enhver *y*-verdi i *B* til en og kun en *x*-verdi i *A*.



Dersom funksjonen *f* er slik at $y = f(x)$, sier vi at den funksjonen som entydig bringer oss tilbake fra *y* til *x* er den ***inverse funksjonen av f***. Denne inverse funksjonen skriver vi $x = f^{-1}(y)$. Situasjonen er illustrert ovenfor til høyre.

Eksempel 1.3.1: En funksjon *f* er gitt ved

$$y = f(x) = 2x - 1.$$

Finn den inverse funksjonen til *f*.

Løsning: Når $y = 2x - 1$, blir $2x = y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$. Den inverse funksjonen er derfor

$$x = f^{-1}(y) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}}}.$$

Dersom funksjonen *f* er slik at når *x* øker i verdi vil også $y = f(x)$ *øke* i verdi, sier vi at *f* er ***strengt monotont voksende*** eller bare ***strengt voksende***. Og dersom *f* er slik at når *x* øker i verdi vil $y = f(x)$ *minke* i verdi, sier vi at *f* er ***strengt monotont avtakende*** eller bare ***strengt avtakende***. Mer formelt:

Anta at x_1 og x_2 er to verdier i definisjonsmengden til en funksjon *f*, og at $x_2 > x_1$. Da er:

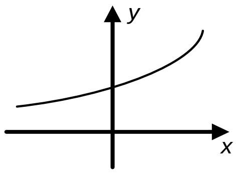
f er strengt monotont voksende $\Leftrightarrow$ $f(x_2) > f(x_1)$ for alle x_1 og x_2 der $x_2 > x_1$.

f er strengt monotont avtakende $\Leftrightarrow$ $f(x_2) < f(x_1)$ for alle x_1 og x_2 der $x_2 > x_1$.

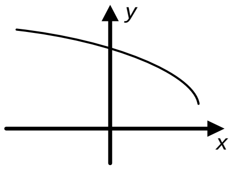
Det er først når vi kommer til derivasjon at vi får et hensiktsmessig hjelpemiddel for å avgjøre om en funksjon er strengt voksende, strengt avtakende eller ingen av delene.

Disse begrepene er viktige i mange sammenhenger. Blant annet er det bare strengt monotont voksende eller strengt monotont avtakende funksjoner som har en invers funksjon.

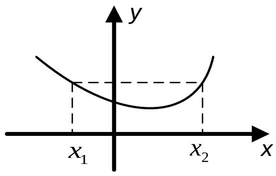
Nedenfor ser du grafene til en strengt voksende funksjon, en strengt avtakende funksjon, og en funksjon som verken er strengt voksende eller strengt avtakende. De to første funksjonene har invers funksjon fordi det er en og kun en *y*-verdi til hver *x*-verdi. Men den siste funksjonen kan ikke ha noen invers funksjon fordi det er *to* *x*-verdier som gir samme *y*-verdi. Funksjonen er altså ikke en-en-tydig.



Strengt voksende.



Strengt avtakende.



Ikke en-en-tydig.

Da vi innførte begrepet "invers funksjon", sa vi at f^{-1} var invers funksjon til *f* hvis og bare hvis $y = f(x)$ og $x = f^{-1}(y)$. Nå er det selve *funksjonsuttrykket* som er viktig. Når vi skriver $x = f^{-1}(y)$, så innebærer det at *y* er den fri variabelen. Men det er jo vanlig å kalle den fri variabelen *x*. Derfor ser vi ofte at *x* og *y* bytter plass i uttrykket for f^{-1} slik at vi skriver $y = f^{-1}(x)$ istedenfor $x = f^{-1}(y)$.

Dersom vi tegner grafene til $y = f(x)$ og $y = f^{-1}(x)$ i samme kartesiske koordinatsystem, oppdager vi noe påfallende: Grafene er symmetriske om den rette linja $y = x$ (d.v.s. om den rette linja som halverer 1. og 3. kvadrant). Dette er i grunnen ganske naturlig ettersom *x* og *y* "bytter rolle". Som en konsekvens av dette vil også definisjons- og verdimengdene "bytte rolle" slik at $V_f = D_{f^{-1}}$, og $D_f = V_{f^{-1}}$. Se eksemplene nedenfor.

***Eksempel 1.3.2*:** Bestem (om mulig) den inverse funksjonen til:

a) $f(x) = 2x - 1$ når $D_f = [0, \rightarrow\rangle$.

b) $f(x) = x^2 + 1$ når $D_f = [0, \rightarrow\rangle$.

Tegn grafene til *f* og til f^{-1} i samme koordinatsystem, og bestem V_f, $D_{f^{-1}}$ og $V_{f^{-1}}$.

Løsning: I figurene nedenfor til høyre er $f(x)$ tegnet med tykk strek, og f^{-1} er tegnet med tynn strek. Halveringslinja $y = x$ er stiplet.

a) Vi skriver

$$y = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = y + 1$$

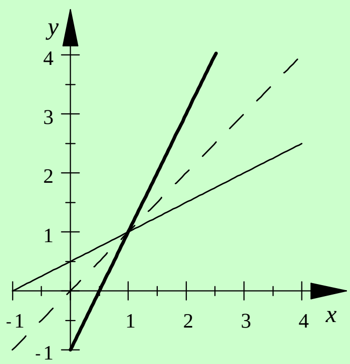
$$\Leftrightarrow \quad \underline{x = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}}$$

Så bytter vi om *x* og *y*, og får

$$\underline{\underline{y = f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}}}.$$

Vi ser at $V_f = \underline{\underline{[-1, \rightarrow\rangle}}$, og at

$$D_{f^{-1}} = V_f = \underline{\underline{[-1, \rightarrow\rangle}},\ V_{f^{-1}} = D_f = \underline{\underline{[0, \rightarrow\rangle}}.$$



b) Funksjonen $f(x)=x^2+1$ er en-en-tydig når $D_f=[0,\rightarrow\rangle$. Da får vi:

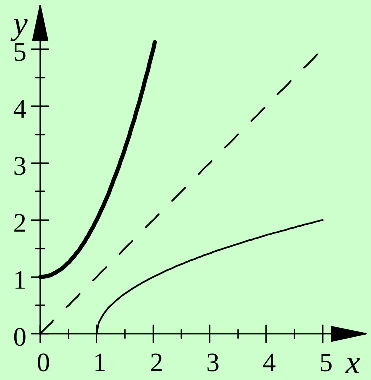
$$y=x^2+1 \quad\Leftrightarrow\quad x=+\sqrt{y-1}.$$

Så bytter vi om x og y, og får

$$\underline{\underline{y=f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}}}.$$

Vi ser at $V_f=\underline{\underline{[1,\rightarrow\rangle}}$, og at

$$D_{f^{-1}}=V_f=\underline{\underline{[1,\rightarrow\rangle}},\ V_{f^{-1}}=D_f=\underline{\underline{[0,\rightarrow\rangle}}.$$

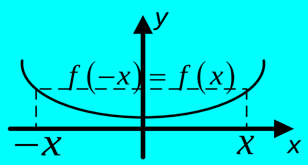


[Oppgave 1.3.1](#).

1.4. Jamne og odde funksjoner.

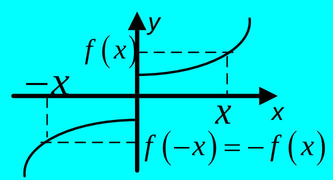
Når du tegner grafer til funksjoner, vil du noen ganger se at grafen ”speiler seg” om en linje eller om et punkt. Et par slike ”speilinger” er spesielt viktige:

Dersom grafen ”speiler seg” om funksjons-aksen (andreaksen), sier vi at funksjonen er ***jamn***. Se figuren nedenfor.



Formell definisjon: En funksjon f er ***jamn*** hvis og bare hvis $f(-x)=f(x)$ for alle x i definisjonsmengden.

Dersom grafen ”speiler seg” om origo, sier vi at funksjonen er ***odde***. Se figuren nedenfor.



Formell definisjon: En funksjon f er ***odde*** hvis og bare hvis $f(-x)=-f(x)$ for alle x i definisjonsmengden.

***Eksempel 1.4.1*:** Undersøk om funksjonene nedenfor er jamne, odde eller ingen av delene:

a) $y=f_1(x)=x^2+3$

b) $y=f_2(x)=x^3-2x$

c) $y=f_3(x)=2x^2+x-1$

Løsning:

a) $f_1(-x)=(-x)^2+3=x^2+3=f_1(x)$ slik at f_1 er jamn.

b) $f_2(-x)=(-x)^3-2\cdot(-x)=-x^3+2x=-(x^3-2x)=-f_2(x)$ slik at f_2 er odde.

c) $f_3(-x)=2(-x)^2+(-x)-1=2x^2-x-1$ som verken er lik $f_3(x)$ eller $-f_3(x)$, slik at f_3 er verken jamn eller odde.

[Oppgave 1.4.1](#).

2. Noen enkle funksjoner.

2. 1. Polynomfunksjoner.

En funksjon av typen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

er et ***polynom i x av grad n***. Slike polynomfunksjoner er relativt greie å studere ved hjelp av derivasjon, og vi skal derfor ikke se på generelle egenskaper ved slike funksjoner ennå. Unntaket er ***førstegradspolynomer***, som vil skal se på nedenfor.

2.1.1. Lineære funksjoner.

En spesiell polynomfunksjon forekommer så vanlig at vi skal se nærmere på den. Det er førstegradsgrads-polynomet:

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x.$$

Her er a_0 og a_1 konstanter. Grafen til denne funksjonen blir ei rett linje, og vi sier gjerne at dette er en ***lineær funksjon*** eller at det er en lineær sammenheng mellom *x* og *y*.

Koeffisientene a_0 og a_1 har spesiell betydning:

- a_0 er ***skjæringspunktet med funksjonsaksen***. Dette ser du direkte fordi $y = a_0$ når $x = 0$.
- a_1 er ***stigningstallet til grafen***, og angir hvor mye funksjonsverdien *y* øker når *x* øker med 1.

Eksempel 2.1.1: Tegn grafen til disse funksjonene:

a) $y = f(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $y = f(x) = 3 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Løsning:

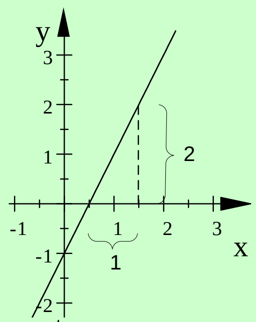
a)

Grafen til funksjonen

$$y = 2x - 1$$

er en rett linje som har stigningstall 2 og skjærer *y*-aksen når $y = -1$.

Grafen er tegnet til høyre.



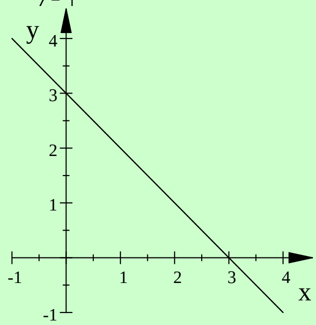
b)

Grafen til funksjonen

$$y = 3 - x = -1 \cdot x + 3$$

er en rett linje som har stigningstall -1 og skjærer *y*-aksen når $y = 3$.

Grafen er tegnet til høyre.



Oppgave 2.1.1.

I praksis har vi ofte bruk for å finne a_0 og a_1 når vi kjenner stigningstallet til grafen og et punkt på grafen, eller når vi kjenner to punkter på grafen.

Anta at vi kjenner stigningstallet k og et punkt $(x_1,\ y_1)$. Siden punktet ligger på grafen, er

$$y_1 = k \cdot x_1 + a_0 .$$

For *ethvert* punkt (x, y) som ligger på grafen, er

$$y = k \cdot x + a_0 .$$

Vi kvitter oss med a_0 ved å trekke disse likningene fra hverandre, og får

$$y - y_1 = k(x - x_1) .$$

Dette er ***ettpunktsformelen*** for en rett linje.

Legg merke til at denne formelen fører til at dersom (x, y) og $(x_1,\ y_1)$ er to punkter på grafen, blir stigningstallet

$$k = \frac{y - y_1}{x - x_1} .$$

Dette kan vi benytte dersom vi kjenner to punkter $(x_1,\ y_1)$ og $(x_2,\ y_2)$ på linja. Da setter vi

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

slik at dersom (x, y) er et vilkårlig punkt på den rette linja gjennom disse punktene, blir formelen for denne rette linja

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) .$$

Dette er ***topunkts-formelen*** for en rett linje.

Vi summerer opp:

Dersom vi kjenner to punkter $(x_1,\ y_1)$ og $(x_2,\ y_2)$ på ei rett linje, er stigningstallet

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$

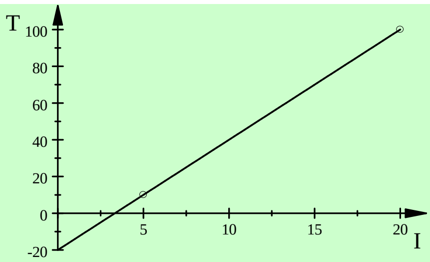
Likningen for linja er

$$y - y_1 = k(x - x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) .$$

***Eksempel 2.1.2*:** En temperaturmåler gir ut en elektrisk strøm som mål for temperaturen. Du vet at når temperaturen er +10°C blir strømmen 5.00 mA, mens +100°C fører til en strøm på 20.0 mA. Dessuten vet du at det er lineær sammenheng mellom temperatur og strøm.
Sett opp en formel for temperaturen T uttrykt ved strømmen I.

Løsning: Tegner inn de gitte opplysningene i et koordinatsystem der strømmen I avsettes langs førsteaksen og temperaturen T avsettes langs andreaksen. Siden det er lineær sammenheng mellom T og I, har vi at:

$$T - T_1 = \frac{T_2 - T_1}{I_2 - I_1}\left(I - I_1\right).$$



Vi velger vilkårlig at punktet $(5.00, 10)$ svarer til (I_1, T_1) mens $(20.0, 100)$ svarer til (I_2, T_2) (vi kunne godt gjort det omvendt). Da får vi:

$$T - 10 = \frac{100-10}{20-5}(I-5) \quad \Leftrightarrow \quad T - 10 = \frac{90}{15}(I-5) = 6I - 30 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T = 6I - 20}}$$

Oppgave 2.1.2.

2.2. Brøkfunksjoner.

En funksjon av typen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

der $P(x)$ og $Q(x)$ begge er polynomer i x, kalles en ***brøkfunksjon*** eller en ***rasjonal funksjon***.

En ”ekte” brøkfunksjon har lavere grad i teller enn i nevner. Et eksempel på en ”ekte” brøk-funksjon er

$$y = f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}.$$

Dersom graden i teller er større enn eller lik graden i nevner, kan funksjonen omformes til en sum av et polynom og en ”ekte” brøkfunksjon ved hjelp av polynomdivisjon (som er behandlet i heftet om "forkunnskaper"). Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 2.2.1: Skriv funksjonen

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$$

som en sum av en polynomfunksjon og en ”ekte” brøkfunksjon, og benytt resultatet til å skissere grafen til y.

Løsning: Setter opp polynomdivisjonen:

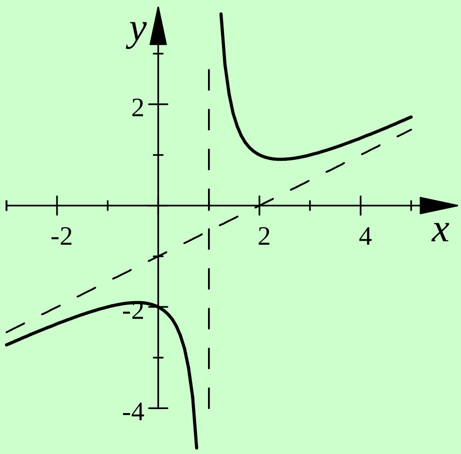
$$\begin{array}{l}
\left(x^2 - 3x + 4\right) : (2x - 2) = \tfrac{1}{2}x - 1 + \tfrac{2}{2x-2} = \tfrac{1}{2}x - 1 + \tfrac{1}{x-1} \\
\underline{-\left(x^2 - x\right)} \\
\quad -2x + 4 \\
\quad \underline{-(-2x + 2)} \\
\qquad\qquad 2
\end{array}$$

Vi ser at

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{x-1}}}.$$

Når vi skisserer grafen, benytter vi at når x er svært nær 1, blir $x - 1 \approx 0$ slik at $\frac{1}{x-1} \to \pm\infty$ (fortegnet avhenger av om nevneren er positiv eller negativ). Vi får da en ***vertikal asymptote***.

Men når x er langt fra 1, vil $\frac{1}{x-1} \to 0$ slik at $y \to \frac{1}{2}x - 1$. Denne rette linja blir da en ***skrå asymptote***. På figuren til venstre er grafen til f tegnet inn sammen med asymptotene. Vi har da benyttet at $f(x) > \frac{1}{2}x - 1$ når $x > 1$, og at $f(x) < \frac{1}{2}x - 1$ når $x < 1$.



Oppgave 2.2.1.

2.3. Funksjoner på intervallform. Absoluttverdi-funksjoner.

Hittil har vi kun sett på funksjoner som er gitt ved *en* funksjonsforskrift: $y = f(x)$. Men vi kommer ofte bort i funksjoner som er gitt ved ett funksjonsuttrykk i ett intervall, et annet funksjonsuttrykk i et annet intervall osv. Vi sier at slike funksjoner er gitt på *intervallform*, eller at vi har en *delt funksjonsforskrift*.

Mer formelt er funksjonen gitt slik:

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{når } x \in I_1 \\ f_2(x) & \text{når } x \in I_2 \\ & \vdots \\ f_n(x) & \text{når } x \in I_n \end{cases}$$

Her er $I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_n$ disjunkte mengder slik at $D_f = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$.

Virket dette kryptisk? Her kommer et eksempel:

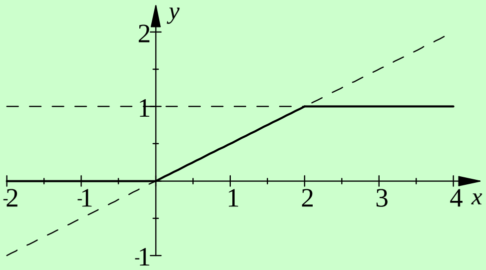
Eksempel 2.3.1: Tegn grafen til en funksjon f som er gitt slik:

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når} & x < 0 \\ \tfrac{1}{2}x & \text{når} & 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{når} & x \ge 2 \end{cases}$$

Løsning: Grafen blir som angitt nedenfor:

Funksjonsgrafen er tegnet med hel strek, mens grafene til $y = \frac{1}{2}x$ og $y = 1$ er stiplet.

Legg merke til hvordan hvert funksjonsuttrykk kun gjelder i det angitte intervallet. Legg også merke til at det er angitt en og kun en funksjonsverdi for hver verdi av *x*.



Oppgave 2.3.1.

Slike intervallfunksjoner forekommer faktisk ganske ofte i praksis, slik eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 2.3.2: For året 2009 var satsene for arveavgift når et barn arvet en av foreldrene:
Av de første 470 000 kr: 0% avgift.
Av de neste 330 000 kr: 6% avgift.
Av det overskytende: 10% avgift.
La *x* være arvens størrelse og *y* arveavgiften. Sett opp *y* som funksjon av *x*.

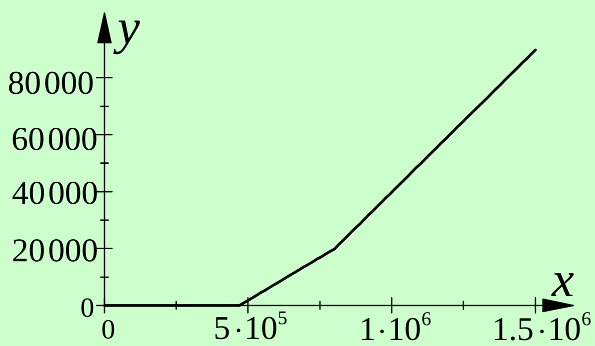
Løsning: Vi lar definisjonsmengden være $D_f = [0, \rightarrow\rangle$.

- Dersom $0 \le x < 470000$, er $y = 0$.
- Dersom $470000 \le x < 800000$, er det 6% avgift av det som overstiger 470 000. Da er
  $$y = (x - 470000) \cdot 0.06 = \underline{0.06x - 28200}.$$
- Dersom $x \ge 800000$, må det betales 6% avgift av 330 000 kroner (d.v.s. $330000 \cdot 0.06 = 19800$), og deretter 10% avgift av det som overstiger 800 000. Da blir
  $$y = 19800 + (x - 800000) \cdot 0.10 = 19800 + 0.10x - 80000 = \underline{0.10x - 60200}.$$

Vi summerer opp:

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad 0 \le x < 470000 \\ 0.06x - 28200 & \text{når} \quad 470000 \le x < 800000 \\ 0.10x - 60200 & \text{når} \quad x \ge 800000 \end{cases}$$

For oversiktens skyld tegner jeg opp grafen til *y* nedenfor.



En helt spesiell intervallfunksjon er ***absoluttverdifunksjonen***. Absoluttverdifunksjonen til x skrives $|x|$, og er definert slik:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{når} \quad x < 0 \\ x & \text{når} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Denne definisjonen fører til at absoluttverdien aldri kan bli negativ fordi $-x$ blir positiv når $x < 0$.

Eksempel 2.3.3: Skriv absoluttverdifunksjonen nedenfor på intervallform, og tegn grafen:

$y = f(x) = |x - 1|$, $D_f = \mathbb{R}$.

Løsning: Vi må ta for oss to intervaller:

Når $x - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1$, er

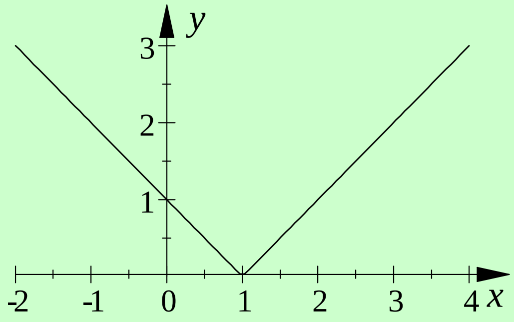
$y = -(x - 1) = -x + 1$.

Når $x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$, er $y = x - 1$.

Dermed har vi at

$$y = f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{når} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{når} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

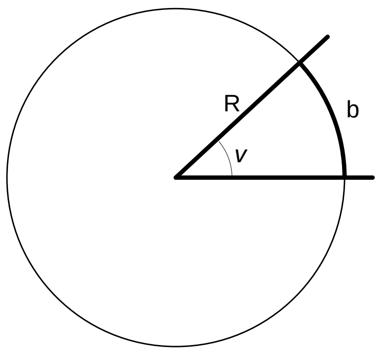
Grafen er tegnet til høyre.



Oppgave 2.3.2.

3. Trigonometriske funksjoner.

3.1. Vinkelmål.



Da vi definerte sinus, cosinus og tangens i heftet om "forkunnskaper", målte vi vinkler i grader. Men i matematikk er det ofte mer hensiktsmessig å bruke et annet vinkelmål, nemlig ***radianer***. Når vi måler en vinkel i radianer, tenker vi oss at vi slår en sirkel med sentrum i vinkelens topp-punkt. Da er vinkelens radiantall lik forholdet mellom lengden b av den sirkelbuen som vinkelen avskjærer og lengden R av radien, slik figuren til venstre viser:

$$v = \frac{b}{R}$$

Omregning mellom grader og radianer skjer etter formelen nedenfor:

Når g er gradtallet til en vinkel, mens v er vinkelen målt i radianer, er

$$\frac{g}{180} = \frac{v}{\pi}$$

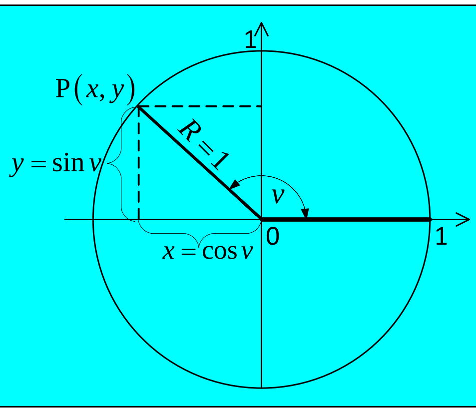
Formelen følger av at forholdet mellom vinkelens gradtall og 360° er lik forholdet mellom buelengden og sirkelens omkrets:

$$\frac{g}{360} = \frac{b}{2\pi R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g}{180} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b}{R} = \frac{v}{\pi}.$$

Noen sammenhenger mellom grader og radianer for en vinkel er så vanlige at vi bør kjenne dem. I **Oppgave 3.1.1.** skal du bl.a. lage en tabell over slike sammenhenger.

3.2. De trigonometriske funksjonene.

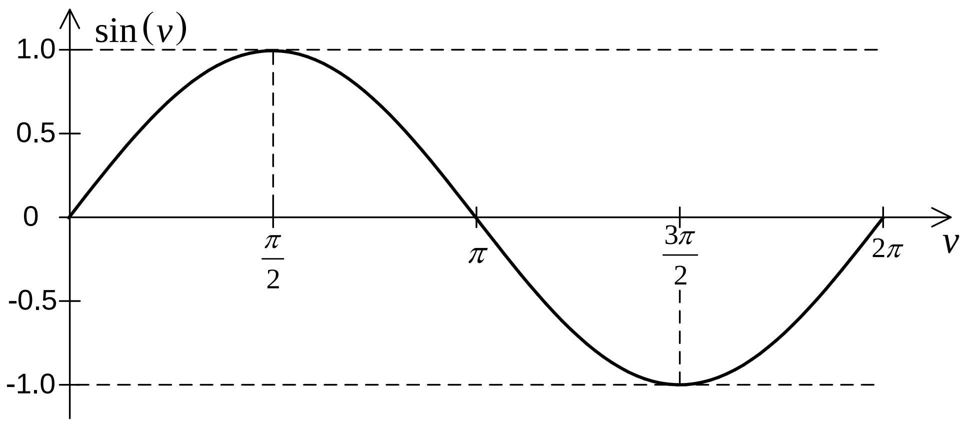
I heftet om "forkunnskaper" definerte vi sinus, cosinus og tangens til en vinkel v slik:

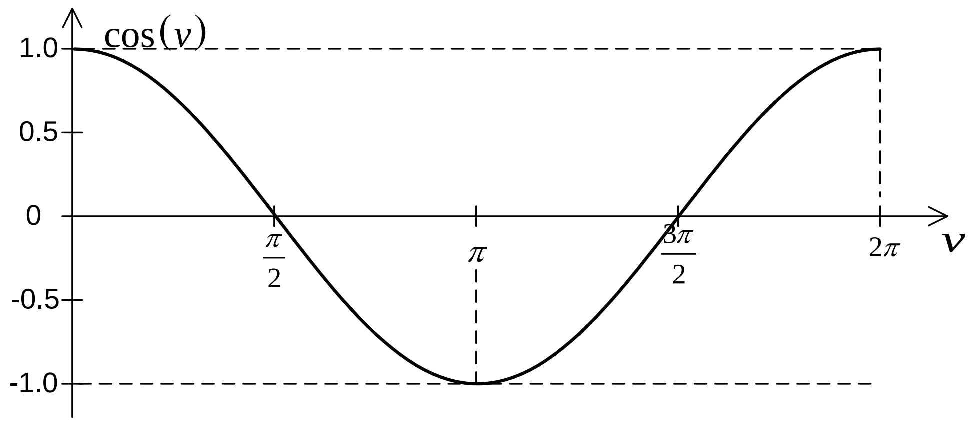


- $\sin v = \frac{y}{R} = y$.
- $\cos v = \frac{x}{R} = x$.
- $\tan v = \frac{y}{x}$.

Vi nevnte også at både sinus, cosinus og tangens egentlig er *funksjoner* der *v* er den fri variabelen mens sinus-, cosinus- og tangens-verdiene er funksjonsverdier, slik at vi bør skrive *v*-en i parentes: $\sin(v)$, $\cos(v)$ og $\tan(v)$.

Nå som sinus, cosinus og tangens er blitt funksjoner, kan vi også tegne funksjonsgrafer. Grafen for $\sin v$ blir *y*-verdiene til punktet P på figuren over som funksjon av den frie variabelen *v*, mens grafen for $\cos v$ blir *x*-verdiene til P. For vinkler mellom 0 og 2π (eller 0° og 360°) blir grafene for sinus og cosinus som vist nedenfor:





I en enhetssirkel kan vi godt ha negative vinkler. Vi kan også ha vinkler som er større enn 2π. Generelt har vi at:

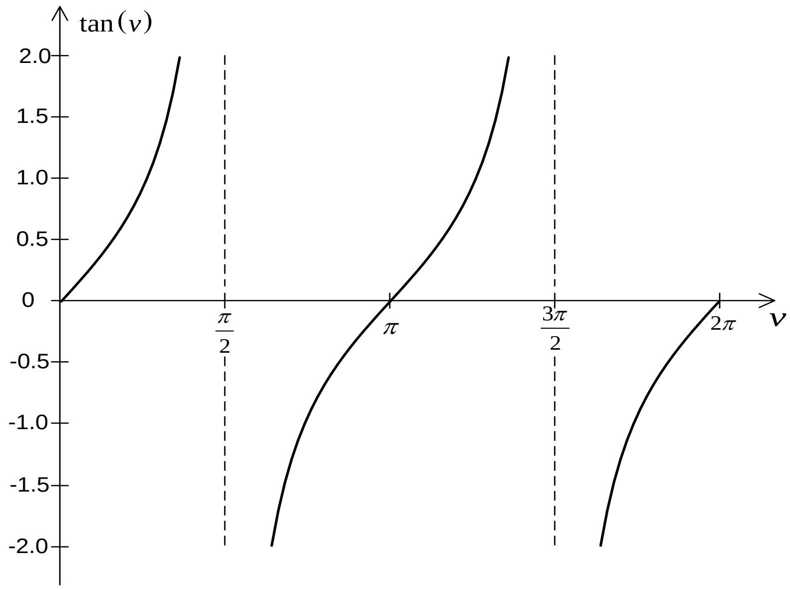
$$\sin(v \pm n \cdot 2\pi) = \sin v, \qquad \cos(v \pm n \cdot 2\pi) = \cos v, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Vi sier at sinus- og cosinus-funksjonene er ***periodiske*** med periode 2π . Dette medfører at du kan tegne sinus- og cosinus-grafer for alle mulige vinkler ved å kopiere sinus- eller cosinus-grafene ovenfor og forskyve dem en strekning $n \cdot 2\pi$ i begge retninger.

På grunnlag av sinus- og cosinus-verdiene kan vi nå beregne tangens-verdier. Grafen til tangens-funksjonen er vist nedenfor. Legg merke til at tangens-funksjonen ikke er definert når $v = \frac{\pi}{2}$ og når $v = \frac{3}{2}\pi$. Dette skyldes at nevneren ($\cos v$) i uttrykket

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

er lik null når $v = \frac{\pi}{2}$ og når $v = \frac{3}{2}\pi$.

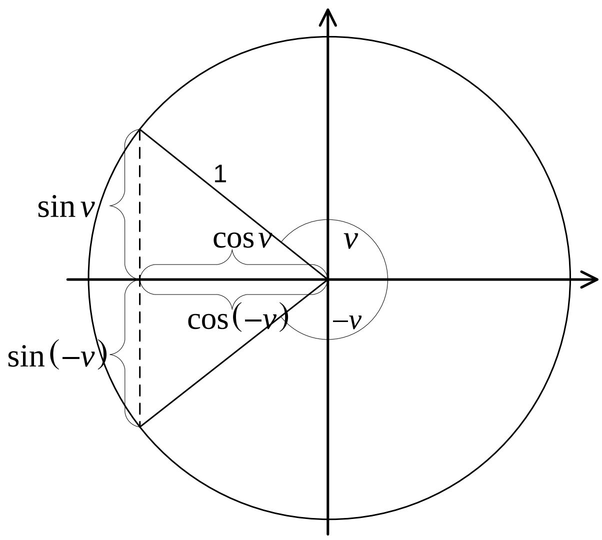


Av grafen merker vi oss at mens sinus- og cosinus-funksjonene er periodiske med periode 2π, er tangens-funksjonen periodisk med periode π .

Disse grafene for sinus, cosinus og tangens bør du kjenne så godt at du uten videre kan skissere dem opp. Merk spesielt verdiene for skjæringene med *v*-aksen. For sinus- og cosinus-grafene bør du dessuten kjenne og topp- og bunnpunkt, og for tangens-grafen bør du kjenne de vinklene der grafen ikke er kontinuerlig.

3.3. Noen viktige sammenhenger.

3.3.1. Negative vinkler.



Figuren til venstre viser en vinkel *v* sammen med vinkelen $-v$ i en enhetssirkel. Av figuren får vi:

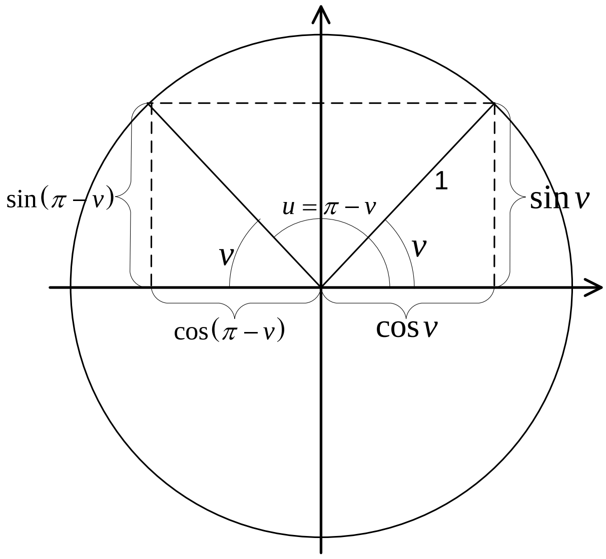
$$\sin(-v) = -\sin v$$
$$\cos(-v) = \cos v$$
$$\tan(-v) = -\tan v$$

Den siste sammenhengen får vi fordi

$$\tan(-v) = \frac{\sin(-v)}{\cos(-v)}$$
$$= \frac{-\sin v}{\cos v} = \underline{-\tan v}$$

3.3.2. Supplementvinkler.

To vinkler u og v er ***supplementvinkler*** dersom $u+v=\pi$.



Figuren til venstre viser de to supplementvinklene v og $u=\pi-v$ i en enhetssirkel. Av figuren får vi:

$$\sin(\pi-v)=\sin v$$
$$\cos(\pi-v)=-\cos v$$
$$\tan(\pi-v)=-\tan v$$

Den siste sammenhengen får vi fordi

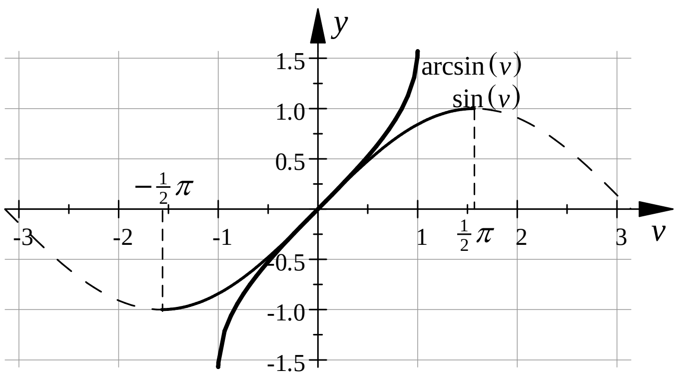
$$\tan(\pi-v)=\frac{\sin(\pi-v)}{\cos(\pi-v)}=\frac{\sin v}{-\cos v}=\underline{-\tan v}$$

3.4. Inverse trigonometriske funksjoner.

I heftet om "forkunnskaper" definerte vi også de *inverse trigonometriske funksjonene*, som vi definerte slik:

$$y=\sin(v),\quad v\in\left[-\tfrac{1}{2}\pi,\,\tfrac{1}{2}\pi\right] \quad\Leftrightarrow\quad v=\arcsin(y)=\sin^{-1}(y)$$
$$y=\cos(v),\quad v\in[0,\pi] \quad\Leftrightarrow\quad v=\arccos(y)=\cos^{-1}(y)$$
$$y=\tan(v),\quad v\in\left\langle-\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\pi\right\rangle \quad\Leftrightarrow\quad v=\arctan(y)=\tan^{-1}(y)$$

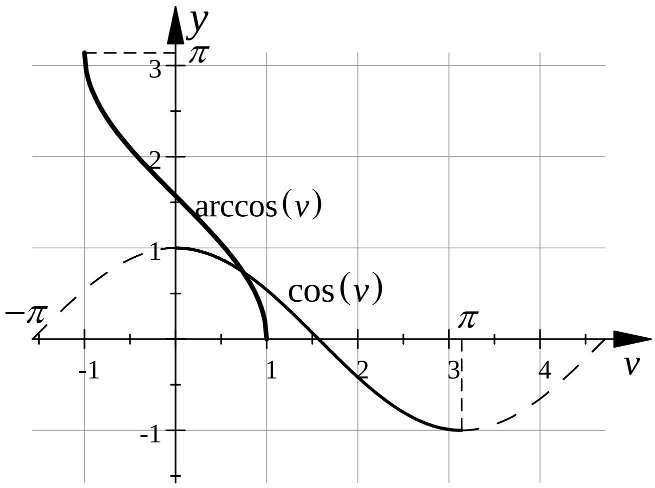
Vi må begrense definisjonsområdet til de inverse trigonometriske funksjonene for å få en-entydige funksjoner. Dette er illustrert nedenfor.



Til venstre ser du grafen til $f(v)=\arcsin(v)$ sammen med grafen til $\sin v$. Vi ser at når $\sin v$ er kjent, er v entydig bestemt bare når vi vet at v ligger i området $\left[-\tfrac{1}{2}\pi,\,\tfrac{1}{2}\pi\right]$.

Dermed har vi at:

$$D_f=[-1,1],$$
$$V_f=\left[-\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\pi\right].$$

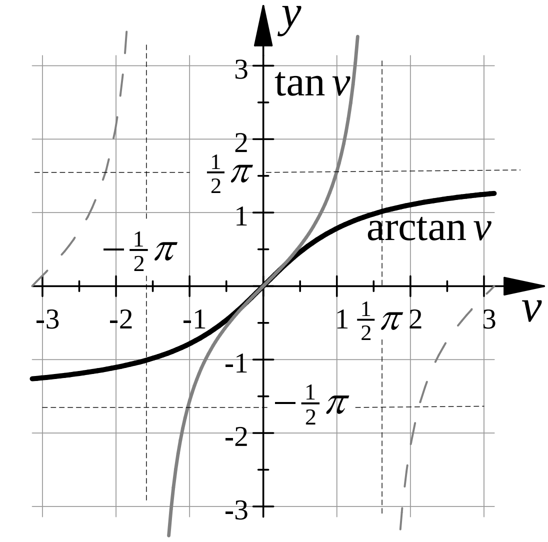


Til venstre ser du grafen til $f(v) = \arccos(v)$ sammen med grafen til $\cos v$. Vi ser at når $\cos v$ er kjent, er v entydig bestemt bare når vi vet at v ligger i området $[0, \pi]$.

Dermed har vi at:

$$D_f = [-1, 1],$$

$$V_f = [0, \pi].$$



Til venstre ser du grafen til $f(v) = \arctan(v)$ sammen med grafen til $\tan v$. Vi ser at når $\tan v$ er kjent, er v entydig bestemt bare når vi vet at v ligger i området $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$.

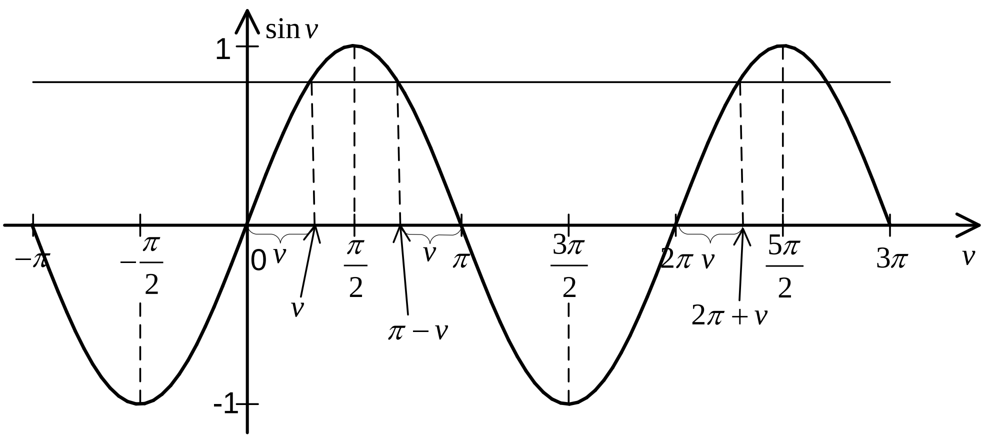
Dermed har vi at:

$$D_f = \mathbb{R},$$

$$V_f = \left\langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi \right\rangle.$$

3.5. Vinkler med samme sinus- eller cosinus-verdi.

Selv om arcus-funksjonene kun er definert innenfor begrensede vinkelområder, må vi ofte gå utenfor disse områdene. Vi skal nå se hvordan vi kan finne flere forskjellige vinkler som har samme sinus-verdi eller samme cosinus-verdi. Vi starter da med å tegne en sinus-graf, men forlenger den i begge retninger så langt vi har behov for. Vi får da en figur som vist nedenfor:



På figuren har vi tegnet inn en horisontal linje for en tilfeldig verdi av $\sin v$. Videre er det avmerket tre forskjellige vinkler som har samme sinus-verdi. Vi ser at

$$\sin v = \sin(\pi - v) = \sin(2\pi + v).$$

Legg spesielt merke til den første likheten:

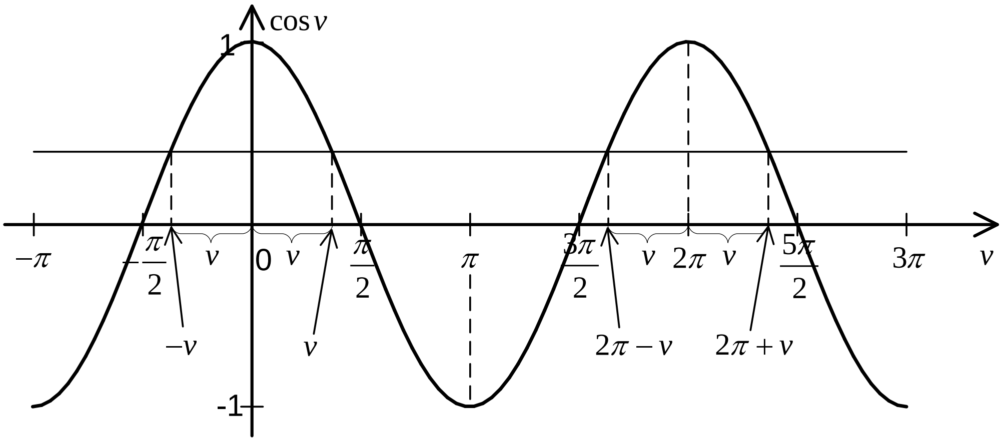
$$\sin v = \sin(\pi - v).$$

Den siste likheten,

$$\sin v = \sin(2\pi + v),$$

kommer av at sinus-funksjonen er periodisk med periode 2π.

På samme måte kan vi tegne en cosinus-graf, og forlenge den forbi området $[0,\ 2\pi]$. Vi får da figuren nedenfor:



På figuren har vi tegnet inn en horisontal linje for en tilfeldig verdi av $\cos v$. Videre er det avmerket 4 forskjellige vinkler som har samme cosinus-verdi:

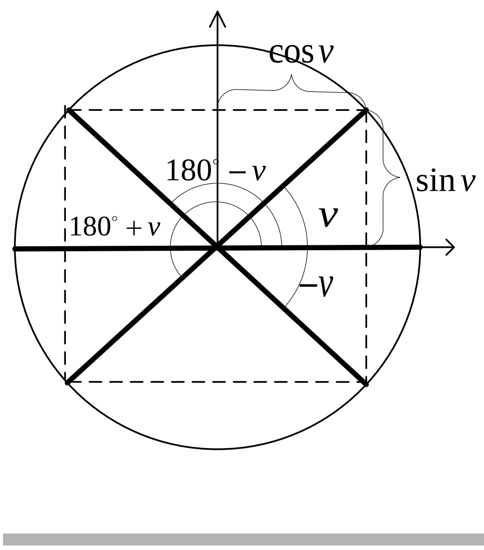
$$\cos v = \cos(-v) = \cos(2\pi - v) = \cos(2\pi + v).$$

Vi kan faktisk sette opp disse sammenhengene uten å tegne cosinus-grafen først. Vi vet fra før at

$$\cos v = \cos(-v).$$

Videre vet vi at cosinus-funksjonen er periodisk med periode 2π. Da er også

$$\cos(-v) = \cos(2\pi - v), \qquad \cos v = \cos(2\pi + v).$$



Enhetssirkelen er svært nyttig til å oppdage sammenhenger mellom vinkler. Av figuren til venstre skal det være mulig å se at:

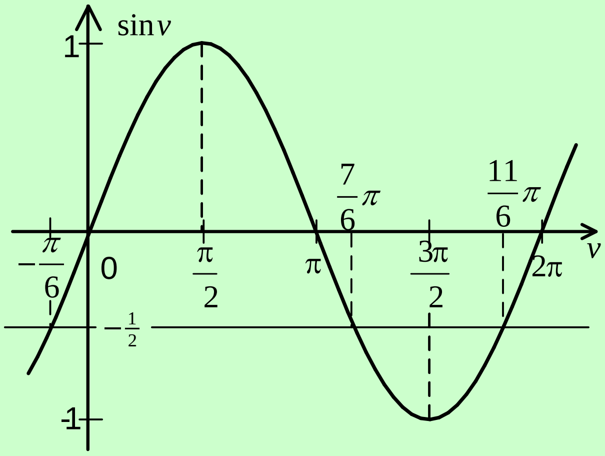
$$\sin(-v) = -\sin v$$
$$\cos(-v) = \cos v$$

$$\sin(\pi - v) = \sin v$$
$$\cos(\pi - v) = -\cos v$$

$$\sin(\pi + v) = -\sin v$$
$$\cos(\pi + v) = -\cos v$$

Eksempel 3.5.1: Bruk graf og/eller enhetssirkel til å finne de vinklene *v* som er slik at:
$\sin v = -\frac{1}{2}$, $\quad 0 \le v < 2\pi$.

Løsning:



På figuren har vi tegnet inn en sinusgraf, og linja $\sin v = -\frac{1}{2}$.

Linjene skjærer hverandre når $v = -\frac{\pi}{6}$.

Dette ser du fordi du vet at $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

og at $\sin(-v) = -\sin v$. Da må

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Men denne verdien ligger ikke i området $0 \le v < 2\pi$. Vi må derfor legge til 2π, og får at

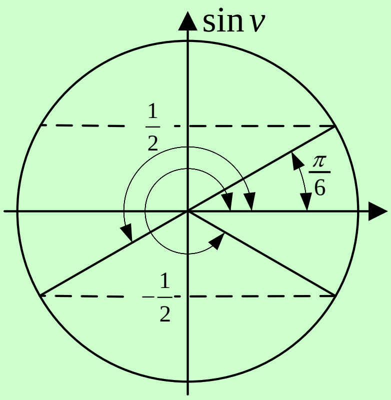
$$v = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \underline{\underline{\frac{11}{6}\pi}}.$$

Men du får en løsning til. På grunn av symmetrien rundt $v = \frac{3}{2}\pi$ ser du at denne løsningen må bli

$$v = \pi + \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{7}{6}\pi}}.$$

En mer formell framgangsmåte er å benytte at $\sin(\pi - v) = \sin v$. Da blir

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right).$$



Så var det bruk av enhetssirkel. På figuren til venstre har vi tegnet inn stiplede linjer for $\sin v = \frac{1}{2}$ og $\sin v = -\frac{1}{2}$.

Du vet at når $v = \frac{\pi}{6}$ er $\sin v = \frac{1}{2}$.

Da ser du av enhetssirkelen at de to vinklene som har $\sin v = -\frac{1}{2}$ er

$$v = \frac{\pi}{6} + \pi = \underline{\underline{\frac{7}{6}\pi}}$$

og

$$v = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{11}{6}\pi}}.$$

Oppgave 3.5.1.

3.6. Enkle trigonometriske likninger.

Vi får ofte bruk for å løse likninger som inneholder trigonometriske funksjoner. Det fins ingen standard metoder eller formler for å løse slike likninger. Men noen teknikker går igjen, og vil bli demonstrert i eksemplene nedenfor.

Eksempel 3.6.1: Løs disse likningene:

a) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0, \quad x \in [0,\, 2\pi]$.

b) $2\sin^2 x - \sin x = 1, \quad x \in [0,\, 2\pi]$.

c) $\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0, \quad x \in [0,\, 2\pi]$.

Løsning:

a) Vi merker oss at $\cos x = 0$ ikke kan være løsning av likningen. For når $\cos x = 0$, er $\sin x = \pm 1$, og da er ikke likningen oppfylt. Vi kan derfor dele likningen på $\cos x$ uten å risikere å dele på null, og får en likning i $\tan x$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3}\frac{\cos x}{\cos x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = -\sqrt{3}.$$

Bruker vi nå kalkulator, får vi at $x = -\frac{\pi}{3}$. Men denne verdien ligger ikke i grunnmengden som er $[0,\, 2\pi]$. Men vi vet at tangens-funksjonen er periodisk med periode π. Vi får derfor at

$$x = -\tfrac{\pi}{3} + \pi = \underline{\tfrac{2}{3}\pi}$$

og

$$x = -\tfrac{\pi}{3} + 2\pi = \underline{\tfrac{5}{3}\pi}$$

er brukbare løsninger. Løsningsmengden blir da

$$\underline{\underline{\left(\tfrac{2}{3}\pi,\ \tfrac{5}{3}\pi\right)}}.$$

b) Dette er en andregradslikning i $\sin x$. Vi får ved hjelp av formel at

$$2\sin^2 x - \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \underline{1} \\ \underline{-\tfrac{1}{2}} \end{cases}.$$

Det er kun en x-verdi i området $[0,\, 2\pi]$ som gir $\sin x = 1$, og det er $x = \underline{\tfrac{\pi}{2}}$.

Fra Eksempel 3.5.1 vet vi at når $\sin x = -\frac{1}{2}$ og $x \in [0,\, 2\pi]$, så er $x = \underline{\tfrac{7}{6}\pi}$ eller $x = \underline{\tfrac{11}{6}\pi}$.

Sammen med løsningen $x = \underline{\tfrac{\pi}{2}}$ får vi at løsningsmengden blir

$$\underline{\underline{\left(\tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{7}{6}\pi,\ \tfrac{11}{6}\pi\right)}}.$$

c) Også dette er en andregradslikning. Men her er $\sin x$ felles faktor i begge leddene, og kan settes utenfor parentes:

$$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x(\sin x - \cos x) = 0.$$

Nå vet vi at et produkt er lik null hvis og bare hvis minst en av faktorene er lik null. Dette gir, når $x \in [0,\, 2\pi]$:

$$\sin x = 0 \quad \vee \quad \sin x - \cos x = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(x = \underline{0} \quad \vee \quad x = \underline{\pi}\right) \quad \vee \quad \left(\tan x - 1 = 0\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(x = \underline{0} \quad \vee \quad x = \underline{\pi}\right) \quad \vee \quad \left(\tan x = 1\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(x = \underline{0} \quad \vee \quad x = \underline{\pi}\right) \quad \vee \quad \left(x = \underline{\tfrac{1}{4}\pi} \quad \vee \quad x = \tfrac{1}{4}\pi + \pi = \underline{\tfrac{5}{4}\pi}\right)$$

Løsningsmengden blir altså

$$\underline{\underline{\left(0, \tfrac{1}{4}\pi, \pi, \tfrac{5}{4}\pi\right)}}.$$

Oppgave 3.6.1.

Du må regne med å støte på adskillig vanskeligere trigonometriske likninger enn dette. Du kan også komme bort i ulikheter med trigonometriske funksjoner. Før vi går løs på slike problem, må vi skaffe oss mer kunnskap om trigonometriske identiteter.

3.7. Noen trigonometriske identiteter.

Det fins en vrimmel av trigonometriske identiteter. Du vet forhåpentlig allerede at:

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}, \qquad \sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

I kap. 3.3 har vi ført opp noen flere elementære identiteter. Men vi har flere, og mange av dise bygger på de identitetene som vi skal sette opp nedenfor:

3.7.1. Sinus, cosinus og tangens til en sum av to vinkler.

Jeg skal nå føre opp to nye identiteter som danner utgangspunkt for mange andre:

$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v, \qquad \sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$$
$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v, \qquad \cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$

Identitetene for $\sin(u+v)$ og $\cos(u+v)$ er utledet i et vedlegg.

Identitetene for $\sin(u-v)$ og $\cos(u-v)$ følger direkte ved å benytte at $\sin(-v) = -\sin v$ og $\cos(-v) = \cos v$ slik:

$$\sin(u-v)=\sin(u+(-v))=\sin u\cdot\cos(-v)+\cos u\cdot\sin(-v)=\underline{\underline{\sin u\cdot\cos v-\cos u\cdot\sin v}}$$

$$\cos(u-v)=\cos(u+(-v))=\cos u\cdot\cos(-v)-\sin u\cdot\sin(-v)=\underline{\underline{\cos u\cdot\cos v+\sin u\cdot\sin v}}$$

Dessuten har vi:

$$\tan(u+v)=\frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\cdot\tan v},\qquad \tan(u-v)=\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\cdot\tan v}$$

Disse to identitetene utledes slik:

$$\tan(u+v)=\frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)}=\frac{\sin u\cdot\cos v+\cos u\cdot\sin v}{\cos u\cdot\cos v-\sin u\cdot\sin v}\cdot\frac{\frac{1}{\cos u\cdot\cos v}}{\frac{1}{\cos u\cdot\cos v}}$$

$$=\frac{\frac{\sin u}{\cos u}+\frac{\sin v}{\cos v}}{1-\frac{\sin u\cdot\sin v}{\cos u\cdot\cos v}}=\underline{\underline{\frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\cdot\tan v}}}$$

$$\tan(u-v)=\frac{\tan u+\tan(-v)}{1-\tan u\cdot\tan(-v)}=\underline{\underline{\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\cdot\tan v}}}.$$

Eksempel 3.7.1: Finn eksakte verdier for sinus, cosinus og tangens til 75°.

Løsning: Benytter at $75^\circ=45^\circ+30^\circ$, og får:

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\underline{\underline{\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}}$$

$$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\underline{\underline{\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}}$$

$$\tan(75^\circ)=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\cdot\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1-1\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{9+2\cdot 3\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}{9-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=\frac{\cancel{6}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\cancel{6}}=\underline{\underline{2+\sqrt{3}}}$$

Eller:

$$\tan 75^\circ=\frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}=\frac{\cancel{\tfrac{1}{4}}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\cancel{\tfrac{1}{4}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2+2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{12}+2}{6-2}=\frac{8+2\sqrt{4\cdot 3}}{4}=\frac{8+2\cdot 2\sqrt{3}}{4}=\frac{\cancel{4}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\cancel{4}}=\underline{\underline{2+\sqrt{3}}}$$

Oppgave 3.7.1.

Ved å benytte rettvinklede trekanter har vi tidligere sett at $\sin\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=\cos v$ og at $\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=\sin v$ der $0\le v\le\frac{1}{2}\pi$ siden vi har rettvinklede trekanter. Men ved å sette inn $u=\frac{1}{2}\pi$ i identitetene for $\sin(u-v)$ og $\cos(u-v)$, får vi at:

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-v\right)=\sin\tfrac{\pi}{2}\cdot\cos v-\cos\tfrac{\pi}{2}\cdot\sin v=1\cdot\cos v-0\cdot\sin v=\underline{\cos v}\,.$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-v\right)=\cos\tfrac{\pi}{2}\cdot\cos v+\sin\tfrac{\pi}{2}\cdot\sin v=0\cdot\cos v+1\cdot\sin v=\underline{\sin v}\,.$$

Dermed har vi vist at disse identitetene gjelder generelt:

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-v\right)=\cos v \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-v\right)=\sin v \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2}-v\right)=\frac{1}{\tan v}$$

3.7.2. Sinus, cosinus og tangens til doble vinkler.

Dersom vi setter $u=v$ i formlene for $\sin(u+v)$, $\cos(u+v)$ og $\tan(u+v)$ får vi:

$$\sin(2v)=\sin(v+v)=\sin v\cdot\cos v+\cos v\cdot\sin v=\underline{\underline{2\sin v\cdot\cos v}}\,.$$

$$\cos(2v)=\cos(v+v)=\cos v\cdot\cos v-\sin v\cdot\sin v=\underline{\underline{\cos^2 v-\sin^2 v}}$$

$$=\begin{cases}\left(1-\sin^2 v\right)-\sin^2 v=\underline{\underline{1-2\sin^2 v}}\\ \cos^2 v-\left(1-\cos^2 v\right)=\underline{\underline{2\cos^2 v-1}}\end{cases}$$

$$\tan(2v)=\tan(v+v)=\frac{\tan v+\tan v}{1-\tan v\cdot\tan v}=\underline{\underline{\frac{2\tan v}{1-\tan^2 v}}}\,.$$

Dermed har vi vist disse viktige identitetene:

$$\begin{aligned}\sin(2v)&=2\sin v\cdot\cos v\\ \cos(2v)&=\cos^2 v-\sin^2 v\\ &=2\cos^2 v-1\\ &=1-2\sin^2 v\\ \tan(2v)&=\frac{2\tan v}{1-\tan^2 v}\end{aligned}$$

Oppgave 3.7.2.

Eksempel 3.7.2: Løs likningen

$$\cos(2x)+3\cos x=1, \qquad x\in\left[0,\,2\pi\right\rangle.$$

Løsning: Vi benytter at

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1,$$

og omformer likningen slik:

$$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2(\cos x)^2 + 3\cos x - 2 = 0$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \underline{-2} \end{cases}$$

Løsningen $\cos x = -2$ kan selvsagt ikke brukes. Men løsningen $\cos x = \frac{1}{2}$ gir de to vinklene

$$x = \underline{\underline{\tfrac{\pi}{3}}}$$

og

$$x = 2\pi - \tfrac{\pi}{3} = \underline{\underline{\tfrac{5}{3}\pi}}.$$

3.7.3. Sinus og cosinus til halve vinkler.

Når du kjenner cosinus til en vinkel, kan du finne sinus, cosinus og tangens til den halve vinkelen ved hjelp av disse formlene:

$$\sin\left(\tfrac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}$$

$$\cos\left(\tfrac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$$

$$\tan\left(\tfrac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$$

Vi utleder disse identitetene ved å ta utgangspunkt i identiteter for $\cos(2v)$, og setter $v = \frac{u}{2}$:

$$\cos(2v) = 1 - 2\sin^2 v \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(2\cdot\tfrac{u}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{u}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2\left(\tfrac{u}{2}\right) = 1 - \cos u \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\tfrac{u}{2}\right) = \underline{\underline{\pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}}}$$

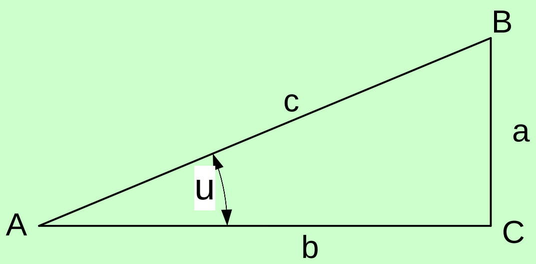
$$\cos(2v) = 2\cos^2 v - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(2\cdot\tfrac{u}{2}\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right) = 1 + \cos u \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\tfrac{u}{2}\right) = \underline{\underline{\pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}}}$$

$$\tan\left(\tfrac{u}{2}\right) = \frac{\sin\left(\tfrac{u}{2}\right)}{\cos\left(\tfrac{u}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}}}$$

Eksempel 3.7.3: Du vet at tangens til en vinkel i området $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ er $\frac{5}{12}$. Finn eksakte verdier for sinus og cosinus til den halve vinkelen.

Løsning:



Må først finne $\cos u$ når jeg vet at

$$\tan u = \tfrac{a}{b} = \tfrac{5}{12}.$$

Bruker da figuren til venstre, og velger enheter slik at $a = 5$ og $b = 12$. Da er

$$c^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$
$$\Leftrightarrow \quad c = \sqrt{169} = \underline{13}.$$

Da blir

$$\cos u = \frac{b}{c} = \frac{12}{13}.$$

Nå er det bare å sette inn i formlene:

$$\sin\left(\tfrac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{26}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{26}}}}.$$

$$\cos\left(\tfrac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{25}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{26}}}}.$$

Oppgave 3.7.3.

3.7.4. Produkt av sinus og cosinus.

Noen ganger dukker det opp produkt av sinus- og cosinusfunksjoner der vi helst skulle hatt summer eller differanser. Da kan vi bruke disse identitetene:

$$\sin u \cdot \cos v = \tfrac{1}{2}\big(\sin(u-v) + \sin(u+v)\big)$$
$$\cos u \cdot \cos v = \tfrac{1}{2}\big(\cos(u-v) + \cos(u+v)\big)$$
$$\sin u \cdot \sin v = \tfrac{1}{2}\big(\cos(u-v) - \cos(u+v)\big)$$

Disse identitetene utledes slik:

$$\sin(u-v) + \sin(u+v) = (\sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v) + (\sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v)$$
$$= 2\sin u \cdot \cos v$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin u \cdot \cos v = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\big(\sin(u-v) + \sin(u+v)\big)}}$$

$$\cos(u-v) + \cos(u+v) = (\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v) + (\cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v)$$
$$= 2\cos u \cdot \cos v$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos u \cdot \cos v = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\big(\cos(u-v) + \cos(u+v)\big)}}$$

$$\cos(u-v) - \cos(u+v) = (\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v) - (\cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v)$$
$$= 2\sin u \cdot \sin v$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin u \cdot \sin v = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\big(\cos(u-v) - \cos(u+v)\big)}}$$

3.8. Generelle sinus- og cosinusfunksjoner.

3.8.1. Noen innledende merknader.

Vi skal nå se nærmere på sinus- og cosinus-funksjonene. I den forbindelse får vi mye bruk for identitetene for sinus og cosinus til en sum og en differens av to vinkler:

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cdot \cos v \mp \sin u \cdot \sin v$$

Det er ikke nødvendig å behandle *både* sinus- og cosinus-funksjoner. Vi kan lett gå over fra sinus til cosinus eller omvendt ved hjelp av disse identitetene:

$$\cos x = \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad \sin x = \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

Vi kan få disse identitetene på flere måter, for eksempel slik:

$$\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin x \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \cos x \cdot \sin \tfrac{\pi}{2} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \underline{\cos x}\,.$$
$$\cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \sin x \cdot \sin \tfrac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \underline{\sin x}\,.$$

I dette avsnittet skal jeg stort sett omtale sinus-funksjoner. De fleste konklusjonene kan direkte overføres til cosinus-funksjoner. Dessuten kan du gå fra cosinus- til sinus-funksjon ved å øke vinkelen med $\tfrac{\pi}{2}$ slik den første identiteten i ramma ovenfor angir.

3.8.2. Sinus-funksjonen.

I sin mest generelle form ser sinus-funksjonen slik ut:

$$y = f(x) = A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi).$$

Vi skal nå se på betydningen av konstantene *A*, *k* og φ etter tur.

Amplitudefaktoren A: Vi vet at sinus-funksjonen kan ha verdier i området mellom -1 og +1. Faktoren *A* angir derfor yttergrensene for funksjonsverdiene som funksjonen

$$y = f(x) = A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$$

kan ha. Det er vanlig å kreve at *A* er et *positivt* tall.

A kalles gjerne ***amplituden*** til sinus-svingningen.

Periode-faktoren k: Vi vet at funksjonen

$$y = f(x) = \sin x$$

er periodisk med periode $P = 2\pi$. Dette betyr at

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x\,.$$

På tilsvarende måte ser vi at funksjonen

$$y = f(x) = \sin(k \cdot x)$$

har periode P hvis og bare hvis

$$k \cdot (x + P) = kx + 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot P = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \underline{P = \frac{2\pi}{k}}.$$

Eksempel 3.8.1: Bestem perioden til funksjonen

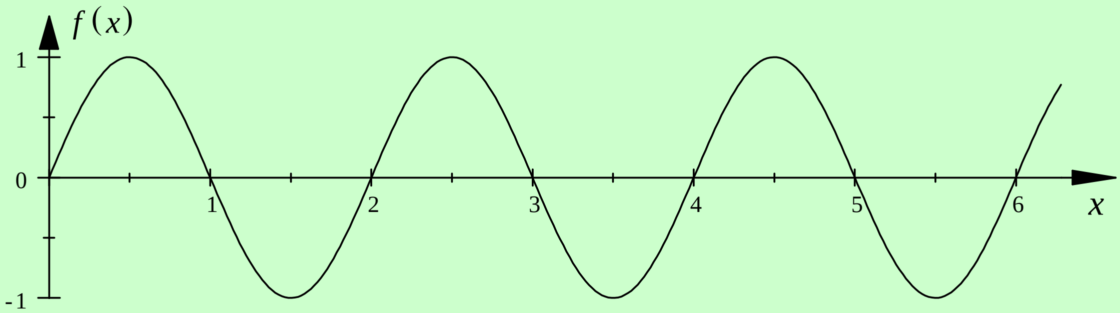
$$y = f(x) = \sin(\pi x),$$

og skisser grafen når $x \in [0, 2\pi]$.

Løsning: I denne funksjonen er $k = \pi$, slik at perioden blir

$$P = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = \underline{\underline{2}}.$$

Grafen blir slik:



Faseforskyvningen $\boldsymbol{\varphi}$: Vi vet at funksjonen

$$y = f(x) = \sin(k \cdot x)$$

skjærer x-aksen når $x = 0$ (se grafen i eksemplet ovenfor). På tilsvarende måte må funksjonen

$$y = f(x) = \sin(k \cdot x + \varphi)$$

skjære x-aksen når

$$k \cdot x + \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = -\frac{\varphi}{k}}.$$

Dette innebærer at vi får grafen til funksjonen

$$y = f(x) = \sin(k \cdot x + \varphi)$$

ved å forskyve grafen til funksjonen

$$y = f(x) = \sin(k \cdot x)$$

i negativ retning slik at den skjærer x-aksen når $x = -\frac{\varphi}{k}$.

Vi kaller derfor φ for ***faseforskyvningen***.

Eksempel 3.8.2: Skisser grafene til disse funksjonene:

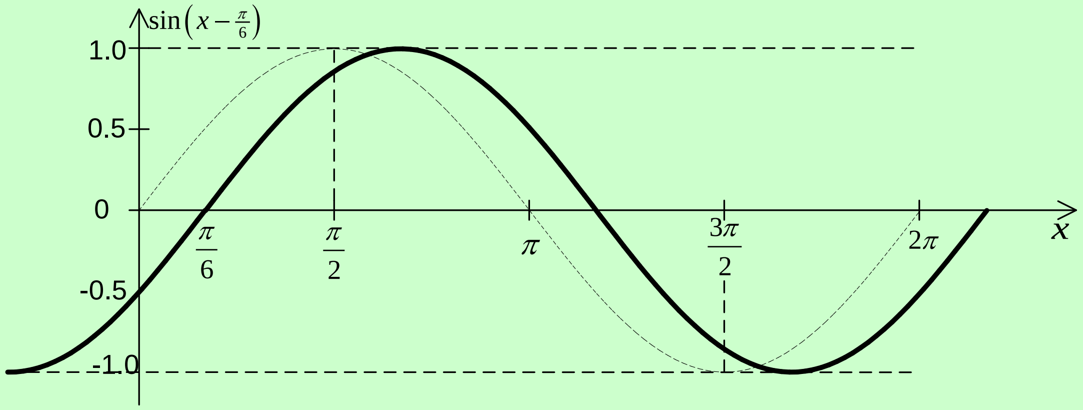
a) $y = f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

b) $y = f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

c) $y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Løsning:

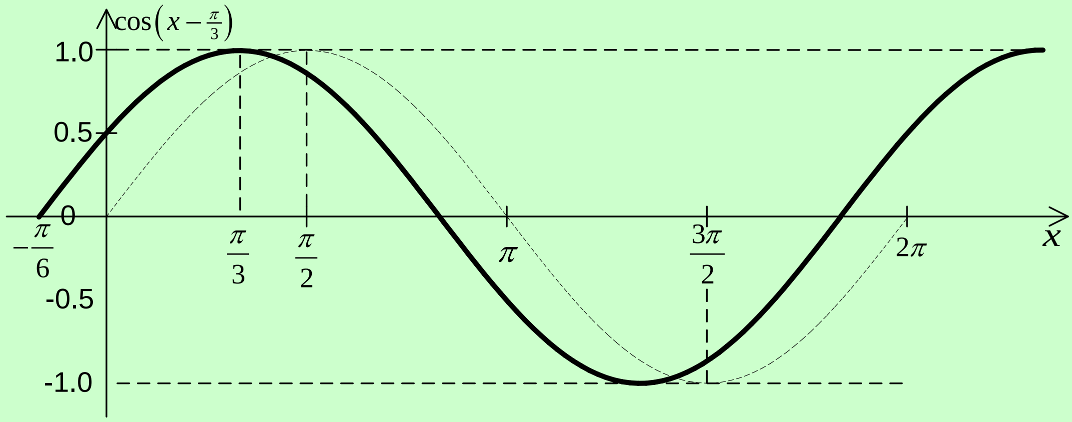
a) Vi skal nå forskyve sinus-grafen en strekning $-\frac{\pi}{6}$ mot venstre, d.v.s. en strekning $\frac{\pi}{6}$ mot høyre. Grafen blir da slik, der den opprinnelige sinus-grafen er tegnet med tynn strek:



b) Benytter at $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Da blir

$$y = f(x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Dette innebærer at sinus-grafen skal forskyves en strekning $\frac{\pi}{6}$ mot venstre. Vi får da figuren nedenfor, der den opprinnelige sinus-grafen er tegnet med tynn strek:



Du ser at du også kan oppfatte grafen som en cosinus-graf som er forskjøvet en strekning $\frac{\pi}{3}$ mot høyre.

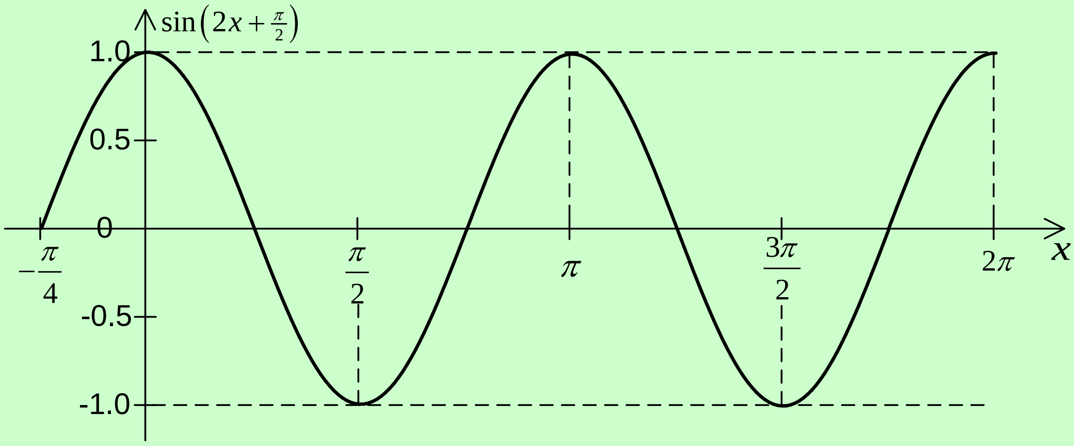
c) Dette gir en sinus-graf som skjærer *x*-aksen når

$$2x+\frac{\pi}{2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=-\frac{\pi}{4}}.$$

Funksjonen har også periode

$$P = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \underline{\pi}.$$

Dette gir grafen nedenfor:



Du kan også benytte at

$$\sin\left(2x+\tfrac{\pi}{2}\right)=\cos(2x)$$

og slippe å regne ut faseforskyvningen.

Oppsummering:
Du skisserer grafen til

$$y=f(x)=A\sin(k\cdot x+\varphi)$$

slik:

1. Finn et skjæringspunkt med *x*-aksen ved å sette
   $$k\cdot x+\varphi=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\tfrac{\varphi}{k}.$$

2. Finn perioden
   $$P=\tfrac{2\pi}{k}.$$

3. Tegn sinusgrafen med amplitude *A*.

[Oppgave 3.8.1.]

3.8.3. Sum av sinus- og cosinus-funksjon.

Hittil har vi holdt oss til en ren sinus- eller ren cosinus-funksjon. Men vi kommer ofte bort i funksjoner som er en sum av en sinus- og en cosinus-funksjon. Dersom disse funksjonene har samme periode, kan de omformes til en ren sinus- eller ren cosinus-funksjon slik at vi kan benytte de metodene som vi har sett på ovenfor til å tegne grafen. Jeg skal demonstrere teknikken i eksemplet nedenfor.

Eksempel 3.8.3: Vis at funksjonen

$$y=f(x)=-3\sin x+4\cos x$$

kan skrives på formen

$$y = f(x) = A\sin(x+\varphi),$$

og finn A og φ.

Løsning: Ved å bruke identiteten for sinus til en sum av to vinkler, får vi at

$$y = A\sin(x+\varphi) = A(\sin x\cdot\cos\varphi + \cos x\cdot\sin\varphi)$$
$$= (A\cos\varphi)\sin x + (A\sin\varphi)\cos x$$

Men dette skal være identisk lik

$$y = 3\sin x - 4\cos x.$$

Dette er kun mulig dersom

$$A\cos\varphi = -3$$

og

$$A\sin\varphi = 4.$$

Vi har nå to likninger med A og φ som ukjente. Vi starter løsningsprosessen med å dele disse likningene på hverandre, og får:

$$\frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{4}{-3} \quad\Leftrightarrow\quad \tan\varphi = \underline{-\frac{4}{3}}.$$

Kalkulatoren gir nå ut at

$$\varphi \approx \underline{-0.9273} \text{ (eller } \varphi \approx -53.13^\circ\text{)}.$$

Nå kan det være naturlig å finne A ved å sette denne verdien av φ inn i en av de to likningene for A og φ. Uansett hvilken likning vi bruker, vil vi da få at A blir negativ. Dette strir mot vårt krav om at A skal være et positivt tall.

Dette dilemmaet løser vi ved å benytte at tangens-funksjonen er periodisk med periode π. Vi gir derfor φ et tillegg på π, noe som ikke endrer tangens-verdien. Altså bruker vi

$$\varphi \approx -0.9273 + \pi \approx \underline{2.2143} \text{ (eller } \varphi \approx -53.13^\circ + 180^\circ \approx \underline{126.87^\circ}\text{)}.$$

Og nå finner vi en positiv verdi av A uansett hvilken av de to likningene vi bruker.

Men det fins en bedre metode for å finne A. Vi starter da med å *kvadrere* begge likningene før vi legger dem sammen. Da får vi:

$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = (-3)^2 + 4^2$$
$$A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 9 + 16$$
$$A^2 = 25 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{A = 5}$$

Her har vi benyttet at

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

og vi har også benyttet at A skal være positiv slik at verdien $A = -5$ ikke kan brukes.

Vi samler trådene, og ser at

$$y = f(x) = -3\sin x + 4\cos x \equiv \underline{\underline{5\sin(x+2.2143)}}.$$

I noen matematiske tabeller kan du finne denne prosedyren oppsummert i to formler:

Når
$$S \cdot \sin x + C \cdot \cos x$$
skal omformes til formen
$$A \sin(x+\varphi),$$
er
$$A = \sqrt{S^2 + C^2}$$
mens
$$\tan\varphi = \frac{C}{S}.$$

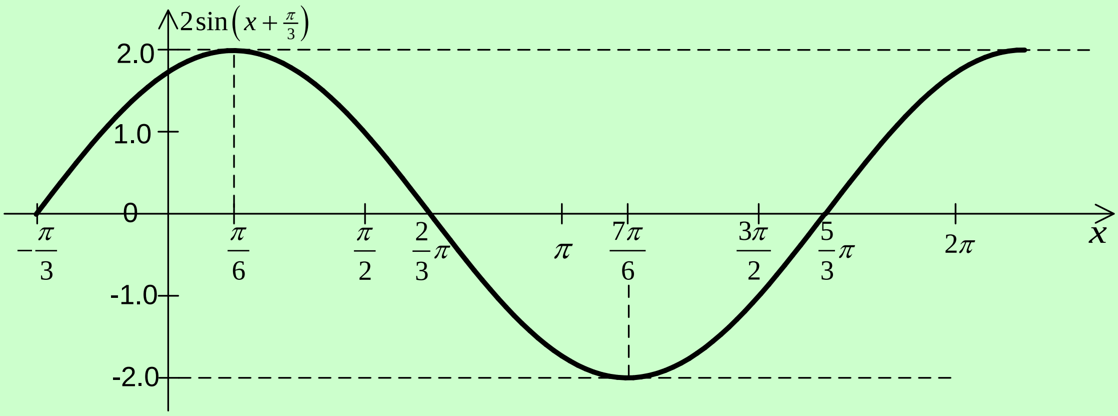
Disse formlene er greie til å finne *A*, men du risikerer å finne en vinkel φ som er 180° feil. Derfor vil jeg anbefale at du går gjennom hele prosedyren slik som i eksemplet foran. Det gir litt mer arbeid (men ikke mye når du først behersker teknikken), men du er sikker på å finne rett verdi av φ.

Neste eksempel viser hvordan vi da går fram:

Eksempel 3.8.4: Skriv funksjonen
$$y = f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$$
på formen
$$y = f(x) = A\sin(x+\varphi),$$
og bruk resultatet til å tegne grafen til funksjonen.

Løsning: Ved å bruke identiteten for sinus til en sum av to vinkler, får vi at
$$y = A\sin(x+\varphi) = A(\sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi)$$
$$= (A\cos\varphi)\sin x + (A\sin\varphi)\cos x$$
Dette er identisk lik
$$y = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$$
kun dersom
$$A\cos\varphi = 1$$
og
$$A\sin\varphi = \sqrt{3}$$
som gir
$$\frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\tan\varphi = \sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi \end{cases}$$
Kun verdien $\varphi = \underline{\frac{\pi}{3}}$ gir positiv *A*.
$$A = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \underline{2}.$$
Dermed blir
$$y = f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x \equiv \underline{\underline{2\sin\left(x+\tfrac{\pi}{3}\right)}}.$$

Grafen til denne funksjonen tegnes ved å forskyve en sinus-graf med amplitude 2 en strekning $\varphi = \frac{\pi}{3}$ mot venstre. Grafen er vist nedenfor:



Oppgave 3.8.2.

De teknikkene som vi har sett på her, kommer til nytte over alt hvor det forekommer svingninger. Spesielt innenfor elektronikk og elektroteknikk er slike funksjoner uunnværlige. Teknikkene anvendes også ved løsing av visse typer trigonometriske likninger og ulikheter.

3.9. Mer om trigonometriske likninger og ulikheter.

3.9.1. Trigonometriske likninger.

Vi har tidligere snust litt på enkle trigonometriske likninger. Vi skal nå se mer på dette temaet. Du må bare innstille deg på at nå er det ingen standard formler eller standard teknikker som skal benyttes. Løsning av trigonometriske likninger krever kreativitet og fantasi (og erfaring), kombinert med kjennskap til de trigonometriske identitetene som vi har sett på ovenfor. Det er imidlertid noen teknikker som går igjen, uten at man kan sette opp enkle regler for når man skal bruke den ene eller den andre teknikken. Her er noen teknikker som kan komme til anvendelse:

- Dersom likningen kan skrives på formen
  $$f(x) = 0,$$
  og $f(x)$ kan faktoriseres, må hver av faktorene være lik null. På denne måten kan en komplisert likning splittes opp i flere enklere likninger.

- Det kan ofte lønne seg å omforme uttrykk av typen
  $$S \cdot \sin x + C \cdot \cos x$$
  til
  $$A\sin(x+\varphi).$$
  En annen angrepsmåte kan være å *kvadrere* likninger som inneholder en sum av sinus- og cosinus-funksjoner. Da får du likninger av den typen som er nevnt i neste punkt.

Vær oppmerksom på at kvadreringen kan føre til at du får løsninger som ikke passer i den opprinnelige likningen.

- Dersom likningen er *homogen* i $\sin x$ og $\cos x$ (d.v.s. at alle leddene inneholder $\sin x$ - og $\cos x$ - ledd av samme grad), kan likningen omformes til en likning i $\tan x$ ved å dele på $\cos x$.

- Husk at
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$
Dette kan brukes til å "bytte ut" $\sin^2 x$ -ledd med $\cos^2 x$ -ledd og omvendt. Det kan også brukes til å erstatte brysomme konstanter med $\sin^2 x$ - og $\cos^2 x$ -ledd.

- Dersom likningen inneholder $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ og / eller $\tan(2x)$, lønner det seg vanligvis å omforme likningen ved hjelp av trigonometriske identiteter for disse størrelsene.

Noen ganger kan et problem angripes på flere måter, noe eksemplene nedenfor vil illustrere.

Eksempel 3.9.1: Løs de trigonometriske likningene nedenfor. Gå ut fra at $x \in [0, 2\pi\rangle$.

a) $\sin(2x) + 2\sin^2 x = 1$.

b) $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x = \sin(2x)$

c) $\sqrt{3}\cos(2x) + 3\sin(2x) = 3$

Løsning:

a) $\sin(2x) + 2\sin^2 x = 1$.

Første innskytelse er å benytte at
$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x.$$
Da omformes likningen til
$$2\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x = 1.$$

Nå må vi bruke et lite trick: Vi multipliserer 1-tallet på høyre side med $\sin^2 x + \cos^2 x$. Da blir likningen
$$2\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$$

Denne likningen er homogen i $\sin x$ og $\cos x$. Vi ser at $\cos x = 0$ ikke kan være løsning av likningen, slik at vi kan dele på $\cos^2 x$ uten å risikere å dele på null. Da får vi:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$
$$\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0$$
$$\tan x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \underline{-1 \pm \sqrt{2}}$$

Disse tangens-verdiene inngår ikke i vår samling av standard-verdier. Men min kalkulator gir at

$$\arctan\left(-1+\sqrt{2}\right)=\tfrac{1}{8}\pi$$

og

$$\arctan\left(-1-\sqrt{2}\right)=-\tfrac{3}{8}\pi .$$

Når vi benytter at tangens-funksjonen er periodisk med periode π, og husker at $x\in\left[0,2\pi\right\rangle$, får vi disse løsningene:

$$x_1=\underline{\underline{\tfrac{1}{8}}}\pi .$$

$$x_2=\tfrac{1}{8}\pi+\pi=\underline{\underline{\tfrac{9}{8}}}\pi .$$

$$x_3=-\tfrac{3}{8}\pi+\pi=\underline{\underline{\tfrac{5}{8}}}\pi .$$

$$x_4=-\tfrac{3}{8}\pi+2\pi=\underline{\underline{\tfrac{13}{8}}}\pi .$$

Det går imidlertid an å være litt smartere. Vi husker da at

$$\cos(2x)=1-2\sin^2 x ,$$

og omformer den gitte likningen slik:

$$\sin(2x)+2\sin^2 x=1 \quad\Leftrightarrow\quad \sin(2x)=1-2\sin^2 x \quad\Leftrightarrow\quad \sin(2x)=\cos(2x).$$

Nå deler vi på $\cos(2x)$, og får

$$\tan(2x)=1 \quad\Leftrightarrow\quad 2x=\tfrac{1}{4}\pi .$$

Nå må vi huske på at tangens-funksjonen er periodisk med periode π. Dessuten må vi huske at når $x\in\left[0,2\pi\right\rangle$ er $2x\in\left[0,4\pi\right\rangle$. Vi får da disse løsningene:

$$2x=\tfrac{1}{4}\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{\underline{\tfrac{1}{8}}}\pi .$$

$$2x=\tfrac{1}{4}\pi+\pi=\tfrac{5}{4}\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{\underline{\tfrac{5}{8}}}\pi .$$

$$2x=\tfrac{1}{4}\pi+2\pi=\tfrac{9}{4}\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{\underline{\tfrac{9}{8}}}\pi .$$

$$2x=\tfrac{1}{4}\pi+3\pi=\tfrac{13}{4}\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{\underline{\tfrac{13}{8}}}\pi .$$

b) $$2\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x=\sin(2x).$$

Her er det naturlig å starte med å omforme $\sin(2x)$ til $2\sin x\cdot\cos x$:

$$2\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x=2\sin x\cdot\cos x$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{3}\cos^2 x-\sin x\cdot\cos x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos x\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x+1\right)=0$$

Her er enten

$$\cos x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=\underline{\tfrac{\pi}{2}} \\ x=\underline{\tfrac{3}{2}\pi} \end{cases}$$

eller

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x-\sqrt{3}\cos x=1.$$

Den siste likningen kan løses på to måter. Den ene måten går ut på å skrive

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x$$

på formen

$$A\sin(x+\varphi) = A(\sin x\cdot\cos\varphi + \cos x\cdot\sin\varphi) = (A\cos\varphi)\sin x + (A\sin\varphi)\cos x\,.$$

Vi må da kreve at

$$A\cos\varphi = 1$$

og at

$$A\sin\varphi = -\sqrt{3}\,.$$

Vi kvadrerer disse likningene og legger sammen kvadratene:

$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = 1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad A^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow\quad A^2\cdot 1 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad A = \underline{2}$$

Deler uttrykkene på hverandre:

$$\frac{\cancel{A}\sin\varphi}{\cancel{A}\cos\varphi} = \frac{-\sqrt{3}}{1} \quad\Leftrightarrow\quad \tan\varphi = -\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad \varphi = \begin{cases} \underline{-\frac{\pi}{3}} \\ -\frac{\pi}{3} + \pi = \underline{\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$

Av uttrykkene $A\cos\varphi = 1$ og $A\sin\varphi = -\sqrt{3}$ ser vi at det kun er løsningen $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ som gir positiv *A*. Dermed har vi at

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right).$$

Nå nøster vi oss tilbake:

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Vi husker at

$$\sin v = \tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} v = \frac{1}{6}\pi \\ v = \frac{5}{6}\pi \end{cases}.$$

Erstatter vi *v* med $x - \frac{1}{3}\pi$, og husker at $x \in [0, 2\pi\rangle$, får vi:

$$\sin\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi = \underline{\frac{1}{2}\pi} \\ x - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi = \underline{\frac{7}{6}\pi} \end{cases}$$

Den andre måten går ut på å kvadrere likningen $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$, og deretter benytte at $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Da får vi

$$\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right)^2 = 1^2 \quad\Leftrightarrow\quad \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x\,.$$

Her er vi så heldige at $\sin^2 x$ faller bort når vi ordner likningen. Da står vi igjen med

$$2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right) = 0\,.$$

Denne likningen har enten løsningen $\cos x = 0$ som vi allerede har funnet, eller

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1 - \sqrt{3}\tan x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \tan x = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x = \frac{1}{6}\pi \\ x = \frac{1}{6}\pi + \pi = \frac{7}{6}\pi \end{cases}$$

Men vi må sjekke om begge disse løsningene kan brukes i den opprinnelige likningen:

$$x = \tfrac{1}{6}\pi: \qquad \sin x - \sqrt{3}\cos x = \sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) - \sqrt{3}\cdot\cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = \tfrac{1}{2} - \sqrt{3}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = -1$$

$$x = \tfrac{7}{6}\pi: \qquad \sin x - \sqrt{3}\cos x = \sin\left(\tfrac{7}{6}\pi\right) - \sqrt{3}\cdot\cos\left(\tfrac{7}{6}\pi\right) = -\tfrac{1}{2} - \sqrt{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1$$

Vi ser at det er kun løsningen $x = \frac{7}{6}\pi$ som kan brukes.

Når vi kombinerer de løsningene vi har funnet, får vi denne løsningsmengden:

$$\underline{\underline{\left(\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{7}{6}\pi, \tfrac{3}{2}\pi\right)}}.$$

c) $\sqrt{3}\cos(2x) + 3\sin(2x) = 3$.

Denne likningen kan løses på (minst) to måter. Først skal jeg angripe problemet med å bruke identiteter for $\sin(2x)$ og $\cos(2x)$:

$$\sqrt{3}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 3 \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 3.$$

Planen er å dele hele likningen med $\cos^2 x$, slik at jeg får en likning i $\tan x$. Men 3-tallet på høyre side forpurrer denne planen. Jeg oppfatter derfor dette 3-tallet som

$$3 \cdot 1 = 3\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x.$$

Likningen blir da

$$\sqrt{3}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 3 \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(3+\sqrt{3}\right)\sin^2 x - 6\sin x \cdot \cos x + \left(3-\sqrt{3}\right)\cos^2 x = 0$$

Nå kan jeg dele på $\cos^2 x$, og får andregradslikningen

$$\left(3+\sqrt{3}\right)\tan^2 x - 6\tan x + \left(3-\sqrt{3}\right) = 0.$$

Løser med formel:

$$\tan x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(9-3)}}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2\left(3+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{2\left(3 \pm \sqrt{3}\right)}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} = \begin{cases} \underline{1} \\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} = \dfrac{12-6\sqrt{3}}{6} = \underline{2-\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vi vet at

$$\tan x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \underline{x = \tfrac{1}{4}\pi} \\ x = \tfrac{1}{4}\pi + \pi = \underline{\tfrac{5}{4}\pi} \end{cases}$$

Ved hjelp av kalkulator får vi at

$$\arctan\left(2-\sqrt{3}\right) = \underline{\tfrac{1}{12}\pi}.$$

Da har vi også løsningen

$$x = \tfrac{1}{12}\pi + \pi = \underline{\tfrac{13}{12}\pi}.$$

Alt i alt blir løsningsmengden

$$\underline{\underline{\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{13}{12}\pi\right\}}}.$$

Jeg kan også angripe problemet ved å skrive

$$\sqrt{3}\cos(2x) + 3\sin(2x)$$

på formen

$$A\sin(2x+\varphi) = A\left(\sin(2x)\cos\varphi + \cos(2x)\sin\varphi\right)$$
$$= (A\cos\varphi)\cdot\sin(2x) + (A\sin\varphi)\cdot\cos(2x)$$

Da må vi ha

$$A\cos\varphi = 3$$

og

$$A\sin\varphi = \sqrt{3}.$$

Kvadrerer likningene, og summerer kvadratene:

$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = 3^2 + \sqrt{3}^3 \quad\Leftrightarrow\quad A^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 9+3$$
$$\Leftrightarrow\quad A^2\cdot 1 = 12 \quad\Leftrightarrow\quad A = \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = \underline{2\sqrt{3}}$$

Deler likningene på hverandre, og får

$$\frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \tan\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \varphi = \frac{1}{6}\pi \\ \varphi = \frac{1}{6}\pi + \pi = \frac{7}{6}\pi \end{cases}$$

Det er kun løsningen $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ som gir positiv verdi for *A*. Vi har altså funnet at

$$\sqrt{3}\cos(2x) + 3\sin(2x) = 2\sqrt{3}\sin\left(2x + \tfrac{1}{6}\pi\right) = 3$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin\left(2x+\tfrac{1}{6}\pi\right) = \frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

Vi vet at

$$\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \begin{cases} \underline{\tfrac{1}{3}\pi} \\ \pi - \tfrac{1}{3}\pi = \underline{\tfrac{2}{3}\pi} \end{cases}$$

Da blir

$$2x + \tfrac{1}{6}\pi = \begin{cases} \tfrac{1}{3}\pi \quad\Leftrightarrow\quad 2x = \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{6}\pi \quad\Leftrightarrow\quad x = \underline{\tfrac{1}{12}\pi} \\ \tfrac{2}{3}\pi \quad\Leftrightarrow\quad 2x = \tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{3}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\pi \quad\Leftrightarrow\quad x = \underline{\tfrac{1}{4}\pi} \end{cases}$$

Men siden $x \in [0, 2\pi\rangle$, må $2x \in [0, 4\pi\rangle$. Da kan vi også ha at

$$2x + \tfrac{1}{6}\pi = \begin{cases} \tfrac{1}{3}\pi + 2\pi = \tfrac{7}{3}\pi \quad\Leftrightarrow\quad 2x = \tfrac{7}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{13}{6}\pi \quad\Leftrightarrow\quad x = \underline{\tfrac{13}{12}\pi} \\ \tfrac{2}{3}\pi + 2\pi = \tfrac{8}{3}\pi \quad\Leftrightarrow\quad 2x = \tfrac{8}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{15}{6}\pi \quad\Leftrightarrow\quad x = \tfrac{15}{12}\pi = \underline{\tfrac{5}{4}\pi} \end{cases}$$

Dette gir den samme løsningsmengden som før:

$$\underline{\underline{\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{13}{12}\pi\right\}}}.$$

Oppgave 3.9.1.

3.9.2. Trigonometriske ulikheter.

Du kjenner sikkert teknikken med å løse vanlige ulikheter: Ordne ulikheten slik at du har null på høyre side, faktorisere venstre side, og sette opp fortegnslinjer for hver faktor. I intervaller der du har odde antall negative faktorer, blir produktet eller brøken negativ. I intervaller der du har jamt antall negative faktorer blir produktet eller brøken positiv.

Du kan bruke denne teknikken for trigonometriske ulikheter også. Men det viser seg ofte at metoden blir komplisert. Jeg vil derfor anbefale en annen metode:

1. Løs først den tilhørende likningen (d.v.s. at du erstatter ulikhetstegnet med likhetstegn), og merker av alle nullpunktene på en tall-linje.
2. Bestem verdien av ulikheten i ett tilfeldig valgt punkt mellom to nabo-nullpunkter. Da vil ulikheten ha samme verdi i hele intervallet mellom disse nullpunktene. Gjenta for alle intervallene i hele ulikhetens grunnmengde.

Jeg vil anbefale at du kontrollerer resultatet grafisk.

Jeg vil illustrere teknikken i eksemplene nedenfor.

Eksempel 3.9.2: Løs ulikhetene nedenfor, der $x \in [0, 2\pi\rangle$ i alle eksemplene.

a) $\sin x > \cos x$

b) $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$ (se Eksempel 5.1b ovenfor).

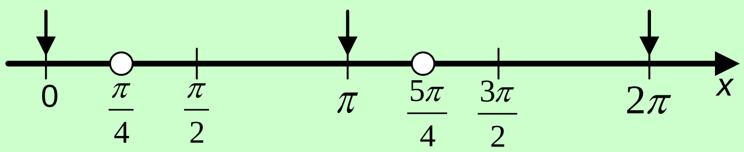
Løsning:

a) $\sin x > \cos x$.

Starter med å løse likningen

$$\sin x = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \underline{x = \frac{1}{4}\pi} \\ x = \frac{1}{4}\pi + \pi = \underline{\frac{5}{4}\pi} \end{cases}$$

Vi får da tall-linja nedenfor, der nullpunktene er tegnet inn sammen med angivelse av punkter mellom nullpunktene som jeg benytter til å finne verdien av ulikheten.



$x = 0$: Her er $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, slik at $\sin 0 < \cos 0$. Da er $\sin x < \cos x$ i hele intervallet $[0, \frac{1}{4}\pi\rangle$.

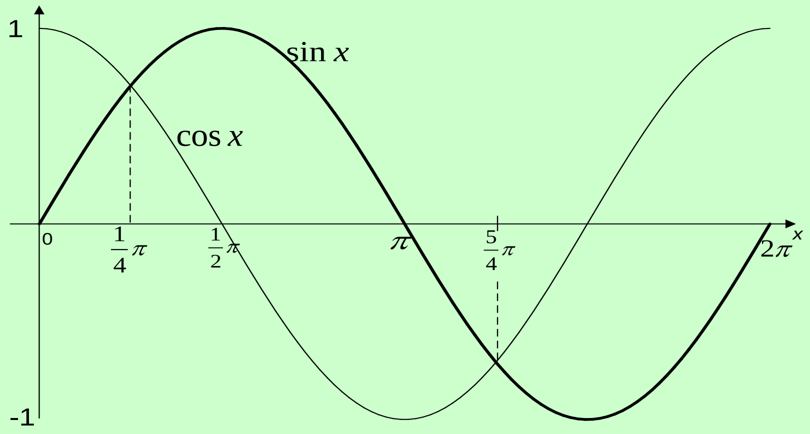
$x = \pi$: Her er $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, slik at $\sin \pi > \cos \pi$. Da er $\sin x > \cos x$ i hele intervallet $\langle \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \rangle$.

$x = 2\pi$: Her er $\sin(2\pi) = 0$, $\cos(2\pi) = 1$, slik at $\sin(2\pi) < \cos(2\pi)$. Da er $\sin x < \cos x$ i hele intervallet $\langle \frac{5}{4}\pi, 2\pi \rangle$.

Du stusser kanskje over at vi bruker $x = 2\pi$ som grunnlag for å undersøke verdien av ulikheten selv om denne *x*-verdien ligger utenfor ulikhetens grunnmengde. Men det kan vi godt gjøre, fordi den tilhørende likningen ikke har noe nullpunkt før vi kommer til $x = \frac{1}{4}\pi + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$.

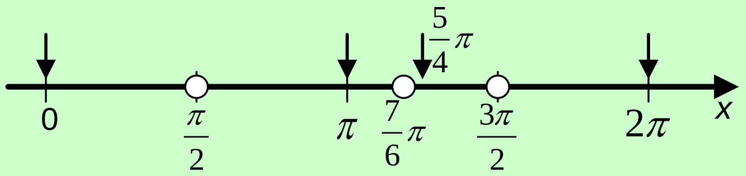
Vi summerer opp:

Når $x \in [0, 2\pi\rangle$, er $\sin x > \cos x$ når $x \in \underline{\underline{\langle \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \rangle}}$. Se figuren nedenfor.



b) $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$

Fra Eksempel 3.9.1b vet vi at den tilhørende likningen har løsningsmengden $\underline{\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)}$. Dette gir tall-linja nedenfor:



$x = 0$: Her er $2\cos 0 + 2\sqrt{3}\cos^2 0 = 2\cdot 1 + 2\sqrt{3}\cdot 1^2 = \underline{2+2\sqrt{3}}$, mens $\sin(2\cdot 0) = \underline{0}$. Da vet vi at $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$ i hele intervallet $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right\rangle$.

$x = \pi$: Her er $2\cos\pi + 2\sqrt{3}\cos^2\pi = 2\cdot(-1) + 2\sqrt{3}\cdot(-1)^2 = \underline{2\left(\sqrt{3}-1\right)} > 0$, mens $\sin(2\cdot\pi) = \underline{0}$. Da vet vi at $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$ i hele intervallet $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi\right\rangle$.

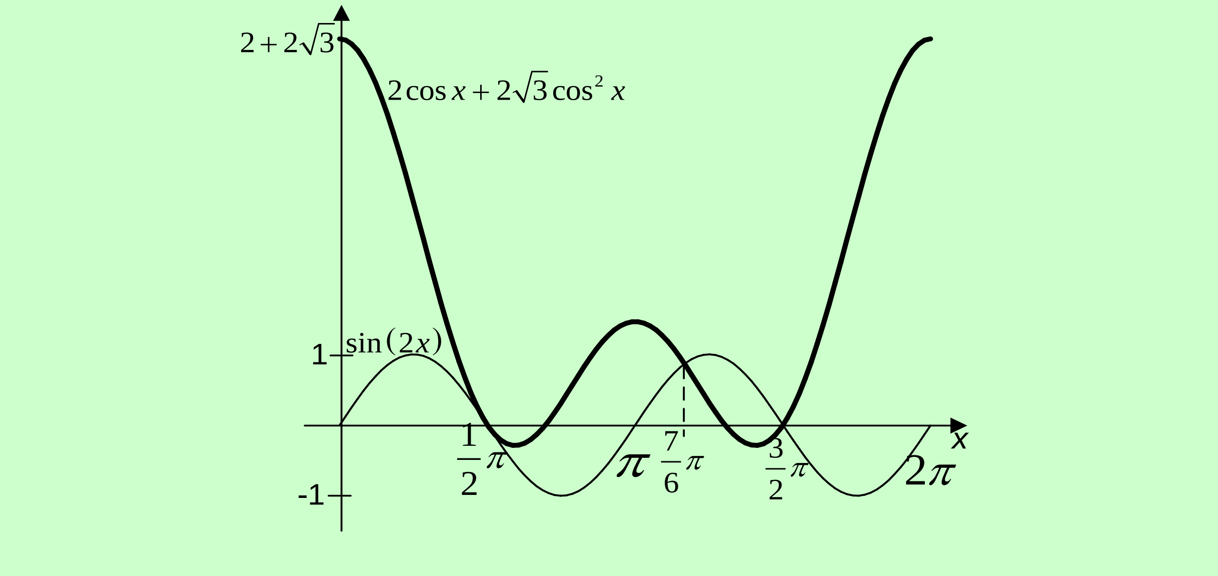
$x = \frac{5}{4}\pi$: Her er $2\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + 2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 \approx \underline{0.32}$, mens $\sin\left(2\cdot\frac{5}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \underline{1}$. Da vet vi at $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x < \sin(2x)$ i hele intervallet $\left[\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi\right\rangle$.

$x = 2\pi$: Her er $2\cos(2\pi) + 2\sqrt{3}\cos^2(2\pi) = 2\cdot 1 + 2\sqrt{3}\cdot 1^2 = \underline{2+2\sqrt{3}} > 0$, mens $\sin(2\cdot 2\pi) = \underline{0}$. Da vet vi at $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$ i hele intervallet $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\rangle$.

Vi summerer opp: Når $x \in \left[0, 2\pi\right\rangle$, er

$$2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x) \text{ når } \underline{\underline{x \in \left\langle 0, \tfrac{1}{2}\pi\right\rangle \cup \left\langle \tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{7}{6}\pi\right\rangle \cup \left\langle \tfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right\rangle}}.$$

Merk at $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x = \sin(2x)$ når $x = \frac{1}{2}\pi$, mens $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$ på begge sider av $x = \frac{1}{2}\pi$. Se figuren nedenfor.


$2+2\sqrt{3}$
$2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x$
$\sin(2x)$
1
-1
$\frac{1}{2}\pi$
π
$\frac{7}{6}\pi$
$\frac{3}{2}\pi$
2π
x

Oppgave 3.9.2.

4. Eksponential- og logaritmefunksjoner.

4.1. Bakgrunnsstoff.

I heftet om "forkunnskaper" definerte vi potens-uttrykk av typen a^n der $a > 0$. Vi fant da ut at det var hensiktsmessig å innrette seg slik at:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a^0 = 1, \qquad a^{\frac{t}{n}} = \sqrt[n]{a^t} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^t .$$

På dette grunnlaget utledet vi disse regnereglene:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad \left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n} = \left(a^n\right)^m .$$

Vi definerte også *logaritmen y til et tall t når grunntallet er a* slik:

$$y = \log_a t \quad \Leftrightarrow \quad t = a^y .$$

Da får vi disse regnereglene for logaritmer:

$$\log_a\left(x \cdot y\right) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a\left(x^n\right) = n \cdot \log_a x .$$

Logaritmer med det rare tallet $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828...$ som grunntall viser seg å ha mange nyttige egenskaper. Slike logaritmer kalles *naturlige logaritmer*, og vi skriver $\ln x$ istedenfor $\log_e x$.

4.2. Eksponentialfunksjonen.

Vi har egentlig bare definert uttrykk av formen a^x når *x* er et helt tall eller en brøk, d.v.s. når eksponenten *x* er et rasjonalt tall. Men fra nå av skal vi tillate at ethvert *reelt* tall *x* kan være eksponent. Dermed kan vi definere ***eksponentialfunksjonen med a som grunntall***:

$$f\left(x\right) = a^x \text{ der } a > 0 \text{ og } x \in \mathbb{R} .$$

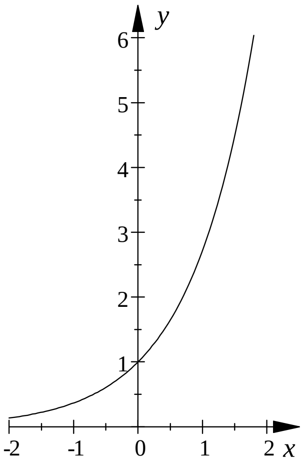
I praksis er det eksponentialfunksjoner med grunntall *e* som er mest brukt. Dersom vi snakker om eksponentialfunksjon*en*, er det så å si alltid funksjonen

$$f(x) = e^x$$

vi mener. Og det kan vi trygt gjøre, fordi $a = e^{\ln a}$ slik at

$$f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}.$$

Dette viser at vi alltid kan omforme fra en eksponentialfunksjon med grunntall $a > 0$ til eksponentialfunksjonen med grunntall *e* bare ved å multiplisere eksponenten *x* med $\ln a$. Vi kan derfor trygt begrense oss til å studere eksponentialfunksjonen $f(x) = e^x$.



Grafen til $y = f(x) = e^x$ er vist på figuren til venstre.
Vi merker oss disse egenskapene:

- Funksjonen er alltid positiv for alle verdier av *x*. $f(x) = e^x$ kan aldri bli negativ.
- Grafen går gjennom punktet $(0, 1)$.
- Når $x \to -\infty$, går e^x mot null.
- Når $x \to \infty$, går e^x mot uendelig.

4.3. Eksponential-likninger.

Vi skal nå benytte våre kunnskaper til å løse en type likninger som kalles *eksponential-likninger* fordi den ukjente befinner seg i en eksponent. Det er vanlig at vi må bruke logaritmer for å løse slike likninger, men vi skal starte med noen eksempler der vi bare trenger å bruke potens-regneregler.

Eksempel 4.3.1: Finn *x* av disse likningene:

a) $27^x = \frac{1}{9}$.

b) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

c) $8^{2x} - 6 \cdot 8^x + 8 = 0$.

Løsning:

a) $27^x = \frac{1}{9}$.

Skriver først begge sider av likhetstegnet som potensuttrykk med samme grunntall:

$$27^x = \tfrac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \left(3^3\right)^x = \frac{1}{3^2} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{3x} = 3^{-2}.$$

Nå må begge eksponentene være like:

$$3x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -\tfrac{2}{3}}}.$$

b) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

For det første: $5 \cdot 2^x$ er *ikke* lik 10^x!! Det er *kun* 2-tallet som skal opphøyes i *x*. Dersom også 5-tallet skulle vært opphøyd i *x*, måtte vi skrevet $(5 \cdot 2)^x$.

Så til selve løsningen: Vi starter med å skrive

$$4^x = \left(2^2\right)^x = \left(2^x\right)^2.$$

Da kan likningen omformes til

$$\left(2^x\right)^2 - 5\cdot 2^x + 4 = 0$$

Dette er en andregradslikning med 2^x som ukjent. Vi bruker formel, og får:

$$2^x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2} = \frac{5\pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Dette gir to løsninger:

$$2^x = 4 = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2}},$$

og

$$2^x = 1 = 2^0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}.$$

c) $8^{2x} - 6\cdot 8^x + 8 = 0.$

Du faller vel aldri for fristelsen til å "forkorte" bort et 8-tall, får jeg håpe?

Her nå vi omforme til en andregradslikning ved å benytte at $8^{2x} = \left(8^x\right)^2$. Da får vi

$$\left(8^x\right)^2 - 6\cdot 8^x + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8^x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 8}}{2} = \frac{6\pm 2}{2} = \begin{cases} \underline{4} \\ \underline{2} \end{cases}$$

Vi får altså to løsninger:

$$8^x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^3\right)^x = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3x} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}}}.$$

$$8^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^3\right)^x = 2^1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3x} = 2^1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}.$$

Oppgave 4.3.1, 4.3.2.

Nå skal vi se på noen slike likninger der vi trenger logaritmer til å finne svaret.

Eksempel 4.3.2: Finn tilnærmede løsninger av disse likningene:

a) $3^x = 8.$

b) $2^x = 3^{x-1}$

Løsning: I begge oppgavene starter vi med å ta logaritmen på begge sidene av likhetstegnet, og deretter benytte at $\log\left(u^n\right) = n\cdot \log u$. For enkelhets skyld benytter vi naturlige logaritmer siden de fleste kalkulatorer beregner slike. Da får vi:

a) $3^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(3^x\right) = \ln 8 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot \ln 3 = \ln 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\ln 8}{\ln 3} \approx \underline{\underline{1.89}}.$

Kontroll: $3^{1.89} \approx \underline{7.98}.$

b) $2^x = 3^{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2^x\right) = \ln\left(3^{x-1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x\ln 2 = (x-1)\ln 3.$

$$x\ln 2 = x\ln 3 - \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(\ln 3 - \ln 2\right) = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x\ln\tfrac{3}{2} = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{\ln\frac{3}{2}} \approx \underline{\underline{2.71}}.$$

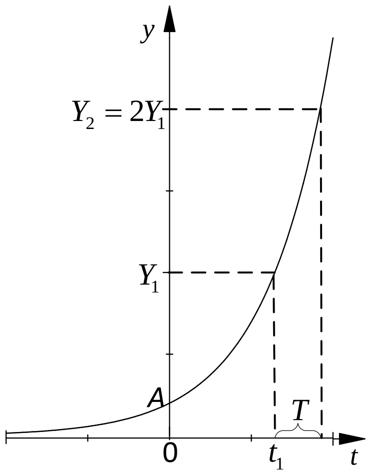
Kontroll: $2^{2.71} \approx 6.543$ mens $3^{2.71-1} \approx 6.545.$

Oppgave 4.3.3.

4.4. Bruk av eksponentialfunksjonen.

Eksponentialfunksjonen brukes mye til å beskrive *naturlig vekst*. I den forbindelse er det vanlig å benytte *t* (tid) som fri variabel. La oss se nærmere på eksponentialfunksjonen

$$y = f(t) = A \cdot e^{k \cdot t} \text{ der } k > 0.$$



Grafen til funksjonen er skissert til venstre. Først kan vi merke oss at når $t = 0$, blir

$$y = f(0) = A \cdot e^0 = A \cdot 1 = A$$

som derved blir startverdien dersom vi starter når $t = 0$.
La oss gå til et vilkårlig tidspunkt $t = t_1$. Anta at ved dette tidspunktet var $y = Y_1$ slik at

$$f(t_1) = Y_1 = Ae^{k \cdot t_1}.$$

En tid *T* senere som vi skal kalle ***doblingstiden*** har *y* fordoblet seg til $2Y_1$ slik at

$$f(t_1 + T) = 2Y_1 = Ae^{k \cdot (t_1 + T)}.$$

Vi deler disse likningene på hverandre, og får

$$\frac{2Y_1}{Y_1} = \frac{\cancel{A}e^{k \cdot (t_1 + T)}}{\cancel{A}e^{k \cdot t_1}} \iff 2 = \frac{\cancel{e^{k \cdot t_1}} \cdot e^{k \cdot T}}{\cancel{e^{k \cdot t_1}}} = e^{k \cdot T} \iff k \cdot T = \ln 2 \iff k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Dermed har vi fått en sammenheng mellom konstanten *k* og doblingstiden *T*.

Vi kan bruke denne sammenhengen til å foreta en nyttig omforming:

$$f(t) = A \cdot e^{k \cdot t} = A \cdot e^{\frac{\ln 2}{T} \cdot t} = A \cdot \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{t}{T}} = A \cdot 2^{\frac{t}{T}}.$$

Her vil jo forholdet $\frac{t}{T}$ angi hvor mange doblingstider som er gått. Funksjonsverdien blir da startverdien *A* multiplisert med 2 så mange ganger som antall doblingstider angir. Naturlig, ikke sant?

Eksempel 4.4.1: En bakteriekoloni bruker 20 timer på å doble sin størrelse. Hvor mye vokser kolonien på
a) 8 timer?
b) 40 timer?

Løsning: Når vi har fast vekstfaktor, har vi også eksponentiell vekst. La start-størrelsen av bakteriekolonien være *A*.

a) Etter 8 timer er størrelsen blitt

$$f(8) = A \cdot 2^{\frac{8}{20}} \approx \underline{\underline{1.32A}}.$$

Kolonien har altså vokst med 32%.

b) Etter 40 timer er størrelsen blitt

$$f(40) = A \cdot 2^{\frac{40}{20}} = A \cdot 2^2 = \underline{\underline{4A}}.$$

Kolonien har altså firedoblet seg.

Legg forresten merke til at $40 = 5 \cdot 8$, og at $1.32^5 \approx 4.0$. Vi kan altså oppfatte 40-timers-intervallet som 5 8-timers-intervall, med en vekst på 32% i hvert intervall. Det gir til sammen en firedobling.

Det er slett ikke alltid at eksponentialfunksjoner med grunntall *e* eller grunntall 2 er mest hensiktsmessig, noe neste eksempel viser:

Eksempel 4.4.2: I en kommune øker antall innbyggere med 4% årlig. Hvor mange år tar det før antall innbyggere har økt med 50%?

Løsning: La *A* være antall innbyggere i starten. Når innbyggertallet øker med 4% hvert år, vil antall innbyggere i løpet av ett år være økt til

$$A + A \cdot \tfrac{4}{100} = A(1+0.04) = \underline{A \cdot 1.04}.$$

I løpet av *t* år vil innbyggertallet vokse til

$$A \cdot (1.04)^t.$$

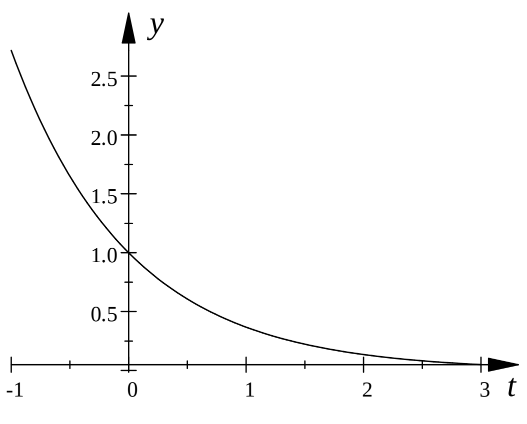
Når antall innbyggere er vokst med 50%, blir

$$1.50A = A \cdot 1.04^t \quad \Leftrightarrow \quad 1.50 = 1.04^t \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1.50) = \ln\left(1.04^t\right) = t \cdot \ln(1.04)$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln(1.50)}{\ln(1.04)} \approx \underline{\underline{10.3}}$$

Det tar altså litt over 10 år å øke antall innbyggere med 50%.

`Oppgave 4.4.1, 4.4.2.`



Nå skal vi se nærmere på funksjonen

$$y = f(t) = A \cdot e^{-k \cdot t} \text{ der } k > 0.$$

Grafen til funksjonen er vist til venstre for $A = 1$ og $k = 1$. Vi merker oss at også her er $A = f(0)$.

Vi kan nå definere en ***halveringstid*** *T* som er den tiden det tar å halvere funksjonsverdien. På samme måte som for doblingstid finner vi sammenhengen

$$k = \frac{\ln 2}{T}$$

slik at funksjonen kan omformes til

$$y = f(t) = A \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Gjennomfør detaljregningene selv i **`Oppgave 4.4.3`**.

Eksempel 4.4.3: En kondensator utlades gjennom en motstand. Spenningen $U(t)$ over kondensatoren er gitt ved formelen

$$U(t) = 12e^{-10t}$$

når *t* er målt i sekunder og spenningen er målt i volt.
a) Finn halveringstiden for spenningen over kondensatoren.
b) Hvor lang tid tar det før spenningen er blitt 0.1 volt?

Løsning:
a) Her er $k = 10$ slik at halveringstiden blir

$$T = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{\underline{\underline{10}}} \approx \underline{\underline{0.069}} \text{ sekunder.}$$

b) $$U(t) = 0.1 \iff 12e^{-10t} = 0.1 \iff e^{-10t} = \tfrac{0.1}{12} \iff -10t = \ln\left(\tfrac{1}{120}\right) = -\ln(120)$$

$$\iff t = \frac{\ln(120)}{\underline{\underline{10}}} \approx \underline{\underline{0.48}} \text{ sekunder}$$

Oppgave 4.4.4.

Eksempel 4.4.4: En melkekartong blir satt inn i kjøleskapet. La $y(t)$ være temperaturen i melka ved tidspunktet *t* (målt i minutter) etter at melkekartongen ble satt inn i kjøleskapet. Vi antar nå at

$$y(t) = 5 + 16e^{-k \cdot t}$$

der *k* er en konstant.
a) 1) Hva var temperaturen i melka i det øyeblikket melka ble satt inn i kjøleskapet?
2) Hva blir temperaturen i melka når kartongen har stått lenge i kjøleskapet?
b) Det viser seg at når kartongen har stått i kjøleskapet i 1 time, har temperaturen i melka sunket til 11 grader.
1) Bruk denne opplysningen til å finne *k*.
2) Hvor lang tid tar det før temperaturen i melka er blitt 6 grader?

Løsning:
a) 1) $y(0) = 5 + 16e^0 = 5 + 16 \cdot 1 = \underline{\underline{21}}$.

2) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 5 + 16 \cdot \lim_{t\to\infty} e^{-k \cdot t} = 5 + 16 \cdot 0 = \underline{\underline{5}}$.

b) 1) $$y(60) = 11 \iff 5 + 16e^{-60k} = 11 \iff 16e^{-60k} = 6 \iff e^{-60k} = \tfrac{3}{8}$$

$$\iff -60k = \ln\left(\tfrac{3}{8}\right) \iff k = \underline{\underline{-\tfrac{1}{60}\ln\left(\tfrac{3}{8}\right)}} \approx \underline{\underline{0.016}}$$

2) Her er det mest naturlig å sette inn den tilnærmede verdien $k = 0.016$. Men det viser seg at vi får greie regninger dersom vi bruker den eksakte verdien $k = -\tfrac{1}{60}\ln\left(\tfrac{3}{8}\right)$:

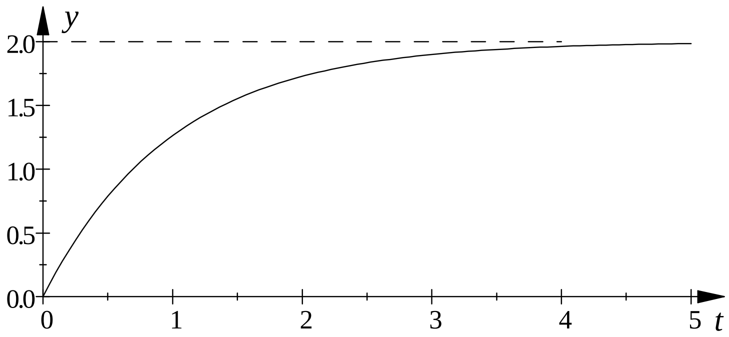
$$y(t) = 6 \iff 5 + 16e^{-\left(-\frac{1}{60}\ln\left(\frac{3}{8}\right)\right)t} = 6 \iff 16e^{\ln\left(\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{t}{60}} = 1 \iff \left(\tfrac{3}{8}\right)^{\frac{t}{60}} = \tfrac{1}{16}$$

$$\iff \tfrac{t}{60}\ln\left(\tfrac{3}{8}\right) = \ln\left(\tfrac{1}{16}\right) \iff \tfrac{t}{60} = \frac{\ln\left(\frac{1}{16}\right)}{\ln\left(\frac{3}{8}\right)} \iff t = 60 \cdot \frac{\ln(16)}{\ln\left(\frac{8}{3}\right)} \approx \underline{\underline{170}}$$

Det tar altså ca. 2 timer og 50 minutter før temperaturen i melka er kommet ned i 6 grader.

Figuren nedenfor viser grafen til en funksjon av typen

$y = f(t) = A\left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$ for $A = 2$ og $k = 1$.



Her merker vi oss at:

- Når $t = 0$, er $y = A\left(1 - e^{0}\right) = A(1-1) = 0$.
- Når $t \to \infty$, vil $y \to A\left(1 - \lim_{t\to\infty} e^{-kt}\right) = A(1-0) = A$.

Denne funksjonen brukes ofte til å beskrive en størrelse som vokser gradvis mot en stasjonær verdi. Typiske eksempler kan være oppladning av en kondensator eller oppvarming av et rom.

Eksempel 4.4.5: Du kommer fram til hytta en kald dag, og tenner opp i ovnen. Du antar at temperaturøkingen $y(t)$ avhenger av tiden *t* slik:

$$y(t) = A\left(1 - e^{-k \cdot t}\right).$$

Du merker deg at når $t = 1\,\text{time}$ er temperaturen steget med 6.5°, og etter $t = 2\,\text{timer}$ er temperaturen steget med 11.0°.

a) Bruk disse observasjonene til å finne *A* og *k*.

b) Hvor lang tid tar det før temperaturen har steget med 18°?

Løsning:

a) Av våre observasjoner kan vi sette opp disse to likningene:

$$y(1) = A\left(1 - e^{-k}\right) = 6.5$$

$$y(2) = A\left(1 - e^{-2k}\right) = 11.0$$

Vi deler disse likningene på hverandre, og får

$$\frac{A\left(1 - e^{-2k}\right)}{A\left(1 - e^{-k}\right)} = \frac{11.0}{6.5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - e^{-2k}}{1 - e^{-k}} = 1.69$$

$$1 - e^{-2k} = 1.69\left(1 - e^{-k}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-2k} = 1.69 - 1.69e^{-k} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2k} - 1.69e^{-k} + 0.69 = 0$$

Nå husker vi at $e^{-2k} = \left(e^{-k}\right)^2$, slik at likningen over er en andregradslikning i e^{-k}. Bruker formel, og får

$$e^{-k} = \frac{-(-1.69) \pm \sqrt{(-1.69)^2 - 4 \cdot 0.69}}{2} = \frac{1.69 \pm 0.31}{2} = \begin{cases} \underline{1.00} \\ \underline{0.69} \end{cases}$$

Vi kan åpenbart ikke bruke løsningen $e^{-k} = 1.00$ fordi denne løsningen fører til at

$$1-e^{-k}=1-e^{-2k}=0.$$

Dermed har vi at

$$e^{-k}=0.69 \quad \Leftrightarrow \quad -k=\ln(0.69) \quad \Leftrightarrow \quad k\approx \underline{\underline{0.371}}.$$

Da blir

$$A\left(1-e^{-k}\right)=6.5 \quad \Leftrightarrow \quad A=\frac{6.5}{1-e^{-k}}=\frac{6.5}{1-0.69}=\underline{\underline{21.0}}.$$

b) Vi vet nå at temperaturøkingen er gitt ved

$$y(t)=21.0\left(1-e^{-0.371t}\right)$$

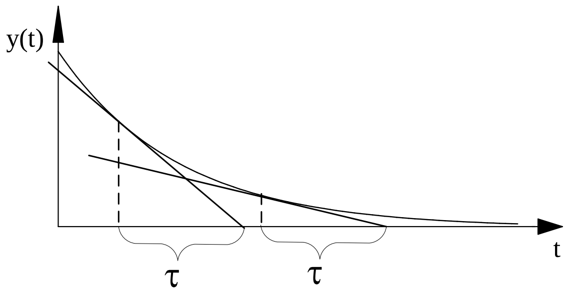
der t er gitt i timer. Når temperaturen er steget med 18°, er

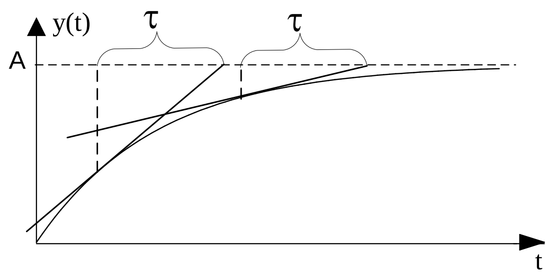
$$18=21.0\left(1-e^{-0.371t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1-e^{-0.371t}=\frac{18}{21.0}=0.857 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-0.371t}=1-0.857=0.143$$

$$-0.371t=\ln(0.143) \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{\ln(0.143)}{-0.371}\approx \underline{\underline{5.24}}$$

Det tar altså ca. 5 timer og et kvarter før temperaturen har steget med 18°.

Både for funksjonen $y=f(t)=A\cdot e^{-k\cdot t}$ og for funksjonen $y=f(t)=A\left(1-e^{-k\cdot t}\right)$ kan vi definere en størrelse som vi kaller ***tidskonstanten*** τ. Når vi trekker tangenten til funksjonsgrafen i et vilkårlig punkt på grafen til funksjonen $y=f(t)=A\cdot e^{-k\cdot t}$, er tidskonstanten den tiden det tar før tangenten skjærer t-aksen. Se figuren nedenfor til venstre.





Trekker vi tangenten til funksjonsgrafen i et vilkårlig punkt på grafen til funksjonen $y=f(t)=A\left(1-e^{-k\cdot t}\right)$, er tidskonstanten den tiden det tar før tangenten skjærer den rette linja $y=A$. Se figuren ovenfor til høyre.

Og nå kommer poenget:

Når $y=f(t)=A\cdot e^{-k\cdot t}$, er tidskonstanten $\tau=\frac{1}{k}$.

Beviset krever kjennskap til derivasjon, og er derfor dyttet ut i et lite vedlegg. Denne egenskapen gir en enkel tolking av konstanten k. Egenskapen er også svært nyttig i mange praktiske situasjoner, der vi utfører et eksperiment og får en kurve som ser ut til å være grafen til $y = A \cdot e^{-k \cdot t}$ eller $y = A\left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$. Trekk noen tangenter til grafen, sjekk at tidskonstantene er like store uansett hvor tangenten trekkes, og beregn $k = \frac{1}{\tau}$. Dette er en rask metode både til å sjekke om vi virkelig har en eksponentialfunksjon, og til i finne konstanten *k*.

4.5. Logaritmefunksjoner.

Vi har tidligere definert hva vi mener med *logaritmen* til et tall *x*:

$$y = \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

Vi merker oss at *y* blir en funksjon av *x*. Dermed har vi faktisk definert en *logaritmefunksjon med a som grunntall* slik:

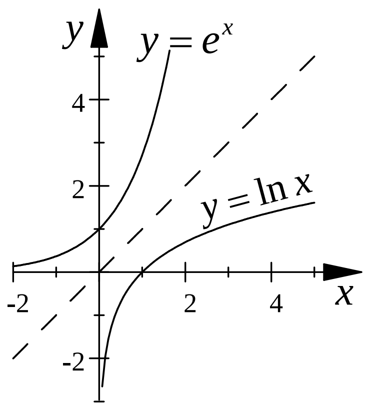
$$y = f(x) = \log_a(x) \text{ hvis og bare hvis } x = a^y \text{ der } a > 0.$$

I praksis sløyfer vi ofte parentesene rundt *x*-en dersom dette ikke fører til misforståelser.

Vi skal nøye oss med å betrakte ***den naturlige logaritmefunksjonen*** $y = f(x) = \ln(x)$ der grunntallet er *e*. Dette kan vi gjøre fordi enhver annen logaritmefunksjon med *a* som grunntall kan omformes til naturlige logaritmer ved hjelp av sammenhengene nedenfor:

$$f(x) = \log_a(x) = \log_a e \cdot \ln(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln(x).$$

Logaritmefunksjonen og eksponentialfunksjonen med samme grunntall er *inverse funksjoner*. Dette innebærer bl.a. at når du tegner grafen til en av funksjonene, får du automatisk grafen til den inverse funksjonen ved å la *x* og *y* "bytte rolle".



Dette illustreres i figuren til venstre, der grafene til $y = f(x) = e^x$ og $y = f(x) = \ln(x)$ er tegnet i samme koordinatsystem.

Av grafen og av definisjonen på logaritmefunksjon ser vi at:

- $y = \log_a(x)$ er kun definert for positive verdier av *x*.
- Når $0 < x < 1$, er $\log_a(x)$ negativ.
- $\log_a(1) = 0$ uansett verdi av *a*.

4.6. Likninger med logaritmer.

Regnereglene for logaritmer er nyttige når vi skal løse likninger som inneholder logaritmer, noe neste eksempel viser.

Eksempel 4.6.1: Finn x når

$$2\ln x - \ln(x+2) = 0.$$

Løsning: Vi starter med å omforme venstre side ved hjelp av logaritme-reglene:

$$2\ln x - \ln(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2) - \ln(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\frac{x^2}{x+2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x+2} = 1$$

Den siste overgangen skyldes at $\ln 1 = 0$. Så regner vi videre:

$$\frac{x^2}{x+2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Men vi kan ikke bruke løsningen $x = -1$ fordi du ved innsetting i den opprinnelige likningen vil få $2\ln(-1) - \ln 1 = 0$, og $\ln(-1)$ eksisterer ikke. Altså er den eneste brukbare løsningen

$$\underline{\underline{x = 2}}.$$

Du kan også komme fram til andregradslikningen på en annen (og kanskje enklere) måte:

$$2\ln x - \ln(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^2) = \ln(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = x+2.$$

Den siste overgangen skyldes at når to tall har samme logaritme, så må tallene være like.

Oppgave 4.6.1

4.7. Hyperbolske funksjoner.

Vi skal nå definere tre funksjoner som er avledet av funksjonen $y = e^x$. Disse funksjonene kalles ***hyperbolske funksjoner***, og er definert slik:

- ***Hyperbolsk sinus:*** $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$
- ***Hyperbolsk cosinus:*** $\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$
- ***Hyperbolsk tangens:*** $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

Disse funksjonene har mange egenskaper som minner om tilvarende egenskaper for trigonometriske funksjoner, for eksempel:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right)^2$$

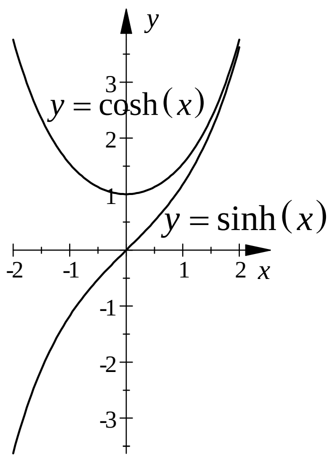
$$= \tfrac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \tfrac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \tfrac{2}{4} + \tfrac{2}{4} = 1$$

Og dette minner jo litt om

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Det er også mange andre sammenhenger mellom $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ og $\tanh(x)$ som minner om tilsvarende sammenhenger mellom $\sin x$, $\cos x$ og $\tan x$. Du kan selv påvise noen av disse i Oppgave 4.7.1.

Vi skal senere se at det også fins likheter mellom derivasjons- og integrasjonsregler for hyperbolske funksjoner og tilsvarende regler for trigonometriske funksjoner.



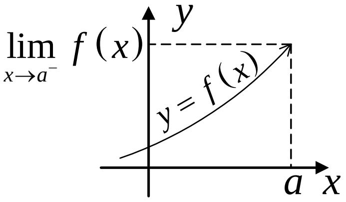
Grafene til $\sinh(x)$ og $\cosh(x)$ er skissert til venstre. Av disse er $\cosh(x)$ mest interessant. Det kan bl.a. vises at dersom en kjede med uendelig små ledd, og ingen friksjon mellom leddene, henges opp mellom to faste punkter, vil kjeden få samme form som grafen til $\cosh(x)$-funksjonen. Denne grafen kalles derfor ***kjedelinja***.

Det fins også ***inverse hyperbolske funksjoner***. Vi skal imidlertid ikke ta med disse her.

5. Grenseverdier.

5.1. Ensidige grenseverdier.

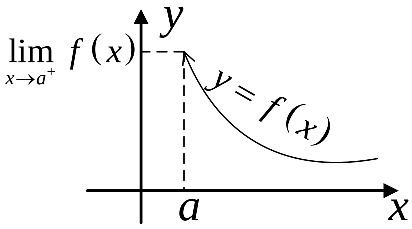
La oss starte med å få terminologien på plass.



Skrivemåten

$$\lim_{x\to a^-} f(x)$$

skal oppfattes som ***grenseverdien for funksjonen f når x er mindre enn a og går mot a***. Dette kalles også den ***venstresidige grenseverdien for f når x går mot a***. Se figuren til venstre.



På tilsvarende måte betyr

$$\lim_{x\to a^+} f(x)$$

grenseverdien for funksjonen f når x er større enn a og går mot a. Dette kalles også den ***høyresidige grenseverdien for f når x går mot a***. Se figuren til venstre.

Det er flere teknikker som kan brukes til å bestemme grenseverdier. En metode som ligger nær opp til definisjonene ovenfor, går ut på å erstatte *x* med $a+\delta$ der δ er et lite tall, og deretter la $\delta \to 0$. Vi får den venstresidige grenseverdien dersom $\delta < 0$ og går mot null, og den høyresidige grenseverdien dersom $\delta > 0$ og går mot null.

Eksempel 5.1.1: Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{når} \quad x < 1 \\ 2 - x & \text{når} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Bestem $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ og $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

Løsning: For å finne grenseverdien når $x \to 1^-$, må vi bruke funksjonsuttrykket som gjelder når $x < 1$ og erstatte *x* med $1-\delta$. Da blir

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = \lim_{\delta\to 0}(1-\delta)^2 = \lim_{\delta\to 0}\left(1-2\delta+\delta^2\right) = 1-2\cdot 0+0^2 = \underline{\underline{1}}.$$

For å finne grenseverdien når $x \to 1^+$, må vi bruke funksjonsuttrykket som gjelder når $x > 1$ og erstatte *x* med $1+\delta$. Da blir

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2-x) = \lim_{\delta\to 0}\left(2-(1+\delta)\right) = \lim_{\delta\to 0}(1-\delta) = 1-0 = \underline{\underline{1}}.$$

5.2. Tosidige grenseverdier.

Vi ser ofte at venstre- og høyresidig grenseverdi er like, slik som i eksemplet ovenfor. Da snakker vi om den ***tosidige grenseverdien*** eller bare om ***grenseverdien*** for *f* når $x \to a$, og skriver

$$\lim_{x\to a} f(x).$$

Da spiller det ingen rolle hvilket fortegn δ har når vi erstatter *x* med $x+\delta$.

Eksempel 5.2.1: Finn

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{2x-3}.$$

Løsning: Siden vi skal finne grenseverdien når $x\to 1$, erstatter vi x med $1+\delta$. Da blir

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{2x-3}=\lim_{\delta\to 0}\frac{(1+\delta)^2+1}{2(1+\delta)-3}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1+2\delta+\delta^2+1}{2+2\delta-3}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2+2\delta+2}{-1+2\delta}$$

$$=\frac{0^2+2\cdot 0+2}{-1+2\cdot 0}=\frac{2}{-1}=\underline{\underline{-2}}$$

Nå vil kanskje den oppmerksomme leser innvende at dette kan gjøres enklere: Bare sett inn $x=1$ det opprinnelige uttrykket og regn ut. Da får vi jo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{2x-3}=\frac{1^2+1}{2\cdot 1-3}=\frac{2}{-1}=\underline{\underline{-2}}.$$

Jeg må faktisk innrømme at i praksis gjør vi det ofte slik. Når vi skal finne $\lim_{x\to a} f(x)$, prøver vi først med direkte innsetting av $x=a$. Men noen ganger fører ikke dette fram, slik eksemplene nedenfor viser.

Eksempel 5.2.2: Finn disse grenseverdiene:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+1}$

Løsning: I begge eksemplene vil direkte innsetting gi brøker der både teller og nevner er lik null. Når vi får slike "$\frac{0}{0}$"-brøker må vi gå grundigere til verks.

a) Vi erstatter x med $2+\delta$ og lar $\delta\to 0$. Da får vi

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{\delta\to 0}\frac{(2+\delta)^2-4}{(2+\delta)-2}=\lim_{\delta\to 0}\frac{4+4\delta+\delta^2-4}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2+4\delta}{\delta}$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta(\delta+4)}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}(\delta+4)=0+4=\underline{\underline{4}}$$

b) Vi erstatter x med $-1+\delta$ og lar $\delta\to 0$. Da får vi

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+1}=\lim_{\delta\to 0}\frac{(-1+\delta)^2+3(-1+\delta)+2}{(-1+\delta)^3+1}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1-2\delta+\delta^2-3+3\delta+2}{-1+3\delta-3\delta^2+\delta^3+1}$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2+\delta}{\delta^3-3\delta^2+3\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta+1}{\delta^2-3\delta+3}=\frac{0+1}{0^2-3\cdot 0+3}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Da jeg omformet $(-1+\delta)^3$, benyttet jeg identiteten

$$(a+b)^3\equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Den oppmerksomme leser vil kanskje fremdeles innvende at disse eksemplene kan løses enklere. I eksempel a) kan telleren faktoriseres med 3. kvadratsetning. Da får vi:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=\underline{\underline{4}}.$$

Eksempel b) kan også handteres på tilsvarende måte. Men da må vår oppmerksomme leser oppdage at

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1),$$

og at

$$x^3+1=(x^2-x+1)(x+1),$$

slik at faktoren $x+1$ kan forkortes bort. Deretter finner vi grenseverdien ved å sette inn $x=-1$.

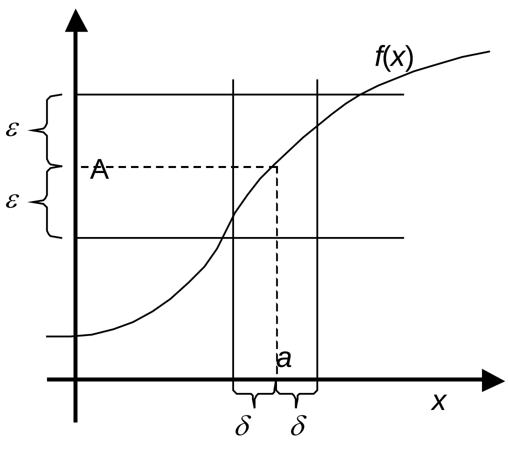
Oppgave 5.2.1.

5.3. Grenseverdisetninger.

Vår oppmerksomme leser har kanskje savnet en skikkelig, formell definisjon av begrepet *grenseverdi*. Her kommer den:

Gitt en funksjon $f(x)$ med definisjonsmengde D_f.
La a være et punkt innenfor eller på grensen av D_f.
Da sier vi at $f(x)$ går mot A som grense når $x\to a$ hvis og bare hvis:
For ethvert reelt tall $\varepsilon>0$ fins et tall $\delta>0$ slik at

$$|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$



Denne definisjonen kan illustreres som vist til venstre: Vi tegner opp funksjonsgrafen, merker av $x=a$ og en funksjonsverdi A slik at A ligger innefor et horisontalt "belte" med bredde fra $A-\varepsilon$ til $A+\varepsilon$. Så prøver vi å finne et område på x-aksen fra $a-\delta$ til $a+\delta$ som er slik at $f(x)$ ligger innenfor det horisontale "beltet" for alle x i området $\langle a-\delta,\, a+\delta\rangle$. Hvis det er mulig å finne et slikt område på x-aksen uansett hvor liten ε er (d.v.s. uansett hvor smalt "beltet" er), sier vi at $f(x)$ går mot A som grense når $x\to a$.

Definisjonen ovenfor gjelder for *tosidig* grenseverdi, fordi x kan gå mot a fra to sider. Men definisjonen av *ensidig* grenseverdi er helt analog, bare med den forskjellen at x kan gå mot a bare fra en side.

Hvis du har mistanke om at definisjonen ovenfor egner seg dårlig til å *finne* grenseverdier, har du helt rett. Definisjonen egner seg best til å *undersøke* om et bestemt tall A er grenseverdi for en funksjon når $x \to a$. Men den viktigste anvendelsen av definisjonen er å bevise *grenseverdisetninger* som er svært hensiktsmessige i bruk:

La $f(x)$ og $g(x)$ være to funksjoner som har grenseverdier

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = F \text{ og } \lim_{x \to x_0} g(x) = G.$$

La a og b være to konstante tall.
Da gjelder:

$$\lim_{x \to x_0} \left(a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\right) = a \cdot F + b \cdot G$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = F \cdot G$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \text{ dersom } G \neq 0$$

Disse setningene bruker vi ofte helt intuitivt. Gå tilbake til Eksempel 5.2.1, der vi skulle finne

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{2x-3}.$$

Ved å bruke setningene ovenfor, kan vi resonnere slik:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{2x-3} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}\left(x^2+1\right)}{\lim\limits_{x \to 1}(2x-3)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}\left(x^2\right)+1}{2 \cdot \lim\limits_{x \to 1}(x)-3} = \frac{1^2+1}{2 \cdot 1 - 3} = \frac{2}{-1} = \underline{\underline{-2}}.$$

Vi ser at direkte innsetting av $x = 1$ faktisk er en tillatt operasjon forutsatt at vi ikke får null i nevner.

Før vi summerer opp, skal vi ta et mer kinkig eksempel:

Eksempel 5.3.1: Bestem

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}}.$$

Løsning: Her legger vi merke til at direkte innsetting av $x = 3$ gir

$$\frac{3-3}{2-\sqrt{3+1}} = \frac{0}{2-\sqrt{4}} = \frac{0}{0},$$

som vi ikke uten videre kan finne verdien av. Det hjelper heller ikke å erstatte x med $3+\delta$, vi får like fullt et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk når $\delta \to 0$. Det er heller ingen forkortingsmuligheter. Er vi da helt fastlåst?

Det gjenstår en mulighet. Vi kan multiplisere teller og nevner med $2+\sqrt{x+1}$, slik at nevneren kan omformes med 3. kvadratsetning. Dette gir:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{\left(2-\sqrt{x+1}\right)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{4-(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{-x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}\left(2+\sqrt{x+1}\right)}{-\cancel{(x-3)}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(-2-\sqrt{x+1}\right)=-2-\sqrt{3+1}=\underline{\underline{-4}}$$

Da summerer vi opp: Når du skal finne $\lim_{x\to a} f(x)$, går du fram slik:

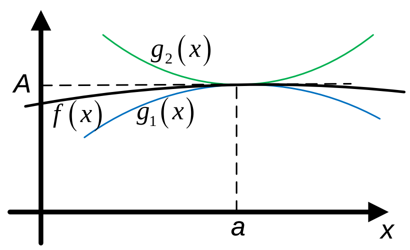
1. Prøv først en direkte innsetting av $x=a$.
2. Hvis det ikke fører fram, kan du prøve å erstatte x med $a+\delta$, forenkle hvis mulig, og la $\delta\to 0$.
3. Hvis $f(x)$ er en brøk, kan du se om det er noen felles faktor i teller og nevner som kan forkortes bort.
4. Hvis $f(x)$ inneholder rotuttrykk, kan du prøve å omforme ved hjelp av 3. kvadrat-setning.

Oppgave 5.3.1.

Disse teknikkene fungerer som regel bra så lenge $f(x)$ er bygd opp av polynomer, brøk-funksjoner eller kvadratrøtter av slike. Men dersom $f(x)$ inneholder trigonometriske funksjoner, eksponential- eller logaritmefunksjoner, er det ikke vanlig at disse teknikkene fører fram. Da trenger vi skarpere verktøy. Vi skal se på slike verktøy etter at vi har vært gjennom *derivasjon*.

5.4. Skvis-teknikken.

Noen ganger kan det lønne seg å "klemme" en funksjon mellom to andre funksjoner som det er lettere å finne grenseverdien til. Hvis vi kan vise at to funksjoner går mot samme grense når $x\to a$, og at "vår" funksjon ligger mellom disse funksjonene når $x\to a$, må også "vår" funksjon gå mot denne grensen. Mer presist formulert:



Anta at $x=a$ ligger i et intervall I der

$$g_1(x)\le f(x)\le g_2(x) \text{ for alle } x\in I,$$

og at $\lim_{x\to a} g_1(x)=\lim_{x\to a} g_2(x)=A$.

Da er også $\lim_{x\to a} f(x)=A$.

Vi skal ikke gi noe formelt bevis for setningen (som vel bør være nokså innlysende). Eksemplet nedenfor viser hvordan vi kan benytte setningen:

Eksempel 5.4.1: Finn $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Løsning: Problemet her er at når $x \to 0$, vil $\frac{1}{x} \to \pm\infty$. Da kan vi umulig vite hva $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ går mot når $x \to 0$. Men heldigvis vet vi at $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$. Da er

$$-\tfrac{\pi}{2}x < x\cdot\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) < \tfrac{\pi}{2}x.$$

Vi ser lett at

$$\lim_{x\to 0}\left(-\tfrac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) = 0.$$

Dermed må vi ha at

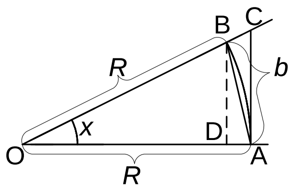
$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) = \underline{\underline{0}}.$$

Oppgave 5.4.1.

Vi skal nå bruke dette prinsippet til å finne en grenseverdi som vi etter hver får stor nytte av:

Når x er gitt i radianer, er $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$.

Bevis:



På figuren til venstre ser du at:

Arealet av trekant OAC er $F_{\vartriangle\text{OAC}} = \frac{1}{2}\cdot\text{OA}\cdot\text{AC} = \frac{1}{2}R\cdot R\tan x$

Arealet av trekant OAB er $F_{\vartriangle\text{OAB}} = \frac{1}{2}\cdot\text{OA}\cdot\text{BD} = \frac{1}{2}R\cdot R\sin x$

Arealet av sirkelsektor OAB er $F_{\sphericalangle\text{OAB}} = \frac{b}{2\pi R}\cdot\pi R^2 = \frac{1}{2}b\cdot R$

Det er innlysende at

$$F_{\vartriangle\text{OAB}} < F_{\sphericalangle\text{OAB}} < F_{\vartriangle\text{OAC}} \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}R^2\sin x < \tfrac{1}{2}b\cdot R < \tfrac{1}{2}R^2\tan x \quad\Leftrightarrow\quad \sin < \tfrac{b}{R} < \tan x.$$

Men siden x er gitt i radianer, er $x = \frac{b}{R}$. Videre er $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Dermed blir

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad\Leftrightarrow\quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad\Leftrightarrow\quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Men vi vet at $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x) = 1$. Dermed har vi vist at $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$.

Dette resultatet benyttes bl.a. til å finne en del andre grenseverdier, som vist i eksemplet nedenfor:

Eksempel 5.4.2: Finn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$.

Løsning: Vi ser at når $x \to \frac{\pi}{2}$, vil både teller og nevner gå mot null. Vi prøver derfor å sette $x = \frac{\pi}{2} + \delta$ og deretter la $\delta \to 0$. Da får vi:

$$\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)}{\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)-\frac{\pi}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\delta-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\delta}{\delta}=\frac{0\cdot\cos\delta-1\cdot\sin\delta}{\delta}=\underline{-\frac{\sin\delta}{\delta}}.$$

Dermed får vi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=\lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{\sin\delta}{\delta}\right)=\underline{\underline{-1}}.$$

5.5. *Grenseverdier når x går mot uendelig.*

Hittil har vi forutsatt at vi skal finne grenseverdien for $f(x)$ når x går mot et fast tall a. Men vi får ofte bruk for å finne grenseverdier når $x\to\pm\infty$.

Rent formelt kan slike problem behandles med å erstatte x med $\frac{1}{t}$. At $x\to\pm\infty$ er da ekvivalent med at $t\to 0^+$ eller $t\to 0^-$. Dermed er vi tilbake til kjente situasjoner, og vi kan vise at de grenseverdisetningene vi har brukt også gjelder når $x\to\pm\infty$.

Men i mange situasjoner kommer vi raskere i mål ved å benytte at:

Så lenge a er et fast tall, er $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x}=0$

Dette er i grunnen ganske innlysende: Så lenge a er et fast tall, kan $\frac{a}{x}$ gjøres så liten vi vil bare ved å gjøre x stor nok. Da innser vi at $\frac{a}{x}\to 0$ når $x\to\infty$. Resonnementet gjelder også når $x\to-\infty$.

Eksemplene nedenfor illustrerer teknikken:

Eksempel 5.5.1: Bestem disse grenseverdiene:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{1-2x^2}$

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3}{x^3-x+2}$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3x}}$

Løsning: Hovedprinsippet er at vi skal dividere teller og nevner med *høyeste* potens av x, og deretter la $x\to\infty$ eller $x\to-\infty$.

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{1-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-2x+3\right)\cdot\frac{1}{x^2}}{\left(1-2x^2\right)\cdot\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-2}$$
$$=\frac{1-0+0}{0-2}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3}{x^3-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2x^2-3\right)\cdot\frac{1}{x^3}}{\left(x^3-x+2\right)\cdot\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}$$
$$=\frac{-0-0}{1-0-0}=\underline{\underline{0}}$$

c) Her kan det se ut som om vi skal dele teller og nevner med x^2. Men x^2-leddet står under et rottegn, og vi husker at $\sqrt{x^2}=x$. Dermed innser vi at vi skal dele teller og nevner med *x*. Da får vi:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x+1\right)\cdot\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}}$$
$$=\frac{2+0}{\sqrt{1+0}}=\underline{\underline{2}}$$

Oppgave 5.5.1.

Vi avslutter med et eksempel der vi må bruke flere teknikker etter hverandre for å komme i mål:

Eksempel 5.5.2: Finn
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right).$$

Løsning: Når vi lar $x\to\infty$, får vi et "$\infty-\infty$"-uttrykk. Slike uttrykk kan vi ikke uten videre finne verdien av. For å løse problemet, må vi både benytte 3. kvadratsetning og divisjon med *x* på en litt finurlig måte:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(4x^2-x\right)-\left(2x\right)^2}{\sqrt{4x^2-x}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x\cdot\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}+\frac{2x}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2}=\frac{-1}{\sqrt{4-0}+2}=\frac{-1}{2+2}=\underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

Oppgave 5.5.2.

6. Kontinuitet.

6.1. Definisjoner.

En enkel og lett forståelig definisjon av begrepet ***kontinuitet*** kan være omtrent slik: En funksjon er kontinuerlig i et intervall dersom du kan tegne funksjonsgrafen uten å løfte blyanten fra papiret. Ulempen med en slik definisjon er at den er temmelig ubrukelig til formelle analyser.

Det fins flere formelle definisjoner av kontinuitetsbegrepet. Heldigvis viser det seg at alle er ekvivalente. En enkel definisjon som også er grei å bruke støtter seg på grenseverdibegrepet, og ser slik ut:

En funksjon *f* er kontinuerlig i et ***punkt*** $x = a$ hvis og bare hvis disse betingelsene er oppfylt:

1. $f(a)$ eksisterer.
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Funksjonen er kontinuerlig i et ***intervall*** hvis og bare hvis den er kontinuerlig i alle punktene i intervallet.

Vi kan også definere kontinuitet i et punkt etter samme mønster som grenseverdien i et punkt:

Gitt en funksjon *f* med definisjonsmengde D_f. La $a \in D_f$.
f er kontinuerlig for $x = a$ hvis og bare hvis det for ethvert reelt tall $\varepsilon > 0$ fins et tall $\delta > 0$ slik at

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Dersom *f ikke* er kontinuerlig, sier vi at *f* er ***diskontinuerlig***.

På grunnlag av disse definisjonene kan vi vise:

Dersom to funksjoner *f* og *g* begge er kontinuerlige i et intervall *I*, så er også disse sammensatte funksjonene kontinuerlige i *I*:

$a \cdot f + b \cdot g$ der *a* og *b* er konstanter.

$f \cdot g$.

$\dfrac{f}{g}$ i alle punkter x_0 der $g(x_0) \neq 0$.

Vi kan undersøke kontinuitetsegenskapene til våre vanlige funksjoner en gang for alle. Da vil vi oppdage at:

Følgende funksjoner er kontinuerlige i hele sitt definisjonsområde:

- Alle polynomfunksjoner
  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.
- Kvadratrotfunksjonen
  $f(x) = \sqrt{x}$ når $x \geq 0$.
- Alle eksponentialfunksjoner
  $f(x) = a^x$.
- Alle logaritmefunksjoner
  $f(x) = \log_a(x)$ når $x > 0$.
- Alle sinus- og cosinusfunksjoner.
- $f(x) = \tan(x)$ når $x \neq \dfrac{\pi}{2} \pm n \cdot \pi$.
- Alle hyperbolske funksjoner.

Væpnet med disse kunnskapene er det som regel ganske lett å undersøke kontinuitet, som ekseplene nedenfor viser.

***Eksempel 6.1.1*:** Undersøk om disse funksjonene er kontinuerlig i $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{når} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{når} \quad x = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2}{(x+1)^2} & \text{når} \quad x \neq -1 \\ 0 & \text{når} \quad x = -1 \end{cases}$

Løsning:

a) Både teller og nevner er polynomfunksjoner, og følgelig kontinuerlige.
Da er også brøken kontinuerlig unntatt muligens når $x = 1$.
Men vi ser at

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1}(x+1) = \underline{2}.$$

Siden

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = f(1) = 2,$$

er funksjonen kontinuerlig også for $x = 1$.

Da er funksjonen kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Både teller og nevner er polynomfunksjoner, og følgelig kontinuerlige.
Da er også brøken kontinuerlig unntatt muligens når $x=-1$.
Ved direkte innsetting ser vi at teller går mot $(-1)^2-2=-1$ mens nevner går mot 0 når $x\to-1$. Altså eksisterer ikke $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2}{(x+1)^2}$.
Da er funksjonen kontinuerlig for alle $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, og diskontinuerlig for $x=-1$.

Oppgave 6.1.1.

For mer kompliserte funksjoner er følgende setning nyttig:

Dersom en funksjon *f* er kontinuerlig for $x=a$, og en funksjon *g* er kontinuerlig for $x=f(a)$, er den sammensatte funksjonen $g(f(x))$ kontinuerlig når $x=a$.

Denne setningen må vi illustrere med et eksempel.

Eksempel 6.1.2: Undersøk om funksjonen

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$$

er kontinuerlig for alle $x\in\mathbb{R}$.

Løsning: Vi vet at x^2+1 er en polynomfunksjon som er kontinuerlig for alle verdier av *x*. Videre ser vi at x^2+1 er positiv for alle verdier av *x* slik at $\ln\left(x^2+1\right)$ eksisterer. Dessuten vet vi at $\ln x$ er kontinuerlig for alle *x*. Dermed kan vi slå fast at $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ er kontinuerlig for alle $x\in\mathbb{R}$.

Noen ganger må vi se om det er mulig å få en funksjon gitt på intervallform til å bli kontinuerlig:

Eksempel 6.1.3: En funksjon *f* er gitt ved

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{når} \quad x<1 \\ a-x & \text{når} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Bestem (om mulig) tallet *a* slik at *f* blir kontinuerlig for alle $x\in\mathbb{R}$.

Løsning: Vi må bestemme *a* slik at

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to1^-}x^2=\lim_{x\to1^+}(a-x) \quad\Leftrightarrow\quad 1^2=a-1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{a=2}}.$$

Oppgave 6.1.2.

6.2. Egenskaper ved kontinuerlige funksjoner.

Det er flere grunner til at vi stresser med grenseverdier og kontinuitet. Den kanskje viktigste grunnen er at disse begrepene er helt fundamentale når vi om litt skal gå løs på derivasjon. Men vi kan allerede nå dra nytte av at en funksjon er kontinuerlig i et ***lukket*** intervall. Hva er så et *lukket* intervall? Det er kort og godt et intervall av typen $\left[a, b\right]$, d.v.s. at endepunktene av intervallet inngår i intervallet. Vi kan nå vise at:

Dersom en funksjon *f* er kontinuerlig i et ***lukket*** intervall, har vi at:

1. Det eksisterer en ***øvre skranke M*** og en ***nedre skranke m*** slik at $m < f\left(x\right) < M$ for alle $x \in \left[a, b\right]$.

2. Det fins alltid et *minimumspunkt* $x_1 \in \left[a, b\right]$ og et *maksimumspunkt* $x_2 \in \left[a, b\right]$ slik at $f\left(x_1\right) \leq f\left(x\right) \leq f\left(x_2\right)$ for alle $x \in \left[a, b\right]$. De tilhørende funksjonsverdiene $f\left(x_1\right)$ og $f\left(x_2\right)$ er funksjonens *minimums*- og *maksimumsverdier*.

3. Dersom *d* er et tall som ligger mellom $f\left(a\right)$ og $f\left(b\right)$, fins minst en $c \in \left\langle a, b\right\rangle$ slik at $f\left(c\right) = d$.

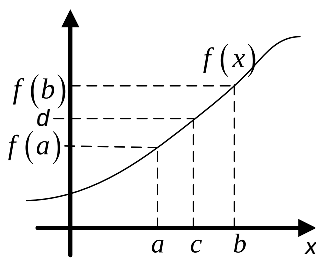
4. Dersom $f\left(a\right)$ og $f\left(b\right)$ har motsatte fortegn, fins minst en $c \in \left\langle a, b\right\rangle$ slik at $f\left(c\right) = 0$.

Noen kommentarer til disse setningene:

1: Vi kan være sikre på at funksjonen må være *begrenset*, slik at funksjonsverdiene aldri kan bli mindre enn den nedre skranken og aldri større enn den øvre skranken.

2: Funksjonen *må* ha minst ett veldefinert minimumspunkt og minst ett veldefinert maksimumspunkt. Merk at funksjonen kan ha flere minimumspunkter som har samme funksjonsverdi, og flere maksimumspunkter med samme funksjonsverdi.

3: Dersom du skal løse en likning av typen $f\left(x\right) = d$, og ikke klarer å løse den eksakt, kan du finne en tilnærmet løsning dersom du finner to nærliggende verdier *a* og *b* slik at $f\left(a\right)$ er *litt* mindre enn *d*, mens $f\left(b\right)$ er *litt* større enn *d*. Da kan du velge en verdi $x = c$ som ligger mellom *a* og *b*, finne $f\left(c\right)$, og gjenta prosedyren inntil du finner en *x*-verdi slik at $f\left(x\right) \approx d$. Se for øvrig eksemplet etter neste punkt.



4: Et spesialtilfelle av situasjonen over med $d = 0$.

Eksemplet nedenfor illustrerer hvordan du kan gå fram for å finne tilnærmet løsning av likninger:

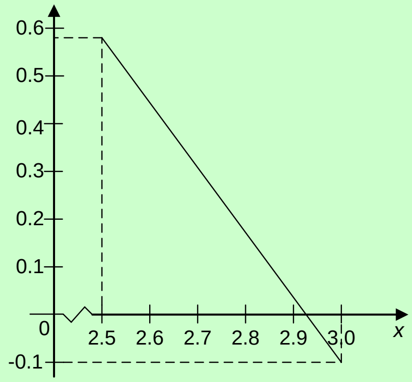
Eksempel 6.2.1: Vis at funksjonen

$$f(x) = 4 - x - \ln x$$

har minst ett nullpunkt i intervallet $[2.5, 3]$, og bruk dette til å finne en tilnærmet løsning av likningen

$$4 - x - \ln x = 0.$$

Løsning: Vi merker oss først at *f* er kontinuerlig i intervallet $[2.5, 3]$. Ved innsetting får vi



$$f(2.5) = 4 - 2.5 - \ln(2.5) \approx 0.584$$

mens

$$f(3) = 4 - 3 - \ln 3 \approx -0.099.$$

Da må *f* ha minst ett nullpunkt i intervallet $[2.5, 3]$.

Vi antar at funksjonsgrafen er tilnærmet rettlinjet i intervallet $[2.5, 3]$. Da får vi grafen til venstre. Den indikerer at vi har en bedre løsning nær $x = 2.9$. Vi prøver:

$$f(2.9) = 4 - 2.9 - \ln(2.9) \approx 0.035.$$

Vi kan nå tegne en ny skisse for intervallet $[2.9, 3]$, og den antyder en løsning nær $x = 2.93$.
Vi prøver denne løsningen:

$$f(2.93) = 4 - 2.93 - \ln(2.93) \approx -0.005.$$

Vi sier oss fornøyd med denne nøyaktigheten, og sier at likningen

$$4 - x - \ln x = 0$$

har en tilnærmet løsning $x \approx \underline{\underline{2.93}}$.

Oppgave 6.2.1.

7. Komplekse tall.

7.1. Innledning.

Når du løser likningen

$$x^2 + 2x + 2 = 0,$$

får du

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \underline{-1 \pm \sqrt{-1}}.$$

Og da sier du kanskje: "Negativt tall under rottegnet, ingen løsning."

Men det fins situasjoner hvor vi må kreve at slike likninger har løsning (bare vent til du kommer til andre ordens differensiallikninger). Dette dilemmaet løser vi slik:

> Vi definerer **den imaginære enheten** $i = \sqrt{-1}$.

I mange sammenhenger, f.eks. innen elektroteknikk, benyttes j istedenfor i som symbol for den imaginære enheten.

For å kunne bruke den imaginære enheten til noe, må vi gjøre en dristig antakelse:

> Den imaginære enheten i følger de samme regnereglene som reelle tall.

Jeg skal ikke begrunne denne påstanden. Men den viser seg (heldigvis) å være korrekt.
Av definisjonen på i får vi nå sammenhengen

> $i^2 = -1$

Og nå kan du løse den likningen som du startet med. Du får løsningene

$$x = -1 \pm \sqrt{-1} = \underline{\underline{-1 \pm i}}.$$

Disse to løsningene er eksempler på **komplekse tall**.

> Ethvert **komplekst tall *z*** kan skrives på formen
> $$z = x + iy$$
> der x og y er reelle tall.
> Denne formen kalles **standardformen** for komplekse tall**.**
>
> x er **realdelen** av z, eller $x = \mathrm{Re}(z)$.
>
> y er **imaginærdelen** av z, eller $y = \mathrm{Im}(z)$.

Løsningene av andregradslikningen består altså av to komplekse tall som har samme realdel, mens imaginærdelen har motsatte fortegn. To slike komplekse tall kalles **kompleks konjugerte**. To kompleks konjugerte tall skrives henholdsvis z og z^* (eller z og $\overline{z}$).

Dersom $z = x + iy$, er den **kompleks konjugerte** $z^* = x - iy$.

Oppgave 7.1.1, 7.1.2.

7.2. Regneregler for komplekse tall.

I innledningen påsto vi at komplekse tall følger de samme regneregler som reelle tall, Dette gjør det enkelt å *addere* og *subtrahere* komplekse tall. Vi samler realdelene for seg, og imaginærdelen for seg slik eksemplene nedenfor viser.

***Eksempel 7.2.1*:**
Gitt de to komplekse tallene $z_1 = 2 + 3i$ og $z_2 = 4 - i$.
Regn ut $z_1 + z_2$ og $3z_1 - 2z_2$.

Løsning: $z_1 + z_2 = (2+3i) + (4-i) = (2+4) + (3i - i) = \underline{\underline{6 + 2i}}$.
$3z_1 - 2z_2 = 3(2+3i) - 2(4-i) = 6 + 9i - 8 + 2i = \underline{\underline{-2 + 11i}}$.

Multiplikasjon av komplekse tall er litt verre. Men hvis du husker at $i^2 = -1$, går det greit:

Eksempel 7.2.2:
Gitt de to komplekse tallene $z_1 = 1 + 3i$ og $z_2 = 2 - i$. Regn ut $z_1 \cdot z_2$.

Løsning:
$$z_1 \cdot z_2 = (1+3i)\cdot(2-i) = 1\cdot 2 + 1\cdot(-i) + (3i)\cdot 2 + (3i)\cdot(-i) = 2 - i + 6i - 3i^2$$
$$= 2 + 5i - 3\cdot(-1) = \underline{\underline{5 + 5i}}$$

Så var det *divisjon*. Da får vi bruk for denne sammenhengen:

$$\underline{z \cdot z^*} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - (-1)y^2$$
$$= \underline{x^2 + y^2}$$

Vi må ta et eksempel for å se hvordan dette fungerer.

Eksempel 7.2.3:

Gitt de to komplekse tallene $z_1 = 2-3i$ og $z_2 = 3+i$. Regn ut $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Løsning: Trikset går ut på å multiplisere teller og nevner med z_2*:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{3+i} = \frac{(2-3i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)} = \frac{6-2i-9i+3i^2}{9-i^2} = \frac{(6-3)+i(-2-9)}{9+1} = \underline{\underline{\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i}}.$$

Oppgave 7.2.1.

Likninger med komplekse tall løses vanligvis etter samme prinsipper som likninger med reelle tall, men ved hjelp av regnereglene ovenfor slik eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 7.2.4: Løs likningen

$$\frac{2z-1+3i}{z+2i} = 1-3i.$$

Løsning: Multipliserer begge sider av likningen med $z+2i$, og får

$$2z-1+3i = (1-3i)(z+2i) = z+2i-3zi-6i^2 = z-3zi+2i+6.$$

Samler alle z-leddene på venstre side:

$$2z - z + 3zi = 1-3i+2i+6$$

$$(1+3i)z = 7-i$$

$$z = \frac{7-i}{1+3i} = \frac{(7-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{7-21i-i+3i^2}{1+9} = \frac{4-22i}{10} = \underline{\underline{\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i}}$$

Dersom likningen inneholder både z og $z*$, må vi benytte andre metoder. Vi trenger da denne setningen:

La $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$ være to komplekse tall.
Da definerer vi **likhet** slik:

$$z_1 = z_2$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 = x_2 \quad \wedge \quad y_1 = y_2$$

Eksempel 7.2.5: Løs likningen

$$2z+3-3i = z*-3z-1+3i.$$

Løsning: Først ordner vi så godt vi kan:

$$2z - z* + 3z = -3+3i-1+3i$$

$$5z - z* = -4+6i$$

Så setter vi inn $z = x + iy$ og $z^* = x - iy$, og får:

$$5(x+iy)-(x-iy) = -4+6i$$
$$5x+5iy-x+iy = -4+6i$$
$$4x+6iy = -4+6i$$

Av definisjonen på likhet får vi nå:
Realdelen: $4x = -4 \Leftrightarrow \underline{x=-1}$.
Imaginærdelen: $6iy = 6i \Leftrightarrow \underline{y=1}$.
Altså er $z = x + iy = \underline{\underline{-1+i}}$.

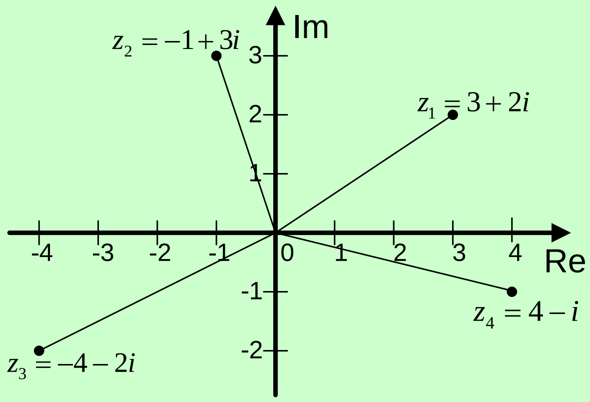
Oppgave 7.2.2.

7.3. Det komplekse planet. Polarform.

Reelle tall kan avmerkes på ei vanlig tall-linje. Komplekse tall kan avmerkes i det **komplekse plan**. Dette består av en **reell akse** der realdelen av z avmerkes, og en **imaginær akse** der imaginærdelen av z avmerkes. Disse aksene står vinkelrett på hverandre.

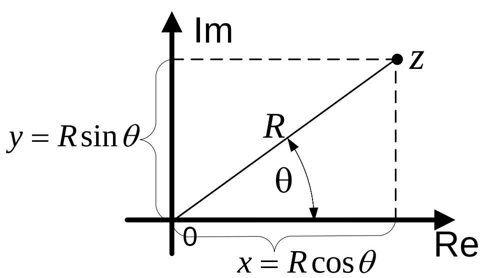
Eksempel 7.3.1: Tegn inn disse komplekse tallene i det komplekse planet:
$z_1 = 3+2i$ $\quad z_2 = -1+3i$ $\quad z_3 = -4-2i$ $\quad z_4 = 4-i$.

Løsning:



På figuren til venstre ser du et komplekst plan der de fire komplekse tallene er tegnet inn:

$$z_1 = 3+2i$$
$$z_2 = -1+3i$$
$$z_3 = -4-2i$$
$$z_4 = 4-i$$



Når et komplekst tall z er avmerket i det komplekse planet, kan tallet framstilles på en annen måte. Vi kan oppgi avstanden R fra punktet til origo, og vinkelen θ mellom den reelle aksen og linja fra origo til punktet. Se figuren til venstre.

R kalles **modulus** til z.
θ kalles **argumentet** til z.

Av figuren ser du også disse sammenhengene:

$$x = R\cos\theta \qquad y = R\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

De to øverste likningene gir nå:

$$z = x + iy = R\cos\theta + iR\sin\theta = \underline{R(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

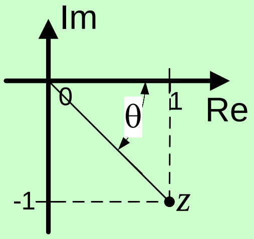
Det komplekse tallet z er nå på **polar form** (kalles også **trigonometrisk form**).

Eksempel 7.3.2: Skriv det komplekse tallet

$z = 1 - i$

på polar form.

Løsning:



$$R^2 = x^2 + y^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{R = \sqrt{2}}$$

fordi R må være positiv.

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\theta = -\tfrac{1}{4}\pi}$$

fordi z ligger i 4. kvadrant. Altså er

$$\underline{\underline{z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right)\right)}}.$$

Legg merke til at tallet

$z_1 = -1 + i$

også får $R_1 = \sqrt{2}$ og $\tan\theta_1 = -1$. Men z_1 ligger i 2. kvadrant slik at $\theta_1 = \tfrac{3}{4}\pi$. Derfor blir

$$\underline{\underline{z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)}}.$$

Når du omformer tall fra standardform til polar form, bør du alltid lage en tegning. Ellers er det lett å bruke en argumentvinkel som er 180° feil.

`Oppgave 7.3.1`, `7.3.2`.

7.4. Eksponentiell form. Eulers formel.

Vi får nå bruk for en sammenheng som kan virke temmelig merkelig. Sammenhengen kalles ***Eulers formel***. Et bevis forutsetter at du behersker *Taylor-rekker*, og vil ikke bli gitt her.

Her er ***Eulers formel:***

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Dette betyr at du kan skrive

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta) = \underline{R \cdot e^{i\theta}}$$

Dette er den **eksponentielle formen** for et komplekst tall.

Eksempel 7.4.1: Skriv disse komplekse tallene på eksponentiell form:

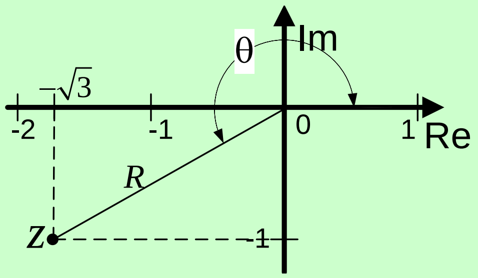
a) $z = 1 - i$ b) $z = -\sqrt{3} - i$

Løsning:

a) Fra eksempel 7.3.2 vet vi at $z = 1 - i$ har modulus $R = \sqrt{2}$ og argument $\theta = -\frac{1}{4}\pi$.

Altså er $z = 1 - i = \underline{\underline{\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\pi i}}}$.

b)



$R = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \underline{2}$.

$\tan\theta = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \underline{\frac{7}{6}\pi}$

fordi z ligger i 3. kvadrant. Altså er

$z = \underline{\underline{2e^{\frac{7}{6}\pi i}}}$.

Oppgave 7.4.1, **7.4.2**.

Noen slike sammenhenger er såpass enkle at de virker helt merkelige, for eksempel disse:

$i = e^{\frac{1}{2}\pi i}$ fordi det komplekse tallet $z = 0 + 1i$ har modulus 1 og argument $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

$-1 = e^{\pi i}$ fordi det komplekse tallet $z = -1 + 0i$ har modulus 1 og argument $\theta = \pi$.

$-i = e^{\frac{3}{2}\pi i}$ fordi det komplekse tallet $z = 0 - 1i$ har modulus 1 og argument $\theta = \frac{3}{2}\pi$.

Et komplekst tall endrer ikke verdi dersom argumentvinkelen øker med 2π, eller 4π, eller 6π, eller… Generelt har vi at:

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta \pm n\cdot 2\pi)} \text{ der } n \text{ er et helt tall.}$$

Oppgave 7.4.3.

Vi har tidligere sagt at de vanlige regnereglene for reelle tall også skal gjelde for den imaginære enheten *i*. Men da må også potens-regnereglene gjelde for komplekse tall. Dette gir oss flere nyttige regler:

Vi har to komplekse tall $z_1 = R_1 e^{i\theta_1}$ og $z_2 = R_2 e^{i\theta_2}$.
Da blir:

$$z_1 \cdot z_2 = R_1 \cdot e^{i\theta_1} \cdot R_2 \cdot e^{i\theta_2} = R_1 \cdot R_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \cdot e^{i\theta_1}}{R_2 \cdot e^{i\theta_2}} = \frac{R_1}{R_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$z^n = \left(R \cdot e^{i\theta}\right)^n = R^n \cdot e^{i \cdot n\theta}$$

Litt upresist kan vi si at:

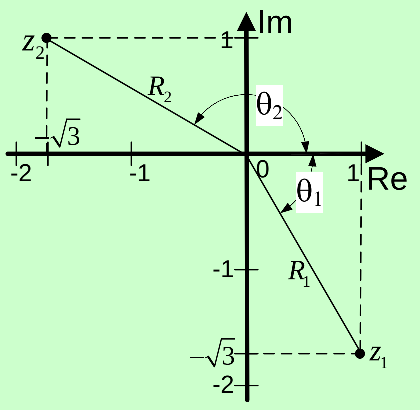
- Vi multipliserer to komplekse tall ved å multiplisere deres modulus og addere deres argumentvinkler.
- Vi dividerer to komplekse tall ved å dividere deres modulus og trekke argumentvinklene fra hverandre.

Eksempel 7.4.2: Du har de to komplekse tallene

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3} \qquad \text{og} \qquad z_2 = -\sqrt{3} + i\,.$$

Finn $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ og $z_1^{\,3}$ på standardform ved å gå veien om den eksponentielle formen.

Løsning:



For z_1 får vi:

$$R_1 = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \underline{2}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{1} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \underline{-\tfrac{1}{3}\pi}$$

fordi z_1 ligger i 4. kvadrant. Da blir

$$z_1 = \underline{2e^{-\frac{1}{3}\pi i}}\,.$$

For z_2 får vi:

$$R_2 = \underline{2}\,,\ \tan\theta_2 = \frac{1}{-\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \underline{\tfrac{5}{6}\pi}$$

fordi z_2 ligger i 4. kvadrant. Da blir

$$z_2 = \underline{2e^{\frac{5}{6}\pi i}}\,.$$

Altså er

$$z_1 \cdot z_2 = 2e^{-\frac{1}{3}\pi i} \cdot 2e^{\frac{5}{6}\pi i} = 4e^{-\frac{2}{6}\pi i + \frac{5}{6}\pi i} = 4e^{\frac{1}{2}\pi i} = \underline{\underline{4i}}\,.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{-\frac{1}{3}\pi i}}{2e^{\frac{5}{6}\pi i}} = e^{-\frac{1}{3}\pi i - \frac{5}{6}\pi i} = e^{-\frac{7}{6}\pi i} = \cos\left(\tfrac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{7}{6}\pi\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i}}\,.$$

$$z_1^{\,3} = \left(2e^{-\frac{1}{3}\pi i}\right)^3 = 8e^{-\pi i} = \underline{\underline{-8}}\,.$$

Oppgave 7.4.4.

Vi kan også utlede disse sammenhengene:

Eulers formler:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Moivres formel:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

I **Oppgave 7.4.5** og **7.4.6** skal du prøve å utlede disse formlene selv.

Oppgave 7.4.7.

7.5. Hvordan trekker du røtter av komplekse tall?

Når vi skal trekke røtter av komplekse tall, starter vi med å overføre tallene til eksponentiell form. Framgangsmåten for å trekke kvadratrota av et komplekst tall er slik:

Start med å skrive tallet på formen $z = R\cdot e^{\theta i}$. Deretter blir:

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = \left(R\cdot e^{\theta i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R}\cdot e^{\frac{1}{2}\theta i} = \underline{\sqrt{R}\left(\cos\tfrac{\theta}{2} + i\sin\tfrac{\theta}{2}\right)}\ .$$

Noe forenklet kan vi si at du trekker kvadratrota av modulus og halverer argumentvinkelen.

Men du får faktisk en løsning til. For du kan jo addere 2π til argumentet uten at z endrer verdi. Men $\sqrt{z}$ endrer verdi:

$$\sqrt{z} = \left(\mathrm{R}e^{(\theta+2\pi)i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R}\cdot e^{\left(\frac{1}{2}\theta+\pi\right)i} = \sqrt{R}\cdot e^{\frac{1}{2}\theta i}\cdot e^{\pi i} = \sqrt{R}\cdot e^{\frac{1}{2}\theta i}\cdot(-1)$$

$$= \underline{-\sqrt{R}\left(\cos\tfrac{\theta}{2} + i\sin\tfrac{\theta}{2}\right)}$$

Altså har vi at:

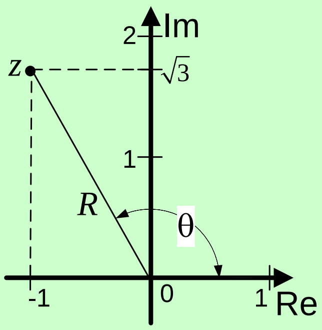
Når $z = R\cdot e^{\theta i}$, blir $\sqrt{z} = \pm\sqrt{R}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$.

Legg merke til at når du trekker kvadratrota av et komplekst tall, får du alltid to verdier med motsatte fortegn.

Eksempel 7.5.1:

Beregn $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

Løsning:



Definerer $z=-1+i\sqrt{3}$, og skriver z på eksponentiell form:

$$R=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\underline{2}\,.$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}\quad\Rightarrow\quad \theta=\underline{\tfrac{2}{3}\pi}$$

fordi $-1+i\sqrt{3}$ ligger i 2. kvadrant. Altså er

$$z=\underline{2e^{\frac{2}{3}\pi i}}\,.$$

Da er

$$\sqrt{-1+i\sqrt{3}}=\pm\left(2e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{2}\cdot e^{\frac{1}{3}\pi i}=\pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\right)=\pm\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}+i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$
$$=\underline{\underline{\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)}}$$

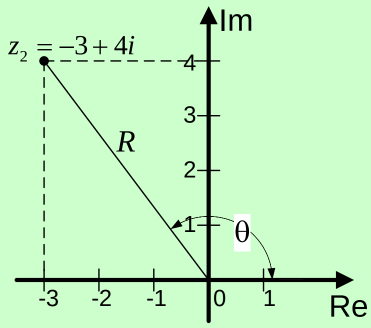
Noen ganger kan det lønne seg å bruke formlene for sinus og cosinus til halve vinkler:

$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\,,\qquad \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\,.$$

Eksemplet nedenfor viser en anvendelse:

Eksempel 7.5.2: Beregn $\sqrt{-3+4i}$.

Løsning:



Vi tegner inn $z=-3+4i$ i det komplekse planet, og ser at

$$R=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\underline{5}\,.$$

Da blir

$$\cos\theta=\tfrac{-3}{5}$$

slik at

$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Vi bruker positivt fortegn på både $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ og $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ fordi vi ser av figuren at $\frac{\theta}{2}$ blir liggende i 1. kvadrant. Dermed har vi at

$$\sqrt{z}=\pm\sqrt{R}\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)=\pm\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+i\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\underline{\underline{\pm(1+2i)}}\,.$$

Oppgave 7.5.1.

Du løser andregradslikninger med komplekse koeffisienter med den velkjente formelen for løsing av andregradslikninger. Om nødvendig finner du kvadratrota av et komplekst tall på vanlig måte, slik eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 7.5.3: Løs likningen

$$z^2 + 2iz - 1 - i = 0.$$

Løsning: Du bruker den velkjente formelen:

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4(-1-i)}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4+4+4i}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{4i}}{2} = \underline{-i \pm \sqrt{i}}.$$

Men

$$\sqrt{i} = \pm\left(e^{\frac{1}{2}\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm e^{\frac{1}{4}\pi i} = \pm\left(\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\right) = \pm\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right),$$

slik at

$$\underline{z = -i \pm \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)}.$$

De to løsningene blir da:

$$z_1 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\left(-1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)}} \qquad \text{og} \qquad z_2 = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\left(-1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)}}.$$

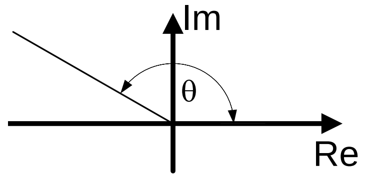
Merk at løsningene ikke er kompleks konjugerte.

Oppgave 7.5.2.

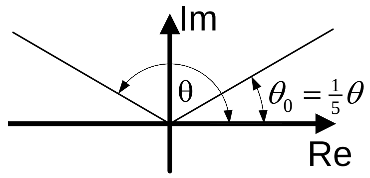
Du kan også trekke n-te rot av komplekse tall. Framgangsmåten er slik:

1. Overfør tallet til formen $z = R\cdot e^{i(\theta + m\cdot 2\pi)}$, $m = 0, 1, \,..\, n-1$.
2. $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left(R\cdot e^{i(\theta+m\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{n}} = R^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\left(\frac{1}{n}\theta + \frac{1}{n}\cdot 2m\cdot\pi\right)}$, $m = 0, 1, \,..\, n-1$.
3. Du får n løsninger. Overfør disse til standardform.

La oss se nærmere på hva som egentlig står her. La oss trekke 5. rot ($n = 5$) som eksempel, og spesielt holde øye med argumentvinkelen.

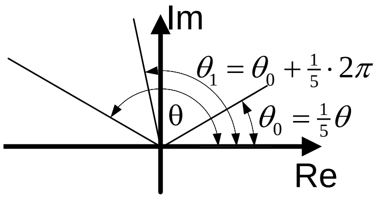


Vi starter med $z = R\cdot e^{i\theta}$, d.v.s. at z har argumentvinkel θ.



Først setter du $m = 0$, slik at $\sqrt[5]{z}$ får en argumentvinkel

$$\theta_0 = \tfrac{1}{5}\theta.$$



Så setter du m = 1. Da får $\sqrt[5]{z}$ en argumentvinkel

$$\theta_1 = \tfrac{1}{5}\theta + \tfrac{1}{5}\cdot 2\pi .$$

Du legger altså $\frac{1}{5}$ av et helt omløp til den forrige argumentvinkelen.

Neste gang setter du m = 2. Da får du

$$\theta_2 = \tfrac{1}{5}\theta + \tfrac{1}{5}\cdot 4\pi = \tfrac{1}{5}\theta + \tfrac{2}{5}\cdot 2\pi ,$$

slik at du legger til en ny femdel av et helt omløp. Og slik fortsetter det oppover.

Men når m = 5, er det slutt. For da blir $\theta_5 = \frac{1}{5}\theta + \frac{5}{5}\cdot 2\pi = \frac{1}{5}\theta + 2\pi$. Og denne argument-vinkelen gir jo samme z-verdi som $\theta_0 = \frac{1}{5}\theta$.

Dette systemet får du uansett verdi av n. Vi sammenfatter:

Du får alltid n forskjellige verdier når du trekker n'te rot av et komplekst tall $z = R\cdot e^{i\theta}$.

Den første verdien får modulus $\sqrt[n]{R}$ og argumentvinkel $\theta_0 = \frac{1}{n}\theta$.

De andre verdiene har samme modulus, mens argumentvinklene øker med $\frac{1}{n}\cdot 2\pi$ for hver verdi.

***Eksempel 7.5.4*:** Finn $\sqrt[3]{-1}$.

Løsning: Definerer $z = -1 = e^{\pi i}$. De tre verdiene av $\sqrt[3]{-1}$ blir nå:

$$z_0 = \left(e^{\pi i}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\pi i} = \cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}} .$$

$$z_1 = e^{\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\cdot 2\pi\right)i} = e^{\pi i} = \underline{\underline{-1}} .$$

$$z_2 = e^{\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\cdot 2\pi\right)i} = e^{\frac{5}{3}\pi i} = \cos\left(\tfrac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{3}\pi\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} - i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}} .$$

Oppgave 7.5.3.

7.6. Algebraens fundamentalteorem.

Takket være de komplekse tallene kan vi nå bevise en setning som er så sentral at den har fått betegnelsen **algebraens fundamentalteorem**:

Ethvert polynom

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$$

kan faktoriseres til

$$P(z) = c_n(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n)$$

der r_1, r_2, . . ., r_n er n entydig bestemte komplekse tall.

Merk at koeffisientene c_0, c_1, . . ., c_n kan være komplekse tall.
Vi skal ikke gjennomføre beviset her.

Av dette teoremet følger direkte:

Enhver n'tegrads likning har n løsninger.

Noen av disse løsningene kan riktignok være like. Dersom likningen har q like løsninger, sier vi at denne løsningsverdien har **multiplisitet** $\boldsymbol{q}$.

Videre kan vi vise:

Dersom en n'tegrads likning bare har reelle koeffisienter,
er løsningene enten reelle eller kompleks konjugerte par.

Oppgave 7.6.1.

7.7. Noen sluttmerknader.

Jeg kan godt forstå det hvis du synes at komplekse tall er noen merkelige greier. Men du skal snart se at komplekse tall er svært nyttige, for eksempel når vi skal løse differensiallikninger. Dessuten er faktisk komplekse tall et nyttig hjelpemiddel innenfor mange tekniske fag, ikke minst innenfor elektroteknikk. Jeg vil imidlertid ikke ta opp slike anvendelser her.

De mest avanserte kalkulatorene kan regne med komplekse tall. Dersom du har en slik kalkulator, kan du få merkelige resultater som for eksempel at $\ln(-2) = \ln 2 + \pi i$ stikk i strid med vår fasttømrede oppfatning om at det er umulig å ta logaritmen til negative tall. Vi kan også få sinus- og cosinus-verdier som er større enn 1 eller mindre enn -1. For eksempel gir min kalkulator at $\arcsin 2 = \frac{1}{2}\pi - \ln\left(\sqrt{3}+2\right)i$. Jeg har laget et lite notat om komplekse argumenter i funksjonsuttrykk der den nysgjerrige student kan finne forklaringen på disse raritetene.

8. Blandede oppgaver.

Her finner du en liten samling blandede oppgaver. De fleste oppgavene har vært gitt som eksamensoppgaver. Du finner løsningsforslag ved å klikke på oppgavenummeret.

8.1. Oppgaver.

Oppgave 1

Løs disse likningene:

a) $\sqrt{3}\sin(2x) + \cos(2x) = 1, \quad 0 \le x < 2\pi$.

b) $\sin(2x) = \sin x, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$.

Oppgave 2

Løs disse likningene:

a) $e^{2x-1} = 2e^{x+1}$.

b) $(\ln x)^2 - \ln(x^2) = 3$

c) $\ln(2x-3) + \ln(x+2) = 2\ln x$

Oppgave 3

a) Skriv de komplekse tallene nedenfor på formen $z = a + ib$ der $i = \sqrt{-1}$ er den imaginære enheten:

I) $z = \dfrac{8+i}{3+2i}$

II) $z = \dfrac{2-3i}{i-1}$

b) Løs likningen

$$\frac{2}{3z+1} = \frac{i}{2z+9}$$

og skriv svaret på formen $z = a + ib$.

Oppgave 4

I disse oppgavene skal alle svar skrives på formen $z = a + ib$ der $i = \sqrt{-1}$ er den imaginære enheten.

a) Finn $\sqrt[3]{i}$.

b) Finn $\sqrt[3]{-8i}$.

c) Tegn inn tallet $-2+2\sqrt{3}\,i$ i det komplekse planet, og finn $\sqrt{-2+2\sqrt{3}\,i}$.

d) Løs likningen $z^2+1-\sqrt{3}\,i=0$.

e) Et komplekst tall z er gitt ved $z=1+\sqrt{3}\,i$.
Skriv z på formen $z=R\cdot e^{i\theta}$, og bruk resultatet til å beregne
I) z^{-3}.
II) $\sqrt{z}$.

f) Finn $\left(i-\sqrt{3}\right)^9$.

g) I) Finn $(1+i)^3$ og $\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{10}$.
II) Finn z av likningen $z^3=-2+2i$.

h) Skriv $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)^{2-i}$ på formen $z=a+ib$.

Oppgave 5

I alle oppgavene nedenfor skal svarene skrives på formen $z=a+ib$ der $i=\sqrt{-1}$ er den imaginære enheten.

a) Finn $(3+i)^2$, og bruk resultatet til å løse likningen
$$z^2+(1-3i)z-4-3i=0 .$$

b) Trekk sammen $(3-2i)^2$, og bruk resultatet til å løse likningen
$$z^2+(1-4i)z-5+i=0 .$$

c) Regn ut $(1+3i)^2$, og bruk resultatet til å løse likningen
$$z^2-(1-i)z+2(1-i)=0 .$$

d) Vis ved å trekke kvadratrota at
$$\sqrt{15+8i}=\pm(4+i) ,$$
og bruk resultatet til å løse likningen
$$z^2+(2-3i)z-5(1+i)=0 .$$

e) Løs likningen
$$z^2-(3-i)z+(2-i)=0 .$$

Oppgave 6

I oppgave a, b og c nedenfor er z et komplekst tall mens $\overline{z}$ er det kompleks konjugerte tallet.

a) Løs likningen

$$z^2 = \overline{z}\ .$$

b) Løs likningen

$$z^2 = 2\overline{z}\ .$$

Merk av hvor løsningene ligger i det komplekse planet.

c) Hvor i det komplekse planet finner du de tallene z som er slik at

$$\overline{z} = \frac{4}{z}\ ?$$

d) Løs likningssystemet

$$z_1 + z_2 = i$$
$$z_1 \cdot z_2 = 2$$

Oppgave 7

Vinkelen θ ligger i 1. kvadrant, og er slik at

$$\cos\theta = \frac{5}{13}.$$

Bruk bl.a. identiteten

$$\cos(2v) = 2\cos^2 v - 1$$

til å vise at da er

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Bruk bl.a. dette resultatet til å finne

$$\sqrt{5+12i}\ .$$

8.2. Løsninger på blandede oppgaver.

Oppgave 1

a)
$$\sqrt{3}\sin(2x) + \cos(2x) = 1$$
$$\sqrt{3}(2\sin x\cos x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$
$$2\sqrt{3}\sin x\cos x - 2\sin^2 x = 0$$
$$\sin x\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right) = 0$$

Her er enten

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = 0 \vee x = \pi}$$

eller

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{4}{3}\pi}$$

Likningen har altså de fire løsningene

$$\underline{\underline{x = 0,\ x = \tfrac{1}{3}\pi,\ x = \pi,\ x = \tfrac{4}{3}\pi}}\ .$$

b) $\sin(2x) = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x(2\cos x - 1) = 0$.

Her er enten

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{0} \quad \vee \quad x = \underline{\pi}\,,$$

eller

$$2\cos x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\tfrac{1}{3}\pi} \quad \vee \quad x = 2\pi - \tfrac{\pi}{3} = \underline{\tfrac{5}{3}\pi}\ .$$

Løsningsmengden er altså

$$\underline{\underline{\left\{0, \tfrac{1}{3}\pi, \pi, \tfrac{5}{3}\pi\right\}}}\ .$$

Oppgave 2

a) $e^{2x-1} = 2e^{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(e^{2x-1}\right) = \ln\left(2e^{x+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = \ln 2 + (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{2 + \ln 2}}$

b) $(\ln x)^2 - \ln\left(x^2\right) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

$$\ln x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \underline{3} \\ \underline{-1} \end{cases}$$

$$x = \underline{\underline{e^3}} \quad \vee \quad x = \underline{\underline{e^{-1}}}$$

c) $\ln(2x-3) + \ln(x+2) = 2\ln x \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left((2x-3)(x+2)\right) = \ln\left(x^2\right)$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + x - 6 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Løsningen $x = -3$ kan ikke brukes, fordi vi da får logaritmen til et negativt tall i den opprinnelige likningen. Den eneste brukbare løsningen er derfor $x = \underline{\underline{2}}$.

Oppgave 3

aI) $z = \dfrac{8+i}{3+2i} = \dfrac{(8+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{24 - 16i + 3i - 2i^2}{\left(9 - 4i^2\right)} = \dfrac{26 - 13i}{13} = \underline{\underline{2 - i}}$.

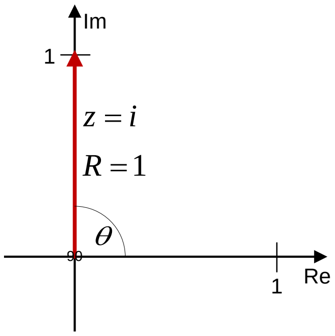
aII) $z = \dfrac{2-3i}{i-1} = \dfrac{(2-3i)(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \dfrac{2i + 2 - 3i^2 - 3i}{i^2 - 1} = \dfrac{5-i}{-2} = \underline{\underline{-\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}}}i$.

b) $\dfrac{2}{3z+1} = \dfrac{i}{2z+9} \quad \Leftrightarrow \quad 4z + 18 = 3z \cdot i + i \quad \Leftrightarrow \quad (4-3i)z = -18 + i$

$$z = \frac{-18+i}{4-3i} = \frac{(-18+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{-72 - 54i + 4i + 3i^2}{25} = \frac{-75 - 50i}{25} = \underline{\underline{-3 - 2i}}\ .$$

Oppgave 4

a)



Ser av figuren at modulus $R=1$ og argumentvinkel $\theta=\frac{1}{2}\pi$. Siden vi kan øke θ med $n\cdot 2\pi$, blir

$$i = 1\cdot e^{\left(\frac{1}{2}\pi+n\cdot 2\pi\right)i} \quad \text{der } n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

slik at

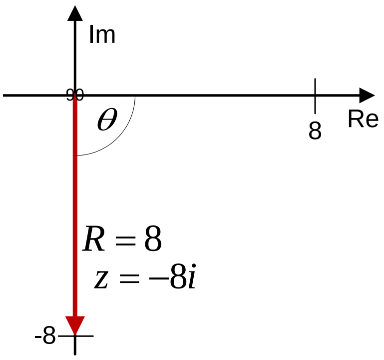
$$\sqrt[3]{i} = \left(e^{\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi i}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}n\right)\pi i}.$$

$$n=0:\ \sqrt[3]{i} = e^{\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot 0\right)\pi i} = e^{\frac{1}{6}\pi i} = \cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right)+i\cdot\sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}i}}.$$

$$n=1:\ \sqrt[3]{i} = e^{\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot 1\right)\pi i} = e^{\frac{2}{3}\pi i} = \cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)+i\cdot\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i}}.$$

$$n=2:\ \sqrt[3]{i} = e^{\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot 2\right)\pi i} = e^{\frac{3}{2}\pi i} = \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)+i\cdot\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = \underline{\underline{-i}}.$$

b)



Ser av figuren at modulus $R=8$ og argumentvinkel $\theta=-\frac{1}{2}\pi$. Siden vi kan øke θ med $n\cdot 2\pi$, blir

$$i = 1\cdot e^{\left(-\frac{1}{2}\pi+n\cdot 2\pi\right)i} \quad \text{der } n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

slik at

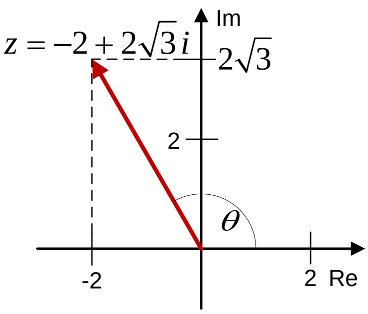
$$\sqrt[3]{-8i} = \left(8e^{\left(-\frac{1}{2}+2n\right)\pi i}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\left(-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}n\right)\pi i}$$
$$= 2e^{\left(-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}n\right)\pi i}$$

$$n=0:\ \sqrt[3]{-8i} = 2e^{\left(-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot 0\right)\pi i} = 2e^{-\frac{1}{6}\pi i} = 2\left(\cos\left(-\tfrac{1}{6}\pi\right)+i\cdot\sin\left(-\tfrac{1}{6}\pi\right)\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}i}}.$$

$$n=1:\ \sqrt[3]{-8i} = 2e^{\left(-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot 1\right)\pi i} = 2e^{\frac{1}{2}\pi i} = 2\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)+i\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)\right) = \underline{\underline{2i}}.$$

$$n=2:\ \sqrt[3]{-8i} = 2e^{\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot 2\right)\pi i} = 2e^{\frac{7}{6}\pi i} = 2\left(\cos\left(\tfrac{7}{6}\pi\right)+i\cdot\sin\left(\tfrac{7}{6}\pi\right)\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}i}}.$$

c)



Ser av figuren at modulus

$$R = \sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

og argumentvinkelen θ er gitt ved

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad \theta = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Siden vi kan øke θ med $n\cdot 2\pi$, blir

$$z = -2+2\sqrt{3}\,i = 4\cdot e^{\left(\frac{2}{3}\pi+n\cdot 2\pi\right)i} = 4e^{\left(\frac{1}{3}+n\right)\cdot 2\pi i},\ n=0,1.$$

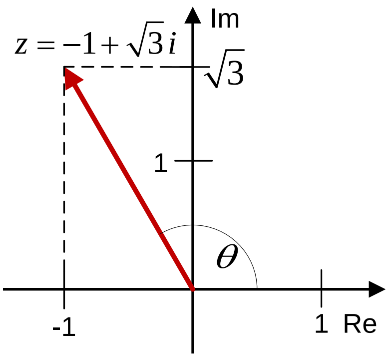
Da blir

$$\sqrt{z} = \left(4e^{\left(\frac{1}{3}+n\right)\cdot 2\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} = 2e^{\left(\frac{1}{3}+0\right)\pi i} = 2e^{\frac{1}{3}\pi i} = 2\left(\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\right) = 2\left(\tfrac{1}{2}+i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{1+i\sqrt{3}}}$$

eller

$$\sqrt{z} = \left(4e^{\left(\frac{1}{3}+n\right)\cdot 2\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} = 2e^{\left(\frac{1}{3}+1\right)\pi i} = 2\left(\cos\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)\right) = 2\left(-\tfrac{1}{2}+i\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right) = \underline{\underline{-1-i\sqrt{3}}}.$$

d)



$$z^2+1-\sqrt{3}\,i=0$$

$$z^2=-1+\sqrt{3}\,i=2e^{\left(\frac{2}{3}\pi+n\cdot 2\pi\right)i}=2e^{\left(\frac{1}{3}+n\right)\cdot 2\pi i}$$

Mellomregninger:

$$R=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2,$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}\quad\Leftrightarrow\quad\theta=\tfrac{2}{3}\pi\,.$$

Siden vi kan gi θ tillegg på $n\cdot 2\pi$, blir:

$$\sqrt{z}=\left(2e^{\left(\frac{1}{3}+n\right)\cdot 2\pi i}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}e^{\left(\frac{1}{3}+0\right)\pi i}=\sqrt{2}e^{\frac{1}{3}\pi i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\right)=\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}+i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

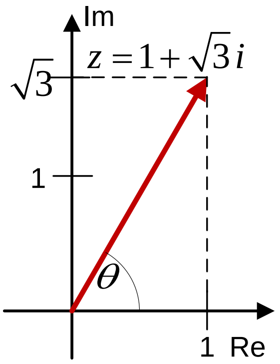
$$=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)}}$$

eller

$$\sqrt{z}=\left(2e^{\left(\frac{1}{3}+n\right)\cdot 2\pi i}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}e^{\left(\frac{1}{3}+1\right)\pi i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{2}+i\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right)$$

$$=\underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)}}$$

e)



$$z=1+\sqrt{3}\,i=2e^{\left(\frac{1}{3}\pi+n\cdot 2\pi\right)i}=2e^{\left(\frac{1}{3}+2n\right)\pi i}\,.$$

Mellomregninger:

$$R=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2,$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\quad\Leftrightarrow\quad\theta=\tfrac{1}{3}\pi\,.$$

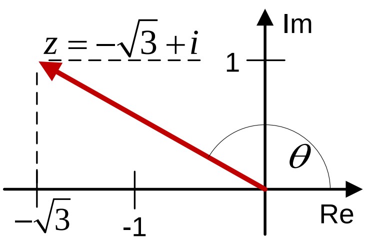
Da blir

$$z^{-3}=\left(2e^{\left(\frac{1}{3}+2n\right)\pi i}\right)^{-3}=2^{-3}\left(e^{\left(\frac{1}{3}+2n\right)\pi i}\right)^{-3}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^3e^{(-1-6n)\pi i}=\tfrac{1}{8}e^{-\pi i}$$

$$=\tfrac{1}{8}\left(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right)=\tfrac{1}{8}(-1+0i)=\underline{\underline{-\tfrac{1}{8}}}$$

$$\sqrt{z}=\left(2e^{\left(\frac{1}{3}+2n\right)\pi i}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}e^{\left(\frac{1}{6}+n\right)\pi i}=\begin{cases}\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i\right)=\underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+i\right)}}\\ \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i\right)=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+i\right)}}\end{cases}$$

f)



$$\left(i-\sqrt{3}\right)^9=\left(-\sqrt{3}+i\right)^9=\left(2e^{\frac{5}{6}\pi i}\right)^9=2^9\cdot e^{\frac{45}{6}\pi i}\,.$$

Mellomregninger:

$$R=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2,$$

$$\tan\theta=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\quad\Leftrightarrow\quad\theta=\tfrac{5}{6}\pi\,.$$

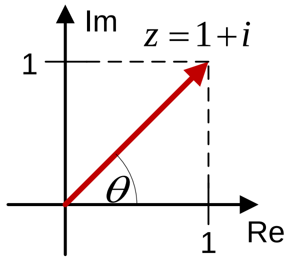
Siden vi kan legge til eller trekke fra $n\cdot 2\pi$ på argumentvinkelen θ, er

$$e^{\frac{45}{6}\pi i}=e^{\left(\frac{45}{6}\pi-6\pi\right)i}=e^{\frac{3}{2}\pi i}=\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)=0+i\cdot(-1)=-i\,.$$

Dermed blir

$$\left(i-\sqrt{3}\right)^9=2^9\cdot e^{\frac{45}{6}\pi i}=\underline{\underline{-512i}}\,.$$

gI)

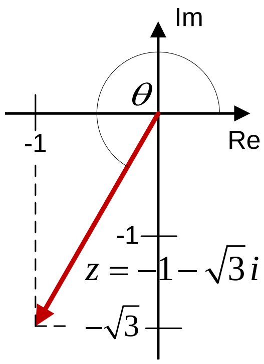


Vi ser av figuren at

$$1+i=\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}.$$

Da blir

$$(1+i)^3=\left(\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}\right)^3=\sqrt{2}^3e^{\frac{3}{4}\pi i}$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)=\underline{\underline{-2+2i}}$$



Vi ser av figuren at

$$-1-\sqrt{3}i=2e^{\frac{4}{3}\pi i}$$

fordi

$$R=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$$

og

$$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}\quad\Leftrightarrow\quad\theta=\tfrac{1}{3}\pi+\pi=\tfrac{4}{3}\pi\,.$$

Da blir

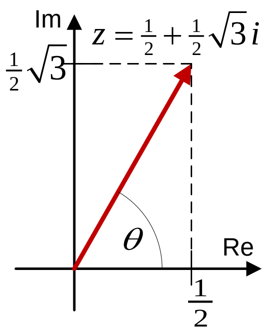
$$\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)^{10}=\left(2e^{\frac{4}{3}\pi i}\right)^{10}=2^{10}\cdot e^{\frac{40}{3}\pi i}=2^{10}\cdot e^{\left(\frac{40}{3}-12\right)\pi i}=2^{10}\cdot e^{\frac{4}{3}\pi i}$$
$$=2^{10}\left(\cos\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)\right)=2^{10}\left(-\tfrac{1}{2}-i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\underline{\underline{-2^9\left(1+\sqrt{3}\,i\right)}}$$

gII) $\quad z^3=-2+2i=(1+i)^3\quad\Leftrightarrow\quad z=\sqrt[3]{-2+2i}=\underline{\underline{1+i}}$

der jeg har benyttet resultatet fra del I av oppgaven. Vet også at det er to løsninger til, som har samme modulus som den løsningen jeg har funnet, men der argumentvinkelen øker med $\frac{1}{3}\cdot 2\pi=\frac{2}{3}\pi$ for hver løsning. Jeg finner også disse løsningene ved å benytte resultater fra del I av oppgaven, og benytte en spesiell faktorisering for å slippe å benytte $\theta=\frac{11}{12}\pi$:

$$z_1=1+i=\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}.$$
$$z_2=\sqrt{2}e^{\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{2}{3}\pi\right)i}=\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}\cdot e^{\frac{2}{3}\pi i}=(1+i)\left(\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right)=(1+i)\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)$$
$$=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i-\tfrac{1}{2}i+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i^2=\underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)i}}$$
$$z_3=\sqrt{2}e^{\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{4}{3}\pi\right)i}=\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}\cdot e^{\frac{4}{3}\pi i}=(1+i)\left(\cos\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)\right)=(1+i)\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)$$
$$=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i-\tfrac{1}{2}i-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i^2=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)i}}$$

h)



Vi ser av figuren at

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}i=e^{\frac{1}{3}\pi i}$$

fordi

$$R=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}}=1$$

og

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\quad\Leftrightarrow\quad\theta=\tfrac{1}{3}\pi\,.$$

Da blir

$$\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)^{2-i}=\left(e^{\frac{1}{3}\pi i}\right)^{2-i}=e^{\frac{1}{3}(2-i)\pi i}=e^{\frac{2}{3}\pi i+\frac{1}{3}\pi}=e^{\frac{1}{3}\pi}\left(\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right)$$
$$=e^{\frac{1}{3}\pi}\left(-\tfrac{1}{2}+i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{3}\pi}\left(-1+i\sqrt{3}\right)}}$$

Oppgave 5

a) $(3+i)^2=9+6j+i^2=\underline{\underline{8+6i}}$.

$$z^2+(1-3i)z-4-3i=0$$

$$z=\frac{-(1-3i)\pm\sqrt{(1-3i)^2-4(-4-3i)}}{2}=\frac{3i-1\pm\sqrt{1-6i-9+16+12i}}{2}$$

$$=\frac{3i-1\pm\sqrt{8+6i}}{2}=\frac{3i-1\pm(3+i)}{2}=\begin{cases}\dfrac{2+4i}{2}=\underline{\underline{1+2i}}\\[2ex]\dfrac{-4+2i}{2}=\underline{\underline{-2+i}}\end{cases}$$

b) $(3-2i)^2=9-12i+4i^2=\underline{\underline{5-12i}}$.

$$z^2+(1-4i)z-5+i=0$$

$$z=\frac{-(1-4i)\pm\sqrt{(1-4i)^2-4\cdot(-5+i)}}{2}=\frac{-1+4i\pm\sqrt{1-8i+16i^2+20-4i}}{2}$$

$$=\frac{-1+4i\pm\sqrt{5-12i}}{2}=\frac{-1+4i\pm(3-2i)}{2}=\begin{cases}\underline{\underline{1+i}}\\ \underline{\underline{-2+3i}}\end{cases}$$

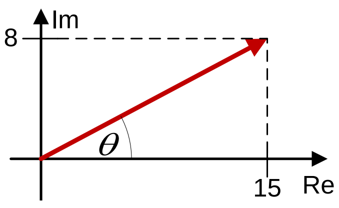
c) $(1+3i)^2=1+6i+9i^2=\underline{\underline{6i-8}}$.

$$z^2-(1-i)z+2(1-i)=0$$

$$z=\frac{1-i\pm\sqrt{(1-i)^2-8(1-i)}}{2}=\frac{1-i\pm\sqrt{1-2i+i^2-8+8i}}{2}=\frac{1-i\pm\sqrt{6i-8}}{2}$$

$$=\frac{1-i\pm(1+3i)}{2}=\begin{cases}\dfrac{1-i+1+3i}{2}=\dfrac{2+2i}{2}=\underline{\underline{1+i}}\\[2ex]\dfrac{1-i-1-3i}{2}=\dfrac{-4i}{2}=\underline{\underline{-2i}}\end{cases}$$

d)



$$z=15+8i=R\cdot e^{i\theta}.$$

Ser av figuren at

$$R=\sqrt{15^2+8^2}=17.$$

Da blir

$$\cos\theta=\tfrac{15}{17}.$$

$$\sqrt{15+8i}=\left(R\cdot e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{R}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)+i\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)\right).$$

Benytter nå at

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{32}{17}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}},$$

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{15}{17}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{2}{17}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Ser av figuren at både $\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)$ og $\cos\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)$ må være positive. Da blir

$$\sqrt{15+8i} = \sqrt{17}\left(\frac{4}{\sqrt{17}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \underline{\underline{4+i}}.$$

Ved å gi θ et tillegg på 2π, får vi også løsningen

$$\sqrt{15+8i} = \underline{\underline{-4-i}}.$$

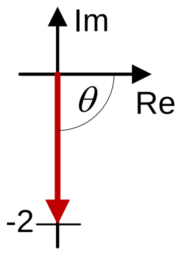
$$z^2 + (2-3i)z - 5(1+i) = 0$$

$$z = \frac{-(2-3i) \pm \sqrt{(2-3i)^2 + 4\cdot 5(1+i)}}{2} = \frac{-2+3i \pm \sqrt{4-12i-9+20+20i}}{2}$$

$$= \frac{-2+3i \pm \sqrt{15+8i}}{2} = \frac{-2+3i \pm (4+i)}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{1+2i}} \\ \underline{\underline{-3+i}} \end{cases}$$

e) $$z^2 - (3-i)z + (2-i) = 0$$

$$z = \frac{3-i \pm \sqrt{(3-i)^2 - 4(2-i)}}{2} = \frac{3-i \pm \sqrt{9-6i-1-8+4i}}{2} = \frac{3-i \pm \sqrt{-2i}}{2}.$$



Figuren viser at

$$-2i = 2e^{-\frac{1}{2}\pi i}$$

slik at

$$\sqrt{-2i} = \pm\left(2e^{-\frac{1}{2}\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\pi i} = \pm\sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right)\right)$$

$$= \pm\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right) = \underline{\pm(1-j)}$$

Da blir

$$z = \frac{3-i \pm (1-i)}{2} = \begin{cases} \dfrac{3-i+1-i}{2} = \underline{\underline{2-i}} \\ \dfrac{3-i-1+i}{2} = \underline{\underline{1}} \end{cases}$$

Oppgave 6

a) Skriver z på formen

$$z = R\cdot e^{i\theta}.$$

Da er

$$\overline{z} = R\cdot e^{-i\theta},$$

slik at når $z^2 = \overline{z}$ får vi

$$\left(R\cdot e^{i\theta}\right)^2 = R\cdot e^{-i\theta} \quad\Leftrightarrow\quad R^2\cdot e^{i\cdot 2\theta} = R\cdot e^{-i\theta}.$$

Likningen er oppfylt når både amplityder og fasevinkler er like på begge sider, d.v.s. når

$$R^2 = R \quad \Leftrightarrow \quad \underline{R = 0 \quad \vee \quad R = 1}$$

samtidig som

$$2\theta = -\theta + n\cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad 3\theta = n\cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \underline{n\cdot \tfrac{2}{3}\pi}\,.$$

Dette gir løsningene

$$z_1 = \underline{\underline{0}}\,,$$

$$z_2 = e^{\frac{2}{3}\pi i} = \cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}}\,,$$

$$z_3 = e^{2\cdot\frac{2}{3}\pi i} = \cos\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2} - i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}}\,,$$

$$z_4 = e^{3\cdot\frac{2}{3}\pi i} = e^{2\pi i} = \underline{\underline{1}}.$$

Alternativ: Setter

$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = x - iy$$

slik at likningen blir

$$z^2 = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad (x + iy)^2 = x - iy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2xy\cdot i - y^2 = x - iy\,.$$

Nå skal realdelene være like og imaginærdelene være like på begge sider av likhetstegnet. Da får vi likningssystemet

$$x^2 - y^2 = x$$

$$2xy = -y \quad \Leftrightarrow \quad 2xy + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(2x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y = 0} \quad \vee \quad \underline{x = -\tfrac{1}{2}}\,.$$

Setter disse to mulighetene inn i den øverste likningen:

$$y = 0: \qquad x^2 - 0^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = 0} \quad \vee \quad \underline{x = 1}\,.$$

$$x = -\tfrac{1}{2}: \quad \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = -\tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y = \underline{\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}\,.$$

Dette gir de samme løsningene som før.

b) Skriver

$$z = R\cdot e^{i\theta}\,.$$

Da blir

$$\overline{z} = R\cdot e^{i(-\theta)}\,,$$

slik at vi får

$$z^2 = 2\overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad \left(R\cdot e^{i\theta}\right)^2 = 2R\cdot e^{i(-\theta + n\cdot 2\pi)} \quad \Leftrightarrow \quad R^2 e^{i\cdot 2\theta} = 2R\cdot e^{i(-\theta+n\cdot 2\pi)}\,.$$

Dette gir

$$R^2 = 2R \quad \Leftrightarrow \quad R = 0 \quad \vee \quad R = 2\,.$$

Samtidig må vi ha

$$2\theta = -\theta + n\cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad 3\theta = n\cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \tfrac{1}{3}n\cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \begin{cases} 0 \\ \tfrac{2}{3}\pi \\ \tfrac{4}{3}\pi \end{cases}$$

Dette gir løsningene $z_1 = \underline{\underline{0}}$, $\qquad z_2 = \underline{\underline{2e^{0i}}} = \underline{\underline{2 + 0i}}$,

$$z_3 = \underline{\underline{2e^{\frac{2}{3}\pi i}}} = 2\left(\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right) = 2\left(-\tfrac{1}{2} + i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{-1 + \sqrt{3}i}}\,,$$

$$z_4 = \underline{\underline{2e^{\frac{4}{3}\pi i}}} = 2\left(\cos\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right)\right) = 2\left(-\tfrac{1}{2} + i\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right) = \underline{\underline{-1 - \sqrt{3}i}}\,.$$

Alternativ: Dersom vi skriver $z = x + iy$ blir $\overline{z} = x - iy$, slik at vi får

$$z^2 = 2\overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad (x+iy)^2 = 2(x-iy) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + i \cdot 2xy - y^2 = 2x - i \cdot 2y .$$

Dette gir

$$x^2 - y^2 = 2x$$

samtidig som

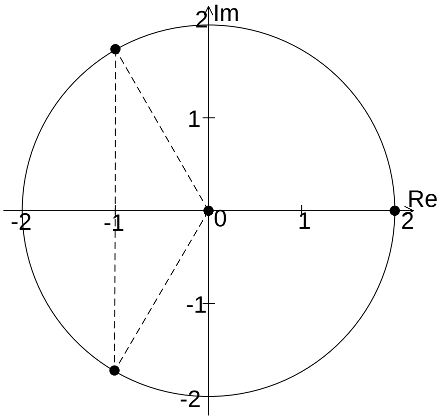
$$2xy = -2y \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad x = -1 .$$

Dersom $y = 0$, blir

$$x^2 - 0^2 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 2 .$$

Dersom $x = -1$, blir

$$1^2 - y^2 = 2 \cdot (-1) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{3} .$$



Dette gir løsningene

$$z_1 = \underline{\underline{0 + 0i}}, \qquad z_2 = \underline{\underline{2 + 0i}},$$

$$z_3 = \underline{\underline{-1 + \sqrt{3}i}}, \qquad z_4 = \underline{\underline{-1 - \sqrt{3}i}} .$$

c) Når $z = x + iy$, blir $\overline{z} = x - iy$. Da blir

$$\overline{z} = \frac{4}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} \cdot z = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x+iy)(x-iy) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 4 .$$

Dette er en sirkel i det komplekse plan med radius $R = \sqrt{4} = 2$.

Alternativ løsning: Når $z = R\mathrm{e}^{i\theta}$, er $\overline{z} = R\mathrm{e}^{-i\theta}$.

$$\overline{z} = \frac{4}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} \cdot z = 4 \quad \Leftrightarrow \quad R\mathrm{e}^{i\theta} \cdot Re^{-i\theta} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 e^0 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad R = 2$$

Alle komplekse tall som har modulus $R = 2$, uansett argumentvinkel, tilfredsstiller kravet.

d)

$$z_1 + z_2 = i \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = i - z_1$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z_1(i - z_1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad i \cdot z_1 - z_1^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z_1^2 - i \cdot z_1 + 2 = 0$$

$$z_1 = \frac{i \pm \sqrt{i^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{i \pm 3i}{2} = \begin{cases} \underline{2i} \\ \underline{-i} \end{cases}$$

Dette gir løsningene:

$$\underline{\underline{z_1 = 2i}} \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = i - z_1 = i - 2i = \underline{\underline{-i}} .$$

$$\underline{\underline{z_1 = -i}} \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = i - z_1 = i - (-i) = \underline{\underline{2i}} .$$

Oppgave 7

Setter $v = \frac{1}{2}\theta$. Da blir

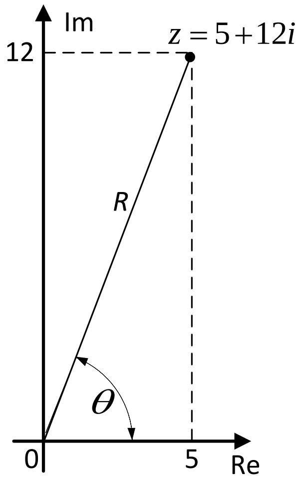
$$\cos\theta = 2\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{5}{13} = 2\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) = 1 + \tfrac{5}{13} = \tfrac{18}{13}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) = \tfrac{9}{13} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) = \underline{\underline{\tfrac{3}{\sqrt{13}}}}$$

Videre blir

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)}=\sqrt{1-\tfrac{9}{13}}=\sqrt{\tfrac{4}{13}}=\underline{\tfrac{2}{\sqrt{13}}}\,.$$

Fortegnene følger av at vinkelen ligger i 1. kvadrant.



Figuren til venstre viser det komplekse tallet

$$z=5+12i=R\cdot e^{i\theta}$$

der

$$R=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

og

$$\cos\theta=\tfrac{5}{13}\,.$$

Da blir

$$\begin{aligned}\sqrt{(5+12i)}&=\left(13e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{13}\cdot e^{i\cdot\frac{1}{2}\theta}\\&=\sqrt{13}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)+i\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)\right)\\&=\sqrt{13}\left(\tfrac{3}{\sqrt{13}}+i\cdot\tfrac{2}{\sqrt{13}}\right)=\underline{\underline{3+2i}}\end{aligned}$$

Dessuten har vi løsningen

$$\begin{aligned}\sqrt{(5+12i)}&=\left(13e^{i(\theta+2\pi)}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{13}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{1}{2}\theta+\pi\right)}=\sqrt{13}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}\theta+\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta+\pi\right)\right)\\&=\sqrt{13}\left(-\cos\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)+i\left(-\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)\right)\right)=\sqrt{13}\left(\tfrac{-3}{\sqrt{13}}+i\cdot\tfrac{-2}{\sqrt{13}}\right)=\underline{\underline{-3-2i}}\end{aligned}$$

9. Oppgaver i teksten.

Her finner du alle oppgavene som det er lenker til i teksten. Du finner løsningsforslag ved å klikke på oppgavenummeret.

9.1. Oppgaver.

Oppgave 1.1.1

Bestem størst mulig definisjonsmengde og tilhørende verdimengde for disse funksjonene:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Oppgave 1.3.1

For hver av funksjonene nedenfor skal du tegne graf, påvise at funksjonen har en invers funksjon, finne funksjonsuttrykket for den inverse funksjonen, og finne definisjons- og verdimengdene til den inverse funksjonen.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $D_f = [2, \rightarrow\rangle$.

b) $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x}$, $D_f = \langle 1, \rightarrow\rangle$.

Oppgave 1.4.1

Undersøk om funksjonene nedenfor er jamne, odde, eller ingen av delene.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x + 1}$.

c) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x}$.

d) $f(x) = (x^2 - 1)\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)$.

Oppgave 2.1.1

Tegn grafen til den rette linja:

a) $y = \frac{1}{2}x + 1$

b) $x + y = 2$

c) $x = 3$

d) $x + 2y - 4 = 0$

Oppgave 2.1.2

a) Hva blir likningene til den rette linja som:

1) Har stigningstall $k = 2$ og går gjennom punktet $(-1,3)$?

2) Går gjennom de to punktene $(-1,\,4)$ og $(2,\,-2)$?

b) Når et batteri leverer en strøm på 2.5 Ampere, er spenningen mellom batteripolene 12.2 Volt. Når batteriet leverer en strøm på 15.0 Ampere, er spenningen mellom batteripolene 11.7 Volt. Finn polspenningen *U* som funksjon av strømmen *I*.

Oppgave 2.2.1

For funksjonene nedenfor skal du finne asymptotene ved hjelp av en polynomdivisjon, og deretter tegne en skisse av grafen til funksjonen.

a) $f(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x-1}$

Oppgave 2.3.1

Skisser grafen til disse funksjonene:

a) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{når} \quad x<1 \\ (x-1)^2 & \text{når} \quad x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{når} \quad x<0 \\ 2-2x & \text{når} \quad 0 \leq x < 2 \\ -2 & \text{når} \quad x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 - x + 1 & \text{når} \quad x<0 \\ 1-x & \text{når} \quad 0 \leq x < 2 \\ -3+\dfrac{4}{x} & \text{når} \quad x \geq 2 \end{cases}$

Oppgave 2.3.2

Funksjonene nedenfor har størst mulig definisjonsmengde. Skriv funksjonene på intervallform, og tegn grafen.

a) $f(x) = x \cdot |x|$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x| + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{|1-x|}{x}$

Oppgave 3.1.1

a) Regn om fra grader til radianer:

15°, 75°, 165°, 51.9°.

b) Regn om fra radianer til grader:

$\frac{13}{12}\pi$, $\frac{7}{12}\pi$, 0.438, 2.57.

c) Fyll ut de rutene som mangler i tabellen nedenfor:

Grader	30		60	90	120			180	
Radianer	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$

Oppgave 3.5.1

Finn de vinklene v som tilfredsstiller disse kravene:

a) $\cos v = \frac{1}{2}$, $0 \le v < 2\pi$.

b) $\tan(2v) = 1$, $0 \le v < 2\pi$.

Oppgave 3.6.1

Løs likningene nedenfor, når grunnmengden er $[0, 2\pi\rangle$:

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

b) $\sin^2 x = 3\cos^2 x$

c) $\tan^2 x - \frac{2}{\sqrt{3}}\tan x = 1$

Oppgave 3.7.1

Finn eksakte uttrykk for $\sin(15^\circ)$, $\cos(15^\circ)$ og $\tan(15^\circ)$ ved å benytte at $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Oppgave 3.7.2

Vis at: $\sin(3v) = 3\sin v - 4\sin^3 v$

$$\cos(3v) = 4\cos^3 v - 3\cos v$$

$$\tan(3v) = \frac{3\tan v - \tan^3 v}{1 - 3\tan^2 v}$$

Oppgave 3.7.3

a) Bestem eksakte verdier for $\sin\left(\frac{v}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{v}{2}\right)$ og $\tan\left(\frac{v}{2}\right)$ når du vet at $\cos v = -\frac{1}{3}$ og $v \in [0, \pi]$.

b) Bestem eksakte verdier for $\sin\left(\frac{v}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{v}{2}\right)$ og $\tan\left(\frac{v}{2}\right)$ når du vet at $\tan v = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$ og $v \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

Oppgave 3.8.1

Skisser grafen til disse funksjonene:

a) $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $f(x) = \cos\left(\pi x - \frac{3}{4}\pi\right)$

c) $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Oppgave 3.8.2

Skriv disse funksjonene på formen

$f(x) = A\sin(k \cdot x + \varphi)$:

a) $f(x) = \sin x + \cos x$

b) $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$

c) $f(x) = -\sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x)$

Oppgave 3.9.1

Løs likningene nedenfor. I alle disse oppgavene skal du anta at $x \in [0, 2\pi\rangle$.

a) $\cos(2x) + \cos x = 0$

b) $2\sin(2x) + \sin^2 x + 3\cos^2 x = 0$

c) $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 1 - 2\sqrt{2}\sin x$

Oppgave 3.9.2

Løs disse ulikhetene når $x \in [0, 2\pi\rangle$:

a) $\sin^2 x < \frac{1}{2}$

b) $\sin(2x) > \sin x$

Oppgave 4.3.1

Finn x av disse likningene:

a) $2^x = 16$.

b) $3^x = \sqrt{27}$.

c) $4^x = 32$.

d) $32^x = 8$.

e) $9^x = 1$.

Oppgave 4.3.2

Finn x av disse likningene:

a) $2^{2x} + 2^x - 2 = 0$

b) $2^{2x} - \frac{5}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$

c) $9^x - 10 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$

Oppgave 4.3.3

Løs disse likningene:

a) $1.08^x = 1.50$.

b) $2^{2x-1} = 3^{x+1}$.

c) $5 \cdot 6^{x-2} = \left(3^x\right)^2$.

Oppgave 4.4.1

a) En bakteriekultur øker med 10% pr. time. Hvor lang tid trenger kulturen til å øke med 50%?

b) En annen bakteriekultur er økt med 60% i løpet av 2 timer. Hvor lang tid går det før kulturen er blitt tredoblet?

Oppgave 4.4.2

I et land bor det to folkegrupper, som vi skal kalle *A* og *B*.

I 1990 tilhørte 90% av befolkningen gruppe *A*, mens de siste 10% tilhørte gruppe *B*. Nå øker gruppe *A* med 0.5% pr. år, mens gruppe *B* øker med 2% pr. år.

I hvilket år vil de to gruppene være like store hvis den prosentvise veksten holdes konstant, og hvor stort er landets folketall da blitt i forhold til folketallet i 1990?

Oppgave 4.4.3

En funksjon er gitt ved

$$y = f(t) = A \cdot e^{-k \cdot t} \text{ der } k > 0.$$

a) Vis at det tar en tid

$$T = \frac{\ln 2}{k}$$

før funksjonsverdien er blitt halvert.

b) Vis at funksjonen kan skrives

$$y = f(t) = A \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

der T er halveringstiden fra del a ovenfor.

Oppgave 4.4.4

Strålingsintensiteten fra et radioaktivt materiale er gitt ved formelen

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

der t er tiden som er gått fra et gitt start-tidspunkt, og T er halveringstiden for stoffet.

For karbon-isotopen ^{14}C er halveringstiden 5730 år. En arkeolog får målt ^{14}C -innholdet i et trestykke, og får oppgitt at strålingen fra denne isotopen er redusert til 71% av opprinnelig nivå. Hvor lang tid er det siden dette trestykket var en del av et levende tre?

Oppgave 4.6.1

Løs disse likningene:

a) $\ln x = \ln(2-x)$.

b) $\ln\sqrt{x} = 2$.

c) $\log_3(x^2+2) - \log_3 x = 1$.

d) $2\ln(x-1) = \ln x + \ln(2x - \frac{1}{2})$.

Oppgave 4.7.1

Vis at:

a) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cdot\cosh(y) + \sinh(x)\cdot\sinh(y)$

b) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cdot\cosh(y) + \cosh(x)\cdot\sinh(y)$

c)
$$\begin{aligned}\cosh(2x) &= \cosh^2(x) + \sinh^2(x)\\ &= 1 + 2\sinh^2(x)\\ &= 2\cosh^2(x) - 1\end{aligned}$$

d) $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cdot\cosh(x)$

Hint til a) og b): Ta utgangspunkt i høyre side av likhetene.

Oppgave 5.2.1

Bestem disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Oppgave 5.3.1

Bestem disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a-\sqrt{2x^2-a^2}}{x-a}$

Oppgave 5.4.1

Bestem grenseverdien:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right).$$

Oppgave 5.5.1

Bestem disse grenseverdiene

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^2+3x-2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+1}{-x^3+x-2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x^2-3x+1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^3+3x-2}$

Oppgave 5.5.2

Bestem disse grenseverdiene

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-x}\right)$

Oppgave 6.1.1

Undersøk om disse funksjonene er kontinuerlige for alle $x\in\mathbb{R}$, og tegn grafen til funksjonene:

a) $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{når} \quad x<0\\ e^x-1 & \text{når} \quad x\geq 0\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{når} \quad x<0\\ 1-\cos(\pi x) & \text{når} \quad 0\leq x<1\\ x+2 & \text{når} \quad x\geq 1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{når} \quad x<0\\ \tan x & \text{når} \quad 0\leq x<\pi\\ \sin x & \text{når} \quad x\geq \pi\end{cases}$

Oppgave 6.1.2

a) Finn (om mulig) en konstant *a* slik at funksjonen *f* blir kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{når} \quad x < 1 \\ a - x^2 & \text{når} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

b) Finn (om mulig) to konstanter *a* og *b* slik at funksjonen *f* blir kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{når} \quad x < 0 \\ ax^2 + b & \text{når} \quad 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x - 2 & \text{når} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Oppgave 6.2.1

Vis at funksjonen

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

må ha et nullpunkt mellom $x = 0$ og $x = 1$. Finn deretter en løsning av likningen

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0, \quad 0 < x < 1$$

med minst 2 desimalers nøyaktighet.

Oppgave 7.1.1

Hva blir *z** når:

a) $z = 3 - 2i$

b) $z = i - 2$

Oppgave 7.1.2

Vis at $(z^*)^* = z$.

Oppgave 7.2.1

Trekk sammen:

a) $2 - 4i + i(2i - 1)$

b) $(3i - 2)\cdot(1 - 4i)$

c) $(1 - 2i)^2 - (2 + i)$

d) $(2 - i)^2 \cdot (i + 1)$

e) $\dfrac{1 + i}{2 - 4i}$

f) $\dfrac{(i - 2)^2}{1 - 3i}$

Oppgave 7.2.2

Løs disse likningene:

a) $1+2i-z=(2z-1)(2+i)$

b) $\dfrac{i+2z-1}{2i+1}=\dfrac{2-z}{1-2i}$

c) $\dfrac{2z+3i}{1-2i}=\dfrac{z+2i-1}{3+4i}$

d) $2z^*-1+i=z+2i(z-2z^*)$

Oppgave 7.3.1

Tegn de komplekse tallene nedenfor inn i det komplekse planet, og skriv dem deretter på polar (trigonometrisk) form.

a) $z=\sqrt{3}-i$

b) $z=-2+2i$

c) $z=-1-\sqrt{3}\cdot i$

Oppgave 7.3.2

Skriv disse tallene på standardform:

a) $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $z=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$

Oppgave 7.4.1

Skriv disse tallene på eksponentiell form:

a) $z=1+i$

b) $z=\sqrt{3}-i$

c) $z=-2+2\sqrt{3}\,i$

d) $z=-1-\sqrt{3}\,i$

e) $z=-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{3}{2}i$

Oppgave 7.4.2

Avmerk tallene nedenfor i det komplekse planet, og skriv dem på standardform:

a) $z=2e^{\frac{3}{4}\pi i}$

b) $z=e^{-\frac{1}{3}\pi i}$

c) $z=e^{\frac{9}{4}\pi i}$

Oppgave 7.4.3

Vis (gjerne ved hjelp av figurer) at disse sammenhengene gjelder:

a) $i=e^{\frac{1}{2}\pi i}$

b) $-1 = e^{\pi i}$

c) $-i = e^{\frac{3}{2}\pi i}$

d) $e^{i\theta} = e^{i(\theta \pm n\cdot 2\pi)}$ der n er et helt tall.

Oppgave 7.4.4

Du har gitt de to komplekse tallene

$$z_1 = -i \qquad \text{og} \qquad z_2 = -\tfrac{1}{2} - i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

a) Skriv z_1 og z_2 på eksponentiell form.

b) Finn deretter:

1) $z_1 \cdot z_2$

2) $\dfrac{z_1}{z_2}$

3) $\dfrac{z_1}{{z_2}^2}$

Skriv svarene på standardform.

Oppgave 7.4.5

a) Vis (med utgangspunkt i $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$) at
$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$.

b) Vis at

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

og at

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Oppgave 7.4.6

Ta utgangspunkt i at

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

og utled Moivres formel:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Oppgave 7.4.7

Sett n = 2 i Moivres formel, og utled formlene for $\sin(2\theta)$ og $\cos(2\theta)$.

Oppgave 7.5.1

Trekk kvadratrota av disse komplekse tallene:

a) $z = 1 - \sqrt{3}\,i$

b) $z = 12 - 5i$

c) $z = -1 + i$
d) $z = -7 + 24i$

Oppgave 7.5.2

Løs disse andregradslikningene:

a) $z^2 + (1-i)z - i = 0$

b) $z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$

c) $z^2 - (2+4i)z - 6 = 0$

Oppgave 7.5.3

Finn:

a) $\sqrt[4]{-1}$

b) $\sqrt[3]{-i}$

c) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$

Oppgave 7.6.1

Hvorfor må en 3.gradslikning med reelle koeffisienter alltid ha minst *en* reell løsning? Kan den ha *to* reelle løsninger og en kompleks løsning?

9.2. Løsninger

Her er løsnigsforslagene til småoppgavene i teksten.

Oppgave 1.1.1.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$.

Vi kan ikke ha null i nevner, slik at $x^2 - 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \pm 2$. Mer formelt:

$$D_f = \underline{\underline{\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}}}.$$

Vi ser at når $x \to \pm 2$, vil nevneren gå mot null slik at hele brøken går mot $\pm\infty$. Vi ser også at når $x \to \pm\infty$, vil brøken gå mot null. Men brøken kan aldri bli nøyaktig lik null. Derfor er

$$V_f = \underline{\underline{\mathbb{R} \setminus \{0\}}}.$$

b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Vi må ha et ikke-negativt tall under rottegnet, slik at

$25 - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 25 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{-5 \leq x \leq 5}$. Mer formelt:

$$D_f = \underline{\underline{[-5, 5]}}.$$

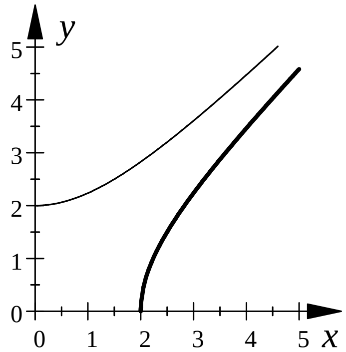
Vi ser at *f* har sin største verdi når $x = 0$. Da er $f(0) = \sqrt{25} = 5$. Videre har *f* sin minste verdi når $x = \pm 25$. Da er $f(\pm 5) = \sqrt{25 - (\pm 5)^2} = 0$. Derfor er

$$V_f = \underline{\underline{[0, 5]}}.$$

Oppgave 1.3.1

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $D_f = [\,2, \rightarrow\rangle$.

Vi ser av funksjonsuttrykket at jo større *x* blir, jo større blir $f(x)$. Altså er *f* strengt voksende og har derfor en invers funksjon.



Videre ser vi at

$$f(2) = \sqrt{2^2 - 4} = 0, \text{ slik at}$$

$$V_f = \underline{\underline{[0, \rightarrow\rangle}}.$$

Da vet vi at

$$D_{f^{-1}} = V_f = \underline{\underline{[0, \rightarrow\rangle}},$$

og at

$$V_{f^{-1}} = D_f = \underline{\underline{[\,2, \rightarrow\rangle}}.$$

For å finne funksjonsuttrykket for f^{-1}, setter vi

$$y = \sqrt{x^2 - 4} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = x^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\sqrt{y^2 + 4}}.$$

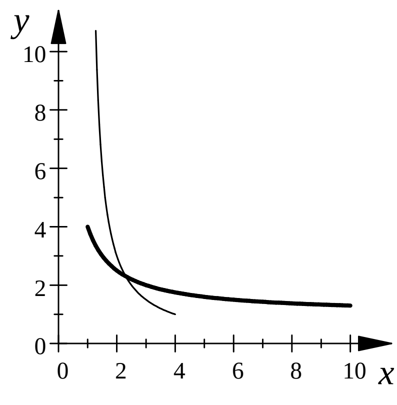
Ombytting av *x* og *y* gir

$$f^{-1}(x) = \underline{\underline{\sqrt{x^2 + 4}}}.$$

Grafen til *f* er tegnet med tykk strek, og grafen til f^{-1} er tegnet med tynn strek i figuren til høyre ovenfor.

b) $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x}$, $D_f = \langle 1, \rightarrow\rangle$.

Brøken $\dfrac{3}{x}$ har verdien 3 når $x = 1$ slik at $f(1) = 1 + 3 = 4$. Når *x* øker, vil brøken bli stadig mindre og gå mot null når $x \to \infty$, slik at $f(x) \to 1$ når $x \to \infty$. Derfor er *f* strengt avtakende, og har en invers funkjon.



Av resonnementet ser vi direkte at

$$V_f = D_{f^{-1}} = \underline{\underline{\langle 1, 4\rangle}},$$

og at

$$V_{f^{-1}} = D_f = \underline{\underline{\langle 1, \infty\rangle}}.$$

For å finne uttrykket for f^{-1}, setter vi

$$y = 1 + \frac{3}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x} = y - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = x(y-1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\frac{3}{y-1}}$$

Ombytting av *x* og *y* gir

$$y = f^{-1}(x) = \underline{\underline{\frac{3}{x-1}}}.$$

Grafen til *f* er tegnet med tykk strek, og grafen til f^{-1} er tegnet med tynn strek i figuren til høyre ovenfor.

Oppgave 1.4.1

a) $$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{2x^2 - 1}{x} = -f(x)$$ slik at *f* er odde.

b) $$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x+1}.$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 2(-x)}{(-x)+1} = \underline{\frac{-x^3 + 2x}{-x+1}}.$$

Vi ser at $f(-x) \neq f(x)$, og at $f(-x) \neq -f(x)$. Altså er *f* verken jamn eller odde.

c) $$f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x}.$$

$$f(-x) = 3(-x)^2 - \frac{2}{(-x)} = \underline{3x^2 + \frac{2}{x}}.$$

Vi ser at $f(-x) \neq f(x)$, og at $f(-x) \neq -f(x)$. Altså er *f* verken jamn eller odde.

d) $$f(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right).$$

$$f(-x) = \left((-x)^2 - 1\right)\left(2(-x) - \frac{1}{(-x)}\right) = \left(x^2 - 1\right)\left(-2x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^2 - 1\right)(-1)\left(2x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= -\left(x^2 - 1\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

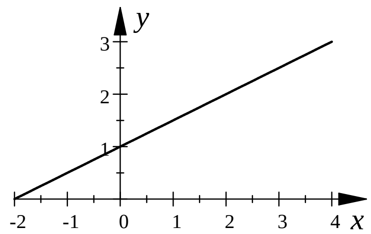
Altså er *f* odde.

Oppgave 2.1.1

a)

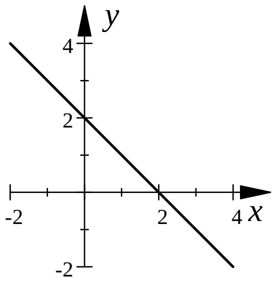
$$y = \tfrac{1}{2}x + 1.$$

Stigningstall $k = \frac{1}{2}$, skjæring med *y*-aksen i $y = 1$.



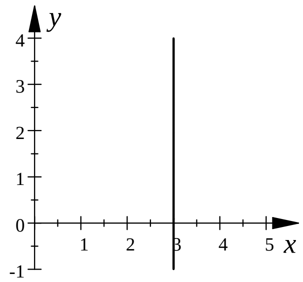
b) $x+y=2 \quad \Leftrightarrow \quad y=-x+2$.

Stigningstall $k=-1$, skjæring med *y*-aksen i $y=2$.



c) $x=3$.

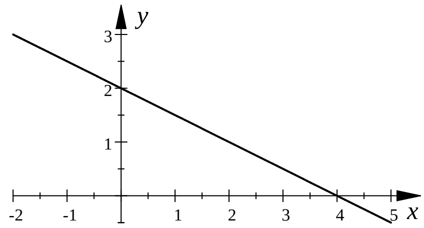
Rett linje vinkelrett på *x*-aksen med fast verdi $x=3$.



d)

$x+2y-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y=-x+4 \quad \Leftrightarrow \quad y=-\tfrac{1}{2}x+2$.

Stigningstall $k=-\tfrac{1}{2}$, skjæring med *y*-aksen i $y=2$.



Oppgave 2.1.2

a) 1) $y-3=2\big(x-(-1)\big) \quad \Leftrightarrow \quad y=2\big(x+1\big)+3=2x+2+3$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=2x+5}}$$

2) $$y-4=\frac{-2-4}{2-(-1)}\big(x-(-1)\big)=\frac{-6}{3}\big(x+1\big)=-2\big(x+1\big)=-2x-2$$

$$\Leftrightarrow \quad y=-2x-2+4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=-2x+2}}$$

b) $$U-U_1=\frac{U_2-U_1}{I_2-I_1}\big(I-I_1\big) \quad \Leftrightarrow \quad U-12.2=\frac{11.7-12.2}{15.0-2.5}\big(I-2.5\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad U-12.2=-0.04\big(I-2.5\big) \quad \Leftrightarrow \quad U=-0.04I+0.1+12.2$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{U=-0.04I+12.3}}$$

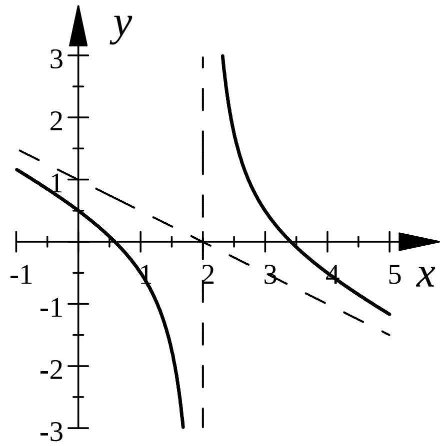
Oppgave 2.2.1

a) $$f\left(x\right)=\frac{-\tfrac{1}{2}x^2+2x-1}{x-2}.$$

$$\left(-\tfrac{1}{2}x^2+2x-1\right):\left(x-2\right)=-\tfrac{1}{2}x+1+\frac{1}{x-2}$$
$$\underline{-\left(-\tfrac{1}{2}x^2+x\right)}$$
$$x-1$$
$$\underline{-\left(x-2\right)}$$
$$1$$

Vi får skrå asymptote $y=\underline{\underline{-\tfrac{1}{2}x+1}}$,

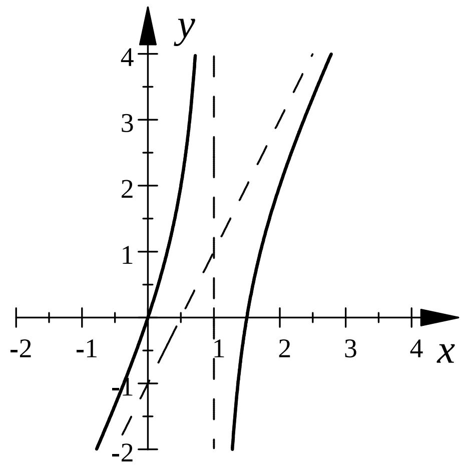
og vertikal asymptote $x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=2}}$.



b)
$$f\left(x\right)=\frac{2x^2-3x}{x-1}.$$
$$\left(2x^2-3x\right):\left(x-1\right)=2x-1-\frac{1}{x-1}$$
$$\underline{-\left(2x^2-2x\right)}$$
$$-x$$
$$\underline{-\left(-x+1\right)}$$
$$-1$$

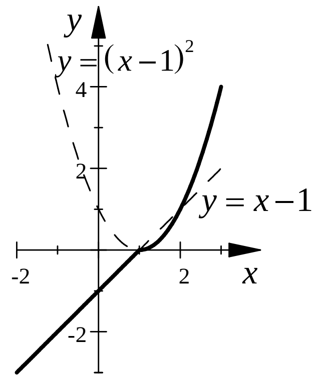
Vi får skrå asymptote $y=\underline{\underline{2x-1}}$,

og vertikal asymptote $x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1}}$.

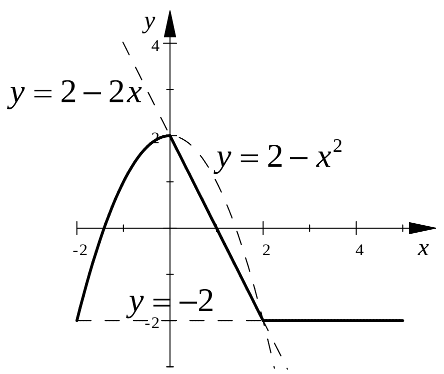


Oppgave 2.3.1

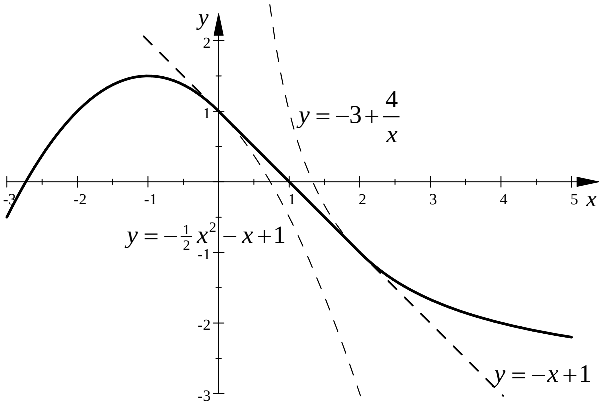
a)
$$f\left(x\right)=\begin{cases} x-1 & \text{når} \quad x<1 \\ \left(x-1\right)^2 & \text{når} \quad x\geq 1 \end{cases}$$



b)
$$f\left(x\right)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{når} \quad x<0 \\ 2-2x & \text{når} \quad 0\leq x<2 \\ -2 & \text{når} \quad x\geq 2 \end{cases}$$



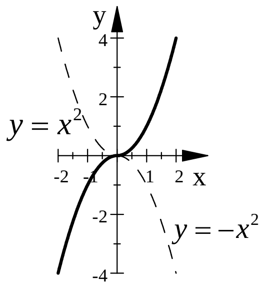
c) $$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2-x+1 & \text{når} \quad x<0 \\ 1-x & \text{når} \quad 0\le x< \\ -3+\dfrac{4}{x} & \text{når} \quad x\ge 2 \end{cases}$$



Oppgave 2.3.2

a) $$f(x)=x\cdot|x|=\begin{cases} x\cdot x=x^2 & \text{når} \quad x\ge 0 \\ x\cdot(-x)=-x^2 & \text{når} \quad x<0 \end{cases}$$

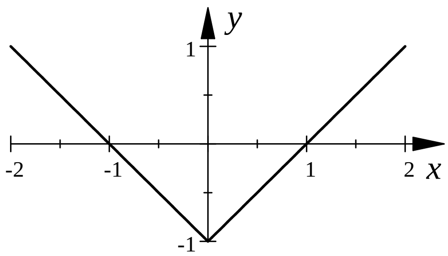
Grafen er tegnet med tykk strek på figuren til høyre.



b) Vi ser at siden $|x|$ aldri kan bli negativ, kan nevneren aldri bli lik null. Da har vi at

$$f(x)=\frac{x^2-1}{|x|+1}=\begin{cases} \dfrac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}}=x-1 & \text{når} \quad x\ge 0 \\ \dfrac{(x+1)(x-1)}{-x+1}=\dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{-\cancel{(x-1)}}=-x-1 & \text{når} \quad x<0 \end{cases}$$

Grafen blir slik:



c) Funksjonen er ikke definert når $x=0$. Videre ser vi at

$|1-x|=1-x$ når $1-x\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\le 1$, d.v.s. når $x\in\langle\leftarrow,0\rangle\cup\langle 0,1]$.

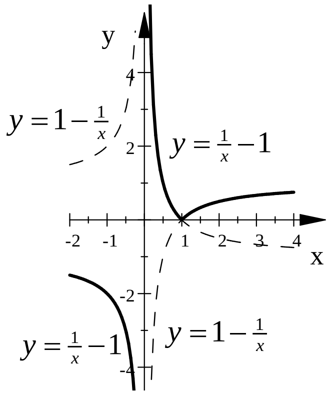
Vi ser også at

$|1-x|=-(1-x)=x-1$ når $1-x<0 \quad \Leftrightarrow \quad x>1$.

Vi summerer opp:

$$f(x)=\frac{|1-x|}{x}=\begin{cases} \dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x}=\dfrac{1}{x}-1 & \text{når} \quad x\in\langle\leftarrow,0\rangle\cup\langle 0,1] \\ \dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x}{x}-\dfrac{1}{x}=1-\dfrac{1}{x} & \text{når} \quad x>1 \end{cases}$$

Grafen er tegnet med tykk strek på figuren til høyre.



Oppgave 3.1.1

a) Fra grader til radianer:

$$\frac{g}{180} = \frac{v}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{g}{180} \cdot \pi \, .$$

Setter inn:

$$g = 15^\circ \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{15}{180} \cdot \pi = \underline{\underline{\frac{1}{12}}} \pi \, .$$

$$g = 75^\circ \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{75}{180} \cdot \pi = \frac{5}{12} \pi \, .$$

$$g = 165^\circ \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{165}{180} \cdot \pi = \frac{11}{12} \pi \, .$$

$$g = 51.9^\circ \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{51.9}{180} \cdot \pi \approx 0.906 \, .$$

b) Fra radianer til grader:

$$\frac{g}{180} = \frac{v}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{180}{\pi} \cdot v \, .$$

Setter inn:

$$v = \frac{13}{12}\pi \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{13}{12}\pi = 195^\circ \, .$$

$$v = \frac{7}{12}\pi \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{7}{12}\pi = 105^\circ \, .$$

$$v = 0.438 \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{180}{\pi} \cdot 0.438 \approx 25.1^\circ \, .$$

$$v = 2.57 \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{180}{\pi} \cdot 2.57 \approx 147.3^\circ \, .$$

c) Bruker samme metode som ovenfor (dropper detaljer). Resultatet blir:

Grader	30	45	60	90	120	135	150	180	270
Radianer	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

Oppgave 3.5.1

a) Vi vet at $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ fordi $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. Altså har vi en løsning $v=\underline{\frac{\pi}{3}}$.

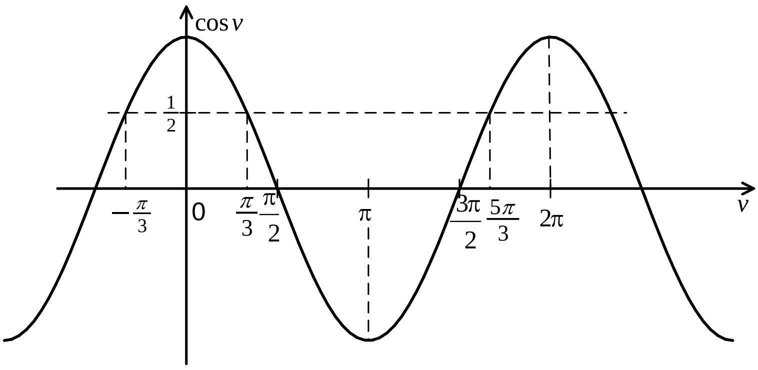
Men vi vet også at $\cos(-v)=\cos v$, slik at $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

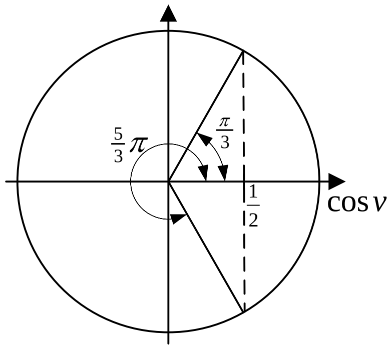
Men $-\frac{\pi}{3}$ ligger utenfor området $0\le v<2\pi$. Vi legger derfor til 2π, og får løsningen

$$v=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\underline{\frac{5}{3}\pi}.$$

Løsningsmengden blir da $\underline{\underline{\left(\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi\right)}}$.

Dette er illustrert nedenfor:





b) Her må vi være oppmerksomme på at når $v\in\left[0,2\pi\right\rangle$, må $2v\in\left[0,4\pi\right\rangle$. Videre vet vi at når $\tan(2v)=1$, er

$$2v=\frac{\pi}{4}\quad\Leftrightarrow\quad v=\underline{\frac{\pi}{8}}.$$

Videre vet vi at tangens-funksjonen er periodisk med periode π. Da får vi disse løsningene:

$$2v=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5}{4}\pi\quad\Leftrightarrow\quad v=\underline{\frac{5}{8}\pi}.$$

$$2v=\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{9}{4}\pi\quad\Leftrightarrow\quad v=\underline{\frac{9}{8}\pi}.$$

$$2v=\frac{\pi}{4}+3\pi=\frac{13}{4}\pi\quad\Leftrightarrow\quad v=\underline{\frac{13}{8}\pi}.$$

Løsningsmengden blir da $\underline{\underline{\left(\frac{\pi}{8},\frac{5}{8}\pi,\frac{9}{8}\pi,\frac{13}{8}\pi\right)}}$.

Oppgave 3.6.1

a) $$\sin^2 x=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad \sin x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\underline{\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}}.$$

Vi vet at når $x=\frac{\pi}{4}$ er $\sin x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Altså har vi en løsning $x=\underline{\frac{\pi}{4}}$.

Men vi vet også at $\sin(\pi-v)=\sin v$, slik at vi også har en løsning

$$x=\pi-\frac{\pi}{4}=\underline{\frac{3}{4}\pi}.$$

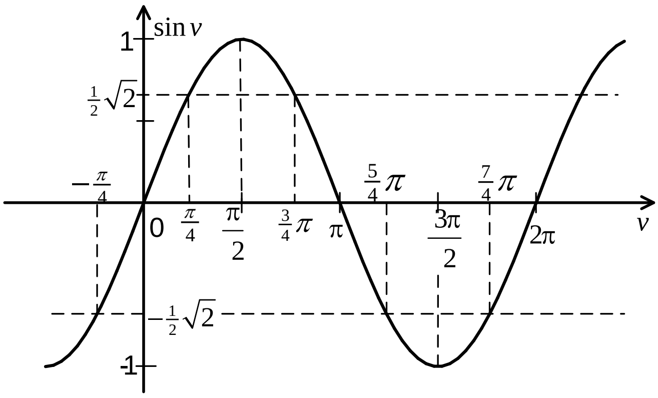
Vi vet også at $\sin(-v)=-\sin v$, slik at når $\sin x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ er $x=-\frac{\pi}{4}$. Men denne løsningen ligger utenfor området $\left[0,2\pi\right\rangle$. Vi får isteden disse to løsningene innenfor området:

$$x=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\underline{\frac{5}{4}\pi}\ \text{ fordi }\ \sin(\pi-v)=\sin v.$$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \underline{\frac{7}{4}\pi}$ fordi sinus-funksjonen er periodisk med periode 2π .

Løsningsmengden blir da $\underline{\underline{\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\right)}}$.

Løsningen er illustrert nedenfor.



b) $\sin^2 x = 3\cos^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \tan^2 x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \underline{\pm\sqrt{3}}$.

Vi vet at når $x = \frac{\pi}{3}$, er $\tan x = \sqrt{3}$. Altså har vi en løsning $x = \underline{\frac{\pi}{3}}$.

Vi vet også at tangens-funksjonen er periodisk med periode π , slik at vi også har en løsning

$x = \frac{\pi}{3} + \pi = \underline{\frac{4}{3}\pi}$.

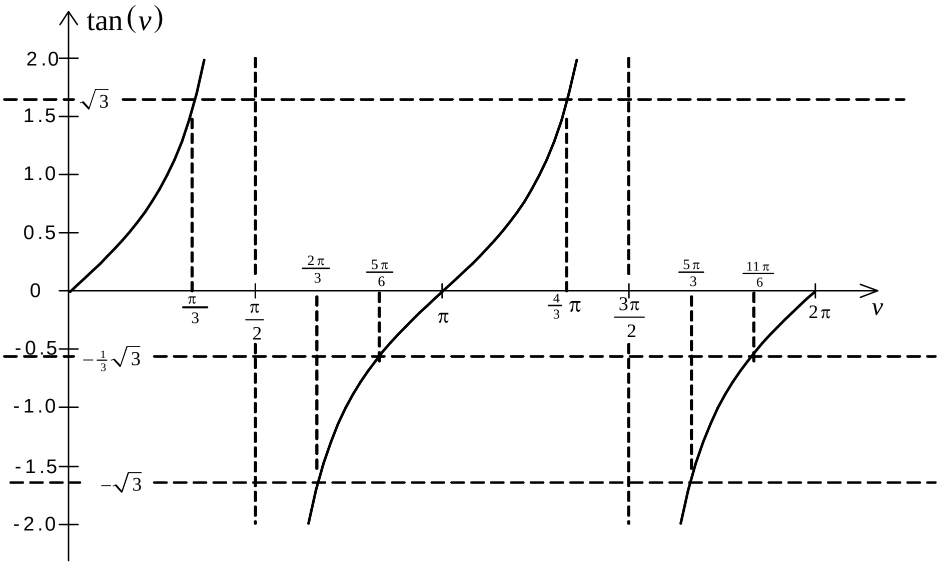
Vi vet også at $\tan(-v) = -\tan v$, slik at når $\tan x = -\sqrt{3}$ er $x = -\frac{\pi}{3}$. Men denne løsningen ligger utenfor området $\left[0,\ 2\pi\right\rangle$. Vi får isteden disse to løsningene innenfor området:

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi = \underline{\frac{2}{3}\pi}$ fordi tangens-funksjonen er periodisk med periode π .

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\cdot\pi = \underline{\frac{5}{3}\pi}$ av samme grunn som ovenfor.

Løsningsmengden blir da $\underline{\underline{\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi\right)}}$.

En figur som illustrerer løsningen på denne og neste oppgave er vist nedenfor.



c) $\tan^2 x - \frac{2}{\sqrt{3}}\tan x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan^2 x - \frac{2}{\sqrt{3}}\tan x - 1 = 0$

$$\tan x = \frac{-\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{4}{3}+4}}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{16}{3}}}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \frac{4}{\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\frac{6}{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} = \underline{\sqrt{3}} \\ \dfrac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \underline{-\dfrac{1}{3}\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vi har tidligere sett at når $\tan x = \sqrt{3}$, er $x = \underline{\frac{\pi}{3}}$ eller $x = \underline{\frac{4}{3}\pi}$.

Videre vet vi at når $v = \frac{\pi}{6}$ er $\tan v = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, og at $\tan(-v) = -\tan v$. Dette medfører at når $x = -\frac{\pi}{6}$ er $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Men denne verdien ligger utenfor området $\left[0, 2\pi\right\rangle$. Vi får isteden disse to løsningene innenfor området:

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \underline{\frac{5}{6}\pi}$ fordi tangens-funksjonen er periodisk med periode π.

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\cdot\pi = \underline{\frac{11}{6}\pi}$ av samme grunn som ovenfor.

Løsningsmengden blir da $\underline{\underline{\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi\right)}}$.

Oppgave 3.7.1

$$\sin 15^\circ = \sin\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}}$$

$$\cos 15^\circ = \cos\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}}$$

$$\tan\left(15^\circ\right) = \tan\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + 1\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{9 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2}{9 - \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9-3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = \frac{\cancel{6}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\cancel{6}} = \underline{\underline{2-\sqrt{3}}}$$

Eller:

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\cancel{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{6-2} = \frac{8 - 2\sqrt{4\cdot 3}}{4}$$

$$= \frac{8 - 2\cdot 2\sqrt{3}}{4} = \frac{\cancel{4}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\cancel{4}} = \underline{\underline{2-\sqrt{3}}}$$

Vi kunne også benyttet resultatene fra Eksempel 3.7.1, fordi

$$\sin(15^\circ)=\cos(90^\circ-15^\circ)=\cos(75^\circ)=\underline{\underline{\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}}.$$

$$\cos(15^\circ)=\sin(90^\circ-15^\circ)=\sin(75^\circ)=\underline{\underline{\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}}.$$

$$\tan(15^\circ)=\frac{1}{\tan(90^\circ-15^\circ)}=\frac{1}{\tan(75^\circ)}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=\underline{\underline{2-\sqrt{3}}}$$

Oppgave 3.7.2

$$\sin(3v)=\sin(2v+v)=\sin(2v)\cdot\cos v+\cos(2v)\cdot\sin v$$

$$=(2\sin v\cdot\cos v)\cdot\cos v+\left(\cos^2 v-\sin^2 v\right)\cdot\sin v$$

$$=2\sin v\cdot\cos^2 v+\cos^2 v\cdot\sin v-\sin^3 v$$

$$=3\sin v\cdot\cos^2 v-\sin^3 v=3\sin v\left(1-\sin^2 v\right)-\sin^3 v$$

$$=\underline{\underline{3\sin v-4\sin^3 v}}$$

$$\cos(3v)=\cos(2v+v)=\cos(2v)\cdot\cos v-\sin(2v)\cdot\sin v$$

$$=\left(\cos^2 v-\sin^2 v\right)\cdot\cos v-(2\sin v\cdot\cos v)\cdot\sin v$$

$$=\cos^3 v-\sin^2 v\cdot\cos v-2\sin^2 v\cdot\cos v$$

$$=\cos^3 v-3\sin^2 v\cdot\cos v=\cos^3 v-3\left(1-\cos^2 v\right)\cos v$$

$$=\underline{\underline{4\cos^3 v-3\cos v}}$$

$$\tan(3v)=\tan(2v+v)=\frac{\tan(2v)+\tan v}{1-\tan(2v)\cdot\tan v}=\frac{\frac{2\tan v}{1-\tan^2 v}+\tan v}{1-\frac{2\tan v}{1-\tan^2 v}\cdot\tan v}\cdot\frac{1-\tan^2 v}{1-\tan^2 v}$$

$$=\frac{2\tan v+\tan v-\tan^3 v}{1-\tan^2 v-2\tan^2 v}=\underline{\underline{\frac{3\tan v-\tan^3 v}{1-3\tan^2 v}}}$$

Oppgave 3.7.3

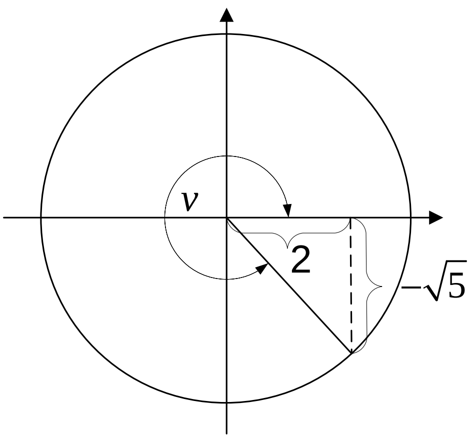
a) Når $v\in[0,\pi]$, er $\frac{v}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Da er både sinus, cosinus og tangens positive. Vi får:

$$\sin\left(\tfrac{v}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos v}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{4}{3}}{2}}=\underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{3}}}}.$$

$$\cos\left(\tfrac{v}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{2}}=\underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{3}}}}.$$

$$\tan\left(\tfrac{v}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos v}{1+\cos v}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}}=\sqrt{\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}}=\underline{\underline{\sqrt{2}}}.$$

b)



På grunnlag av de gitte opplysningene kan vi tegne enhetssirkelen til venstre. Vi kan nå velge nye enheter slik at lengdene av sidene i den rettvinklede trekanten blir som vist på figuren. Da blir radien

$$R = \sqrt{2^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = \underline{3}$$

som gir

$$\cos v = \tfrac{2}{3}.$$

Videre vet vi at når $v \in \left[\tfrac{3}{2}\pi,\, 2\pi\right]$, må $\tfrac{v}{2} \in \left[\tfrac{3}{4}\pi,\, \pi\right]$.

Dermed vet vi at $\sin v > 0$, $\cos v < 0$, og $\tan v < 0$. Nå setter vi i gang:

$$\sin\left(\tfrac{v}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{6}}}}.$$

$$\cos\left(\tfrac{v}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\cos v}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{5}{3}}{2}} = \underline{\underline{-\sqrt{\frac{5}{6}}}}.$$

$$\tan\left(\tfrac{v}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos v}{1+\cos v}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}} = -\sqrt{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}} = \underline{\underline{-\sqrt{\frac{1}{5}}}}.$$

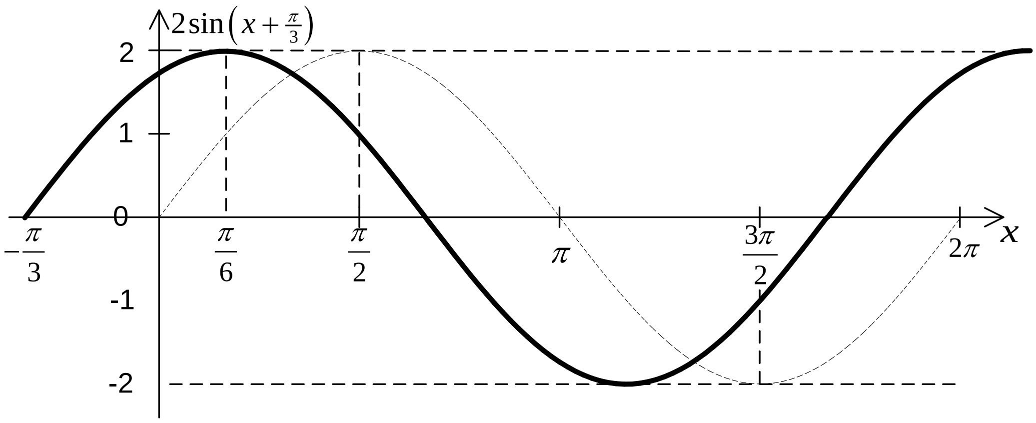
Oppgave 3.8.1

a) $f(x) = 2\sin\left(x + \tfrac{\pi}{3}\right)$.

Dette er en sinus-funksjon som har amplitude $A = 2$. Perioden er $P = 2\pi$. Grafen skjærer *x*-aksen når

$$x + \tfrac{\pi}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{-\tfrac{\pi}{3}}.$$

Grafen er skissert nedenfor, der grafen til $y = 2\sin x$ er tegnet inn med tynn strek til sammenlikning. Merk at aksene ikke har samme skala.



b) $f(x) = \cos\left(\pi x - \tfrac{3}{4}\pi\right)$.

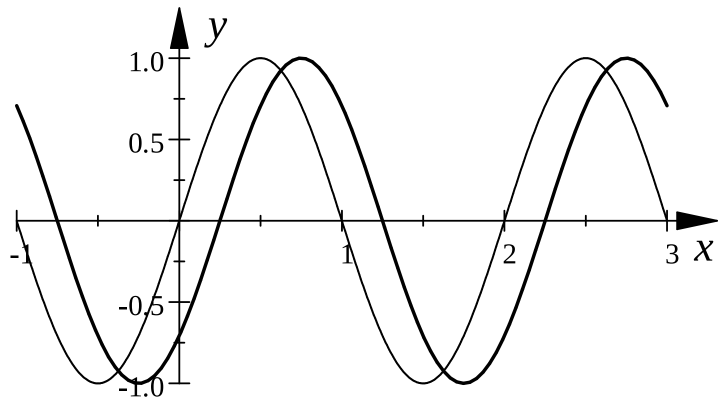
Dette er en cosinus-funksjon som har amplitude $A = 1$. Den gjøres om til en sinus-funksjon slik:

$$f(x)=\cos\left(\pi x-\tfrac{3}{4}\pi\right)=\sin\left(\pi x-\tfrac{3}{4}\pi+\tfrac{\pi}{2}\right)=\underline{\sin\left(\pi x-\tfrac{1}{4}\pi\right)}.$$

Perioden er $P=\frac{2\pi}{\pi}=\underline{2}$. Grafen skjærer x-aksen når

$$\pi x-\tfrac{1}{4}\pi=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{\tfrac{1}{4}}.$$

Grafen er skissert nedenfor, der grafen til $y=\sin(\pi x)$ er tegnet inn med tynn strek til sammenlikning.

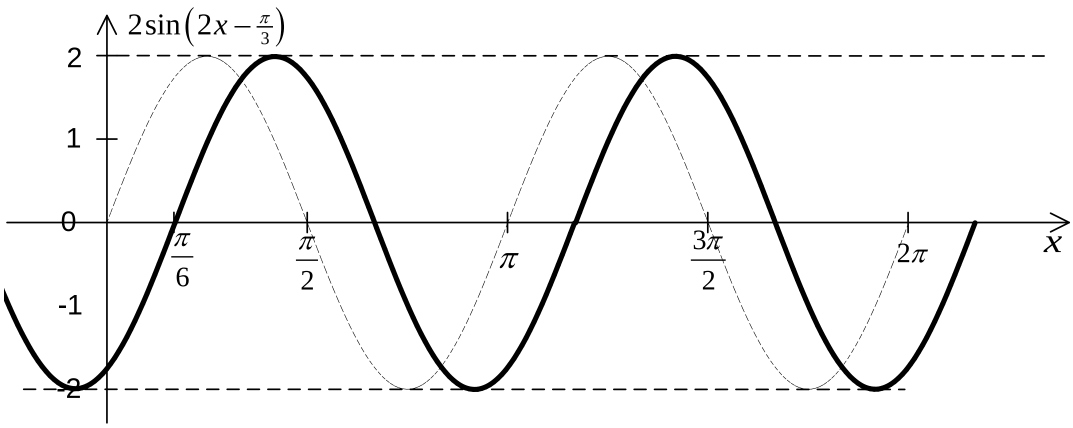


c) $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Dette er en sinus-funksjon som har amplitude $A=2$. Perioden er $P=\frac{2\pi}{2}=\underline{\pi}$. Grafen skjærer x-aksen når

$$2x-\tfrac{\pi}{3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{\tfrac{\pi}{6}}.$$

Grafen er skissert nedenfor, der grafen til $y=2\sin x$ er tegnet inn med tynn strek til sammenlikning. Merk at aksene ikke har samme skala.



Oppgave 3.8.2

a) $f(x)=\sin x+\cos x=A\sin(x+\varphi)=A(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)$

$$=(A\cos\varphi)\sin x+(A\sin\varphi)\cos x$$

Dersom disse uttrykkene skal være like for alle verdier av x, må vi ha:

$A\cos\varphi=1$ og $A\sin\varphi=1$.

Kvadrerer uttrykkene og legger sammen kvadratene:

$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = 1^2 + 1^2 \quad\Leftrightarrow\quad A^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad A^2\cdot 1 = 2 \quad\Leftrightarrow\quad A = \underline{\sqrt{2}}$$

Deler uttrykkene på hverandre:

$$\frac{\cancel{A}\sin\varphi}{\cancel{A}\cos\varphi} = \frac{1}{1} \quad\Leftrightarrow\quad \tan\varphi = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi = \begin{cases} \underline{\tfrac{\pi}{4}} \\ \tfrac{\pi}{4} + \pi = \underline{\tfrac{5}{4}\pi} \end{cases}$$

Av uttrykkene $A\cos\varphi = 1$ og $A\sin\varphi = 1$ ser vi at det kun er løsningen $\varphi = \frac{\pi}{4}$ som gir positiv *A*. Dermed har vi at

$$\underline{\underline{f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)}}.$$

b)
$$f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x = A\sin(x+\varphi) = A\left(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi\right)$$

$$= (A\cos\varphi)\sin x + (A\sin\varphi)\cos x$$

Dersom disse uttrykkene skal være like for alle verdier av *x*, må vi ha:

$$A\cos\varphi = 1 \quad \text{og} \quad A\sin\varphi = -\sqrt{3}.$$

Kvadrerer uttrykkene og legger sammen kvadratene:

$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = 1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^3 \quad\Leftrightarrow\quad A^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad A^2\cdot 1 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad A = \underline{2}$$

Deler uttrykkene på hverandre:

$$\frac{\cancel{A}\sin\varphi}{\cancel{A}\cos\varphi} = \frac{-\sqrt{3}}{1} \quad\Leftrightarrow\quad \tan\varphi = -\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad \varphi = \begin{cases} \underline{-\tfrac{\pi}{3}} \\ -\tfrac{\pi}{3} + \pi = \underline{\tfrac{2}{3}\pi} \end{cases}$$

Av uttrykkene $A\cos\varphi = 1$ og $A\sin\varphi = -\sqrt{3}$ ser vi at det kun er løsningen $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ som gir positiv *A*. Dermed har vi at

$$\underline{\underline{f(x) = 2\sin\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right)}}.$$

c)
$$f(x) = -\sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x) = A\sin(2x+\varphi) = A\left(\sin(2x)\cos\varphi + \cos(2x)\sin\varphi\right)$$

$$= (A\cos\varphi)\sin(2x) + (A\sin\varphi)\cos(2x)$$

Dersom disse uttrykkene skal være like for alle verdier av *x*, må vi ha:

$$A\cos\varphi = -\sqrt{3} \quad \text{og} \quad A\sin\varphi = -1.$$

Kvadrerer uttrykkene og legger sammen kvadratene:

$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = \left(-\sqrt{3}\right)^3 + (-1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad A^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad A^2\cdot 1 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad A = \underline{2}$$

Deler uttrykkene på hverandre:

$$\frac{\cancel{A}\sin\varphi}{\cancel{A}\cos\varphi} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} \quad\Leftrightarrow\quad \tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad \varphi = \begin{cases} \underline{\tfrac{\pi}{6}} \\ \tfrac{\pi}{6} + \pi = \underline{\tfrac{7}{6}\pi} \end{cases}$$

Av uttrykkene $A\cos\varphi = -\sqrt{3}$ og $A\sin\varphi = -1$ ser vi at det kun er løsningen $\varphi = \frac{7}{6}\pi$ som gir positiv *A*. Dermed har vi at

$$\underline{\underline{f(x) = 2\sin\left(2x + \tfrac{7}{6}\pi\right)}}.$$

Oppgave 3.9.1

a) $\cos(2x) + \cos x = 0$.

Benytter at

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

og får

$$2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0.$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \underline{\tfrac{1}{2}} \\ \underline{-1} \end{cases}$$

Vi har nå disse mulighetene:

$$\cos x = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \underline{\tfrac{\pi}{3}} \\ x = -\tfrac{\pi}{3} + 2\pi = \underline{\tfrac{5}{3}\pi} \end{cases}$$

$$\cos x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\pi}.$$

Løsningsmengden blir da

$$\underline{\underline{\left\{\tfrac{1}{3}\pi,\ \pi,\ \tfrac{5}{3}\pi\right\}}}.$$

b) $2\sin(2x) + \sin^2 x + 3\cos^2 x = 0$.

Benytter at

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$

og får

$$2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x + 3\cos^2 x = 0.$$

$\cos x = 0$ er åpenbart ikke løsning av denne likningen. Jeg kan derfor dele likningen på $\cos^2 x$, og får

$$4\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan^2 x + 4\tan x + 3 = 0$$

$$\tan x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \underline{-1} \\ \underline{-3} \end{cases}$$

Vi har nå disse mulighetene:

$$\tan x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\tfrac{1}{4}\pi + \pi = \underline{\tfrac{3}{4}\pi} \\ x = -\tfrac{1}{4}\pi + 2\pi = \underline{\tfrac{7}{4}\pi} \end{cases}$$

$$\tan x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \approx -1.25 + \pi \approx \underline{1.89} \\ x \approx -1.25 + 2\pi \approx \underline{5.03} \end{cases}$$

Løsningsmengden blir da

$$\underline{\underline{\left\{\tfrac{3}{4}\pi,\ \tfrac{7}{4}\pi,\ 1.89,\ 5.03\right\}}}.$$

c) $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 1 - 2\sqrt{2}\sin x$.

Det er mest nærliggende å omforme ved hjelp av identiteter for $\sin(2x)$ og $\cos(2x)$. Vi har imidlertid 3 identiteter for $\cos(2x)$, men velger

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

fordi vi allerede har et sinus-ledd i likningen. Da får vi:

$$\left(1-2\sin^2 x\right) + \sqrt{3}\left(2\sin x \cdot \cos x\right) = 1 - 2\sqrt{2}\sin x$$

$$-2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + 2\sqrt{2}\sin x = 0$$

Her kan vi dele på 2 og sette $\sin x$ som felles faktor utenfor parentes:

$$\sin x\left(-\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{2}\right) = 0 .$$

Nå er enten

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \underline{0} \\ x = \underline{\pi} \end{cases}$$

eller

$$-\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} .$$

Omformer nå

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x$$

til formen

$$A\sin(x+\varphi) = A\left(\sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi\right)$$
$$= (A\cos\varphi)\sin x + (A\sin\varphi)\cos x$$

Vi må da ha at

$$A\cos\varphi = 1$$

og

$$A\sin\varphi = -\sqrt{3} .$$

Kvadrerer disse likningene og summerer kvadratene:

$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = 1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad A^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 1+3$$

$$\Leftrightarrow \quad A^2 \cdot 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{2}$$

Deler likningene på hverandre:

$$\frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{-\sqrt{3}}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\varphi = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi = \underline{-\tfrac{1}{3}\pi} \\ \varphi = -\tfrac{1}{3}\pi + \pi = \underline{\tfrac{2}{3}\pi} \end{cases}$$

Vi ser at kun verdien $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ gir positiv *A*. Da har vi

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} .$$

Da har vi disse mulighetene:

$$x - \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{4}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{4}\pi = \underline{\tfrac{7}{12}\pi} .$$

$$x - \tfrac{1}{3}\pi = \pi - \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{3}{4}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{3}{4}\pi = \underline{\tfrac{13}{12}\pi} .$$

Løsningsmengden blir da

$$\underline{\underline{\left\{0,\ \pi,\ \tfrac{7}{12}\pi,\ \tfrac{13}{12}\pi\right\}}} .$$

Oppgave 3.9.2

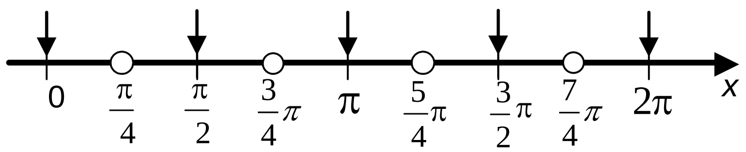
a) $\sin^2 x < \frac{1}{2},\ x \in [0,\ 2\pi\rangle$

Løser først likningen

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \underline{\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}\,.$$

$$\sin x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \underline{\tfrac{1}{4}\pi} \\ x = \pi - \tfrac{1}{4}\pi = \underline{\tfrac{3}{4}\pi} \end{cases}$$

$$\sin x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \underline{\tfrac{5}{4}\pi} \\ x = \pi - \tfrac{5}{4}\pi = -\tfrac{1}{4}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{1}{4}\pi + 2\pi = \underline{\tfrac{7}{4}\pi} \end{cases}$$



$x = 0$: $\sin^2 0 = 0 < \tfrac{1}{2}$, slik at $\sin^2 x < \tfrac{1}{2}$ når $x \in [0, \tfrac{1}{4}\pi\rangle$.

$x = \tfrac{1}{2}\pi$: $\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 1^1 = 1 > \tfrac{1}{2}$, slik at $\sin^2 x > \tfrac{1}{2}$ når $x \in \left\langle \tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{3}{4}\pi \right\rangle$.

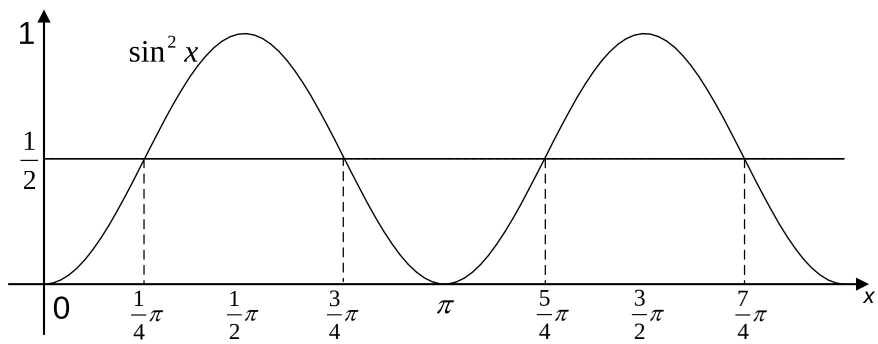
$x = \pi$: $\sin^2 \pi = 0 < \tfrac{1}{2}$, slik at $\sin^2 x < \tfrac{1}{2}$ når $x \in \left\langle \tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi \right\rangle$.

$x = \tfrac{3}{2}\pi$: $\sin^2\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = (-1)^1 = 1 > \tfrac{1}{2}$, slik at $\sin^2 x > \tfrac{1}{2}$ når $x \in \left\langle \tfrac{5}{4}\pi, \tfrac{7}{4}\pi \right\rangle$.

$x = 2\pi$: $\sin^2(2\pi) = 0 < \tfrac{1}{2}$, slik at $\sin^2 x < \tfrac{1}{2}$ når $x \in \left\langle \tfrac{7}{4}\pi, 2\pi \right\rangle$.

Vi summerer opp:

$$\underline{\underline{\sin^2 x < \tfrac{1}{2} \text{ når } x \in [0, \tfrac{1}{4}\pi\rangle \cup \left\langle \tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle \tfrac{7}{4}\pi, 2\pi \right\rangle}}.$$



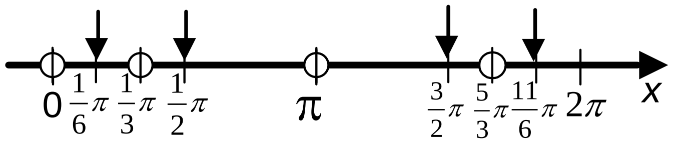
b) $\sin(2x) > \sin x$, $x \in [0, 2\pi\rangle$.

Løser først likningen

$$\sin(2x) = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x \cdot \cos x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x(2\cos x - 1) = 0\,.$$

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \underline{0} \\ x = \underline{\pi} \end{cases}$$

$$2\cos x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \underline{\tfrac{1}{3}\pi} \\ x = -\tfrac{1}{3}\pi + 2\pi = \underline{\tfrac{5}{3}\pi} \end{cases}$$



$x=\frac{1}{6}\pi$: $\sin(2x)=\sin\left(2\cdot\frac{1}{6}\pi\right)=\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$, $\sin x=\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)=\underline{\frac{1}{2}}$.

Da er $\sin(2x)>\sin x$ når $x\in\left\langle 0,\frac{1}{3}\pi\right\rangle$.

$x=\frac{1}{2}\pi$: $\sin(2x)=\sin\left(2\cdot\frac{1}{2}\pi\right)=\sin(\pi)=\underline{0}$, $\sin x=\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)=\underline{1}$.

Da er $\sin(2x)<\sin x$ når $x\in\left\langle \frac{1}{3}\pi,\ \pi\right\rangle$.

$x=\frac{3}{2}\pi$: $\sin(2x)=\sin\left(2\cdot\frac{3}{2}\pi\right)=\sin(3\pi)=\underline{0}$, $\sin x=\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\underline{-1}$.

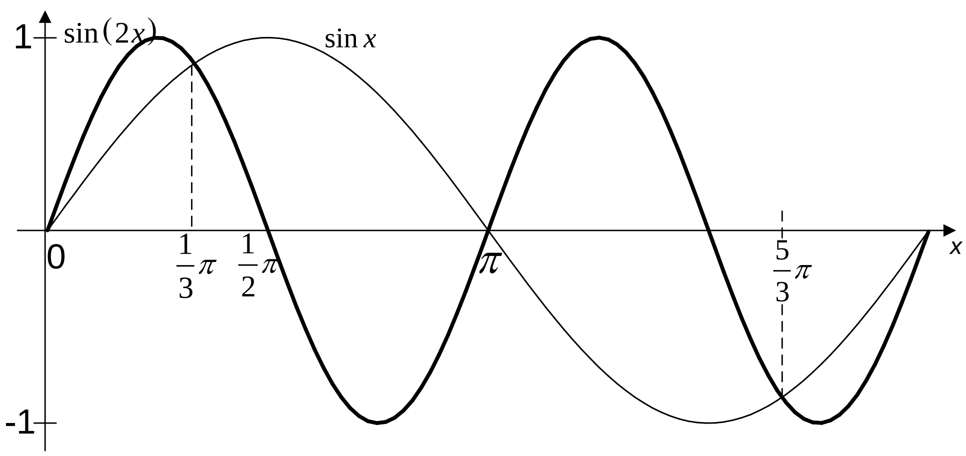
Da er $\sin(2x)>\sin x$ når $x\in\left\langle \pi,\frac{5}{3}\pi\right\rangle$.

$x=\frac{11}{6}\pi$: $\sin(2x)=\sin\left(2\cdot\frac{11}{6}\pi\right)=\sin\left(\frac{11}{3}\pi\right)=\sin\left(\frac{11}{3}\pi-2\pi\right)=\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\underline{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}$,

$\sin x=\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)=\underline{-\frac{1}{2}}$. Da er $\sin(2x)<\sin x$ når $x\in\left\langle\frac{5}{3}\pi,\ 2\pi\right\rangle$.

Vi summerer opp:

$\sin(2x)>\sin x$ når $x\in\underline{\underline{\left\langle 0,\frac{1}{3}\pi\right\rangle\cup\left\langle\pi,\frac{5}{3}\pi\right\rangle}}$.



Oppgave 4.3.1

a) $2^x=16=2^4 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=4}}$.

b) $3^x=\sqrt{27}=\left(3^3\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\frac{3}{2}}}$.

c) $4^x=32 \quad\Leftrightarrow\quad \left(2^2\right)^x=2^5 \quad\Leftrightarrow\quad 2x=5 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\frac{5}{2}}}$.

d) $32^x=8 \quad\Leftrightarrow\quad \left(2^5\right)^x=2^3 \quad\Leftrightarrow\quad 5x=3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\frac{3}{5}}}$.

e) $9^x=1=9^0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=0}}$.

Oppgave 4.3.2

a) $$2^{2x}+2^x-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(2^x\right)^2+1\cdot 2^x-2=0\,.$$

Dette er en andregradslikning i 2^x, med løsninger

$$2^x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$$

Dette gir $2^x=1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=0}}$ eller $2^x=-2$ som ikke har noen løsning.

b) $$2^{2x}-\frac{5}{4}\cdot 2^x+\frac{1}{4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(2^x\right)^2-\frac{5}{4}\cdot 2^x+\frac{1}{4}=0\,.$$

Dette er en andregradslikning i 2^x, med løsninger

$$2^x=\frac{\frac{5}{4}\pm\sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2-4\cdot\frac{1}{4}}}{2}=\frac{\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-\frac{16}{16}}}{2}=\frac{\frac{5}{4}\pm\frac{3}{4}}{2}=\begin{cases}1\\\frac{1}{4}\end{cases}$$

Dette gir $2^x=1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=0}}$ eller $2^x=\frac{1}{4}=2^{-2} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-2}}$.

c) $$9^x-10\cdot 3^{x-1}+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(3^2\right)^x-10\cdot 3^{-1}\cdot 3^x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(3^x\right)^2-\frac{10}{3}\cdot 3^x+1=0\,.$$

Dette er en andregradslikning i 3^x, med løsninger

$$3^x=\frac{\frac{10}{3}\pm\sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2-4\cdot 1}}{2}=\frac{\frac{10}{3}\pm\sqrt{\frac{100}{9}-\frac{36}{9}}}{2}=\frac{\frac{10}{3}\pm\frac{8}{3}}{2}=\begin{cases}3\\\frac{1}{3}\end{cases}$$

Dette gir $3^x=3 \quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{\underline{1}}$ eller $3^x=\frac{1}{3}=3^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{\underline{-1}}$.

Oppgave 4.3.3

a) $1.08^x=1.50 \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(1.08^x\right)=\ln 1.50 \quad\Leftrightarrow\quad x\cdot\ln 1.08=\ln 1.50$

$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{\ln 1.50}{\ln 1.08}\approx\underline{\underline{5.27}}$$

b) $2^{2x-1}=3^{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(2^{2x-1}\right)=\ln\left(3^{x+1}\right) \quad\Leftrightarrow\quad (2x-1)\ln 2=(x+1)\ln 3$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cdot(\ln 2)\cdot x-\ln 2=(\ln 3)\cdot x+\ln 3 \quad\Leftrightarrow\quad (2\ln 2-\ln 3)x=\ln 3+\ln 2$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\ln\frac{2^2}{3}\right)\cdot x=\ln(3\cdot 2) \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\ln 6}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\approx\underline{\underline{6.23}}$$

c) $5\cdot 6^{x-2}=\left(3^x\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 5\cdot 6^{x-2}=3^{2x} \quad\Leftrightarrow\quad \ln 5+\ln\left(6^{x-2}\right)=\ln\left(3^{2x}\right)$

$$\Leftrightarrow\quad \ln 5+(x-2)\cdot\ln 6=2x\cdot\ln 3 \quad\Leftrightarrow\quad \ln 5+(\ln 6)\cdot x-2\cdot\ln 6=(2\cdot\ln 3)\cdot x$$

$$\Leftrightarrow\quad (\ln 6-2\cdot\ln 3)x=2\cdot\ln 6-\ln 5 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\ln\left(6^2\right)-\ln 5}{\ln 6-\ln\left(3^2\right)}=\frac{\ln\left(\frac{36}{5}\right)}{\ln\left(\frac{6}{9}\right)}\approx\underline{\underline{-4.87}}$$

Oppgave 4.4.1

a) Kaller start-størrelsen K_0. Etter t timer er kolonien vokst til $K_0 \cdot (1.10)^t$. Når kolonien er vokst med 50%, er

$$1.50K_0 = K_0 \cdot (1.10)^t \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1.50) = t \cdot \ln(1.10) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln(1.50)}{\ln(1.10)} \approx \underline{\underline{4.25}} \text{ timer.}$$

b) Kaller start-størrelsen K_0. Den prosentvise veksten pr time er p. Da er:

$$K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 1.60K_0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{1+\frac{p}{100} = \sqrt{1.60}}\,.$$

Kolonien tredobles etter t timer. Da er:

$$K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t = 3K_0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{p}{100}\right)^t = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{1.60}\right)^t = 3\,.$$

Men $\left(\sqrt{1.60}\right)^t = \left(1.60^{\frac{1}{2}}\right)^t = (1.60)^{\frac{1}{2}t}$. Da blir

$$(1.60)^{\frac{1}{2}t} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}t \cdot \ln(1.60) = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{2 \cdot \ln 3}{\ln(1.60)} \approx \underline{\underline{4.675}} \text{ timer.}$$

Oppgave 4.4.2

Dersom samlet befolkning i 1990 var N_0, så var det $0.90N_0$ personer av gruppe A og $0.10N_0$ personer av gruppe B. Etter t år er disse folkegruppene like store:

$$0.90N_0(1.005)^t = 0.10N_0(1.02)^t \quad \Leftrightarrow \quad 9 \cdot (1.005)^t = (1.02)^t\,.$$

$$\ln 9 + t \cdot \ln(1.005) = t \cdot \ln(1.02)$$

$$t\left(\ln(1.02) - \ln(1.005)\right) = \ln 9$$

$$t = \frac{\ln 9}{\ln(1.02) - \ln(1.005)} \approx \underline{148.3}$$

Det tar altså litt over 148 år før de to befolkningsgruppene blir like store.

Da er gruppe A vokst til

$$0.90N_0(1.005)^{148.3} = 1.886N_0,$$

og gruppe B er vokst til

$$0.10N_0(1.02)^{148.3} = 1.885N_0$$

slik at samlet folketall er

$$1.886N_0 + 1.885N_0 = \underline{\underline{3.771N_0}}\,.$$

Oppgave 4.4.3

a) Vi starter med legge merke til at når $t = 0$ er $f(0) = A \cdot e^0 = A$, slik at A representerer startverdien. Når det tar en tid T før denne verdien er halvert, har vi at

$$A \cdot e^{-k \cdot T} = \tfrac{1}{2}A \quad \Leftrightarrow \quad e^{-k \cdot T} = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -k \cdot T = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2$$

Da er

$$k \cdot T = \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T = \frac{\ln 2}{k}}}.$$

b) Vi kan nå skrive

$$y = f(t) = A \cdot e^{-k \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} = A \cdot \left(\left(e^{\ln 2}\right)^{-1}\right)^{\frac{t}{T}} = A \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{t}{T}} = \underline{\underline{A \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}}.$$

Oppgave 4.4.4

Når $T = 5730$, er strålingsintensiteten

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{5730}} = 0.71 I_0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{t}{5730}} = 0.71 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{t}{5730} = \ln(0.71)$$

$$\Leftrightarrow \quad t = -5730 \cdot \ln(0.71) \approx \underline{\underline{1960\,\text{år}}}$$

Oppgave 4.6.1

a) $$\ln x = \ln(2-x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2-x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}.$$

Vi ser at både $\ln 1$ og $\ln(2-1)$ er definert, slik at løsningen kan brukes.

b) $$\ln\sqrt{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(e^2\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{e^4}}.$$

Eller:

$$\ln\sqrt{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\ln x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{e^4}}.$$

c) $$\log_3\left(x^2+2\right) - \log_3 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_3\left(\frac{x^2+2}{x}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+2}{x} = 3^1$$

$$x^2 + 2 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{2}} \\ \underline{\underline{1}} \end{cases}$$

Innsetting viser at begge løsningene kan brukes.

d) $$2\ln(x-1) = \ln x + \ln\left(2x - \tfrac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x-1)^2 - \ln x - \ln\left(2x - \tfrac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{(x-1)^2}{x\left(2x-\frac{1}{2}\right)}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{x\left(2x-\frac{1}{2}\right)} = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - \tfrac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \tfrac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}}{2} = \frac{-\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} = \begin{cases} \underline{\tfrac{1}{2}} \\ \underline{-2} \end{cases}$$

Men innsetting i den gitte oppgaven viser at ingen av disse løsningene kan brukes, fordi begge løsningene gir logaritmen til negative tall. Oppgaven har derfor ingen løsning.

Oppgave 4.7.1

a)
$$\cosh(x)\cdot\cosh(y)+\sinh(x)\cdot\sinh(y)$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\left(e^y+e^{-y}\right)+\tfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\left(e^y-e^{-y}\right)$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\left(e^xe^y+e^xe^{-y}+e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y}\right)+\left(e^xe^y-e^xe^{-y}-e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y}\right)\right)$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(2e^xe^y+2e^{-x}e^{-y}\right)=\tfrac{1}{2}\left(e^{x+y}+e^{-(x+y)}\right)=\underline{\underline{\cosh(x+y)}}$$

b)
$$\sinh(x)\cdot\cosh(y)+\cosh(x)\cdot\sinh(y)$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\left(e^y+e^{-y}\right)+\tfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\left(e^y-e^{-y}\right)$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\left(e^xe^y+e^xe^{-y}-e^{-x}e^y-e^{-x}e^{-y}\right)+\left(e^xe^y-e^xe^{-y}+e^{-x}e^y-e^{-x}e^{-y}\right)\right)$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(2e^xe^y-2e^{-x}e^{-y}\right)=\tfrac{1}{2}\left(e^{x+y}-e^{-(x+y)}\right)=\underline{\underline{\sinh(x+y)}}$$

c)
$$\cosh(2x)=\cosh(x+x)=\cosh(x)\cdot\cosh(x)+\sinh(x)\cdot\sinh(x)$$
$$=\underline{\underline{\cosh^2(x)+\sinh^2(x)}}$$
$$=\begin{cases}\left(1+\sinh^2(x)\right)+\sinh^2(x)=\underline{\underline{1+2\sinh^2(x)}}\\ \cosh^2(x)+\left(\cosh^2(x)-1\right)=\underline{\underline{2\cosh^2(x)-1}}\end{cases}$$

d)
$$\sinh(2x)=\sinh(x+x)$$
$$=\sinh(x)\cdot\cosh(x)+\cosh(x)\cdot\sinh(x)$$
$$=\underline{\underline{2\sinh(x)\cdot\cosh(x)}}$$

Oppgave 5.2.1

For alle oppgavene ser vi at direkte innsetting av den angitte x-verdien gir et ”$\frac{0}{0}$”- uttrykk. Vi må derfor prøve andre metoder.

a)
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+3}=\frac{3}{3+3}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Alternativ: Vi setter $x=3+\delta$ og lar $\delta\to 0$. Da får vi:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=\lim_{\delta\to 0}\frac{(3+\delta)^2-3(3+\delta)}{(3+\delta)^2-9}=\lim_{\delta\to 0}\frac{9+6\delta+\delta^2-9-3\delta}{9+6\delta+\delta^2-9}$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{3\delta+\delta^2}{6\delta+\delta^2}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\cancel{\delta}(3+\delta)}{\cancel{\delta}(6+\delta)}=\frac{3+0}{6+0}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b)
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}.$$

Her må vi faktorisere både teller og nevner:

$$x^2+3x+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot2}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=\begin{cases}\frac{-3+1}{2}=-1\\ \frac{-3-1}{2}=-2\end{cases}$$

slik at $x^2+3x+2=\left(x-(-1)\right)\left(x-(-2)\right)=\underline{(x+1)(x+2)}$.

$$x^2-x-6=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1(-6)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\begin{cases}\frac{1+5}{2}=3\\ \frac{1-5}{2}=-2\end{cases}$$

slik at $x^2-x-6=(x-3)\left(x-(-2)\right)=\underline{(x-3)(x+2)}$.

Dermed blir

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{(x-3)\cancel{(x+2)}}=\frac{-2+1}{-2-3}=\frac{-1}{-5}=\underline{\underline{\frac{1}{5}}}.$$

Alternativ: Vi setter $x=-2+\delta$ og lar $\delta\to0$. Da får vi:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}=\lim_{\delta\to0}\frac{(-2+\delta)^2+3(-2+\delta)+2}{(-2+\delta)^2-(-2+\delta)-6}=\lim_{\delta\to0}\frac{4-4\delta+\delta^2-6+3\delta+2}{4-4\delta+\delta^2+2-\delta-6}$$

$$=\lim_{\delta\to0}\frac{\delta^2-\delta}{\delta^2-5\delta}=\lim_{\delta\to0}\frac{\cancel{\delta}(\delta-1)}{\cancel{\delta}(\delta-5)}=\frac{0-1}{0-5}=\underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

c) $\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Ved å benytte at $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$, kan vi faktorisere nevneren og forkorte:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{1+1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Alternativt kan vi multiplisere teller og nevner med $\sqrt{x}+1$:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{1+1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 5.3.1

I begge oppgavene ser vi at direkte innsetting fører til "$\frac{0}{0}$"-uttrykk. Siden det inngår rottegn i begge brøkene, prøver vi å multiplisere teller og nevner med passe faktorer slik at brøkene kan forenkles med 3. kvadratsetning.

a) $$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}{\left(\sqrt{x+5}-2\right)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}{(x+5)-2^2}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x+5}+2\right)}{\cancel{x+1}}=\sqrt{-1+5}+2=2+2=\underline{\underline{4}}$$

b) $$\lim_{x\to a}\frac{a-\sqrt{2x^2-a^2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(a-\sqrt{2x^2-a^2}\right)\left(a+\sqrt{2x^2-a^2}\right)}{(x-a)\left(a+\sqrt{2x^2-a^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{a^2-\left(2x^2-a^2\right)}{(x-a)\left(a+\sqrt{2x^2-a^2}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{2a^2-2x^2}{(x-a)\left(a+\sqrt{2x^2-a^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{-2\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{(x-a)}\left(a+\sqrt{2x^2-a^2}\right)}=\frac{-2(a+a)}{a+\sqrt{2a^2-a^2}}=\frac{-4a}{a+a}=\underline{\underline{-2}}$$

Oppgave 5.4.1

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Problemer her er at når $x\to 0$ vil $\frac{1}{x}\to\infty$. Dermed vet vi ikke verdien av $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ når $x\to 0$.
Heldigvis vet vi at $-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$ slik at

$$-x\le x\cdot\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\le x.$$

Nå er $\lim\limits_{x\to 0}(-x)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$. Da er også $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\underline{\underline{0}}$.

Oppgave 5.5.1

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^2+3x-2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2-0+0}{1+0-0}=\underline{\underline{2}}$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+1}{-x^3+x-2}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}}{-1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{1-0+0}{-1+0-0}=\underline{\underline{-1}}$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{0+4}}{1-0}=\underline{\underline{2}}$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x^2-3x+1}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{2+0}{0+0+0}$$

Denne grenseverdien eksisterer ikke fordi vi får 0 i nevner samtidig som telleren er forskjellig fra null. Verdien av brøken går mot $+\infty$ (pluss fordi de dominerende leddene i henholdsvis teller og nevner har samme fortegn).

e) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^3+3x-2}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{0-0+0}{1+0-0}=\underline{\underline{0}}$$

Oppgave 5.5.2

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+8x}+x\right)}{\sqrt{x^2+8x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+8x\right)-x^2}{\sqrt{x^2+8x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{\sqrt{x^2+8x}+x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}+1}=\frac{8}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{8}{2}=\underline{\underline{4}}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-x}\right)\left(\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-x}\right)}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(4x^2+x\right)-\left(4x^2-x\right)}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-x}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+\sqrt{4-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4-0}}=\frac{2}{2+2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 6.1.1

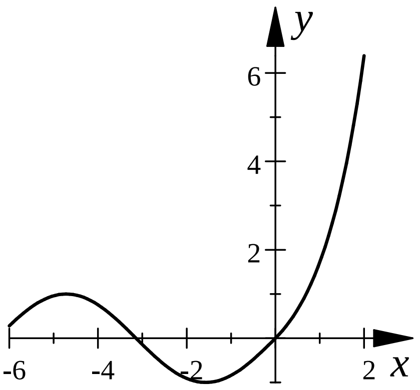
a)

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{når} \quad x<0\\ e^x-1 & \text{når} \quad x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\sin x\right)=\sin 0=\underline{0}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x-1\right)=e^0-1=\underline{0}.$$

Videre vet vi at både sinus-funksjonen og eksponentialfunksjonen er kontinuerlige i sine definisjonsområder. Da har vi vist at f er kontinuerlig for alle $x\in\mathbb{R}$.



b)

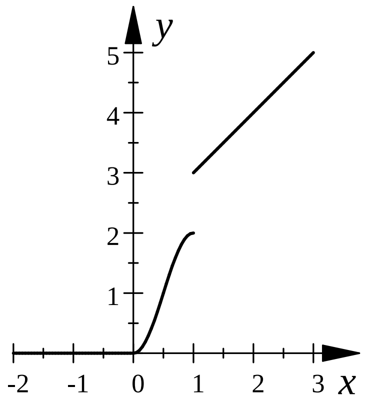
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{når} \quad x<0\\ 1-\cos(\pi x) & \text{når} \quad 0\leq x<1\\ x+2 & \text{når} \quad x\geq 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\underline{0}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\cos(\pi x)\right)=1-1=\underline{0}$$

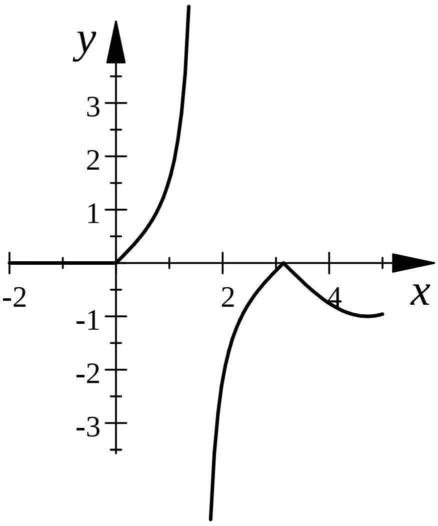
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(1-\cos(\pi x)\right)=1-(-1)=\underline{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x+2\right)=1+2=\underline{3}$$



Funksjonen er ikke kontinuerlig for $x=1$, men er kontinuerlig for alle andre verdier av x siden både cosinus- og polynomfunksjonen er kontinuerlige i sine definisjonsområder.

c) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{når} \quad x<0 \\ \tan x & \text{når} \quad 0\le x<\pi \\ \sin x & \text{når} \quad x\ge \pi \end{cases}$



$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\underline{0}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\tan x)=\underline{0}$

$\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-}(\tan x)=\underline{0}$

$\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+}(\sin x)=\underline{0}$

Her kan det se ut som om *f* er kontinuerlig for alle $x\in\mathbb{R}$. Men $\tan x$ er ikke kontinuerlig når $x=\frac{\pi}{2}$. Altså har vi at *f* er kontinuerlig for alle $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Oppgave 6.1.2

a) $f(x)=\begin{cases} 3-x & \text{når} \quad x<1 \\ a-x^2 & \text{når} \quad x\ge 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3-x)=3-1=\underline{2}$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(a-x^2\right)=a-1^2=\underline{a-1}$.

Dersom *f* skal være kontinuerlig for $x=1$, må $a-1=2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{a=3}}$. Da blir *f* kontinuerlig for alle $x\in\mathbb{R}$.

b) $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{når} \quad x<0 \\ ax^2+b & \text{når} \quad 0\le x<2 \\ \frac{1}{2}x-2 & \text{når} \quad x\ge 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos x)=\underline{1}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(ax^2+b\right)=0+b=\underline{b}$.

Dersom *f* skal være kontinuerlig for $x=0$, må $\underline{\underline{b=1}}$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(ax^2+1\right)=a\cdot 2^2+1=\underline{4a+1}$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2}x-2\right)=\frac{1}{2}\cdot 2-2=\underline{-1}$.

Dersom *f* skal være kontinuerlig for $x=2$, må $4a+1=-1 \quad\Leftrightarrow\quad 4a=-2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{a=-\frac{1}{2}}}$.

Med disse verdiene av *a* og *b* blir *f* kontinuerlig for alle $x\in\mathbb{R}$.

Oppgave 6.2.1

$f(x)=x^3-x^2-2x+1$

$f(0)=0^3-0^2-2\cdot 0+1=1$

$f(1)=1^3-1^2-2\cdot 1+1=-1$

Siden *f* er kontinuerlig, må *f* ha et nullpunkt mellom $x=0$ og $x=-1$. Det er rimelig å gjette på at dette nullpunktet ligger omtrent midt mellom $x=0$ og $x=-1$. Prøver derfor

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\left(\tfrac{1}{2}\right)^3-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)+1=\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{4}-1+1=\underline{-\tfrac{1}{8}}=\underline{-0.125}.$$

Løsningen må være litt mindre enn $x=\frac{1}{2}$. Prøver $x=0.4$:

$$f(0.4)=0.4^3-0.4^2-2\cdot 0.4+1=\underline{0.104}.$$

Nullpunktet må altså ligge mellom $x=0.4$ og $x=0.5$, og sannsynligvis litt nærmere $x=0.4$. Prøver derfor $x=0.44$:

$$f(0.44)=0.44^3-0.44^2-2\cdot 0.44+1=\underline{0.0116}.$$

Denne *x*-verdien var altså litt for liten. Prøver derfor $x=0.45$:

$$f(0.45)=0.45^3-0.45^2-2\cdot 0.45+1=\underline{-0.0114}.$$

Nå er det grunn til å tro at en temmelig nøyaktig løsning må ligge omtrent midt mellom disse to *x*-verdiene. Vi prøver:

$$f(0.445)=0.445^3-0.445^2-2\cdot 0.445+1=\underline{0.000096}.$$

Vi er godt fornøyd, og sier at likningen

$$x^3-x^2-2x+1=0$$

med meget god tilnærmelse har løsningen $x=\underline{\underline{0.445}}$.

Oppgave 7.1.1

a) Når $z=3-2i$, blir $z^*=\underline{\underline{3+2i}}$.

b) Når $z=i-2=-2+i$, blir $z^*=\underline{\underline{-2-i}}$.

Oppgave 7.1.2

Setter $z=x+i\,y$. Da er $z^*=x-i\,y$,
slik at

$$(z^*)^*=(x-i\,y)^*=x+i\,y=z.$$

Oppgave 7.2.1

a) $2-4i+i(2i-1)=2-4i+2i^2-i=2-4i+2(-1)-i=0-5i=\underline{\underline{-5i}}$.

b) $(3i-2)\cdot(1-4i)=3i\cdot 1+3i\cdot(-4i)-2\cdot 1-2\cdot(-4i)=3i-12\cdot(-1)-2+8i=\underline{\underline{10+11i}}$.

c) $(1-2i)^2-(2+i)=1-2\cdot 2i+(2i)^2-2-i=1-4i+4\cdot(-1)-2-i=\underline{\underline{-5-5i}}$.

d) $(2-i)^2\cdot(i+1)=(4-4i+i^2)(i+1)=(3-4i)(i+1)=3i+3-4i\cdot i-4i=\underline{\underline{7-i}}$.

e) $$\frac{1+i}{2-4i}=\frac{(1+i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}=\frac{2+4i+2i+4i^2}{2^2-(4i)^2}=\frac{-2+6i}{4+16}=\underline{\underline{-\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i}}.$$

f) $$\frac{(i-2)^2}{1-3i} = \frac{(i^2-4i+2^2)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{(3-4i)(1+3i)}{1^2-(3i)^2} = \frac{3+9i-4i-12i^2}{1+9}$$

$$= \frac{3+12}{10} + \frac{9-4}{10}i = \underline{\underline{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}}$$

Oppgave 7.2.2

a) $$1+2i-z = (2z-1)(2+i) = 4z+2z\cdot i-2-i$$

$$-z-4z-2zi = -1-2i-2-i$$

$$-(5+2i)z = -(3+3i)$$

$$z = \frac{3+3i}{5+2i} = \frac{(3+3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{15-6i+15i-6i^2}{5^2-(2i)^2} = \frac{21+9i}{25+4} = \underline{\underline{\frac{21}{29}+\frac{9}{29}i}}$$

b) $$\frac{i+2z-1}{2i+1} = \frac{2-z}{1-2i} \quad \Leftrightarrow \quad (i+2z-1)(1-2i) = (2-z)(2i+1)$$

$$i-2i^2+2z-4zi-1+2i = 4i+2-2zi-z$$

$$2z-4zi+2zi+z = -i-2+1-2i+4i+2$$

$$(3-2i)z = 1+i$$

$$z = \frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+3i+2i^2}{3^2-(2i)^2} = \frac{1+5i}{9+4} = \underline{\underline{\frac{1}{13}+\frac{5}{13}i}}$$

c) $$\frac{2z+3i}{1-2i} = \frac{z+2i-1}{3+4i} \quad \Leftrightarrow \quad (2z+3i)(3+4i) = (1-2i)(z+2i-1)$$

$$6z+8zi+9i+12i^2 = z+2i-1-2zi-4i^2+2i$$

$$6z+8zi-z+2zi = -9i+12+2i-1+4+2i$$

$$(5+10i)z = 15-5i$$

$$z = \frac{5(3-i)}{5(1+2i)} = \frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-6i-i+2i^2}{1^2-(4i)^2} = \frac{1-7i}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i}}$$

d) $$2z^*-1+i = z+2i(z-2z^*)$$

Innfører $z = x+iy \quad \Leftrightarrow \quad z^* = x-iy$.

$$2(x-iy)-1+i = (x+iy)+2i\left(x+iy-2(x-iy)\right)$$

$$2x-2yi-1+i = x+iy+2i(x+iy-2x+2yi)$$

$$= x+iy+2i(-x+3yi)$$

$$= x+iy-2xi-6y$$

Flytter alle leddene over på venstre side, og samler realdelene for seg og imaginærdelen for seg:

$$2x-1-x+6y+(-2y+1-y+2x)i=0$$

$$(x+6y-1)+(2x-3y+1)i=0$$

Dette gir likningssystemet:

$$x+6y-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+6y=1 \qquad (1)$$

$$2x-3y+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-3y=-1 \qquad (2)$$

Multipliserer (2) med 2, og adderer likningene:

$$x+4x=1-2 \quad \Leftrightarrow \quad 5x=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=-\tfrac{1}{5}}.$$

Da får vi av (2):

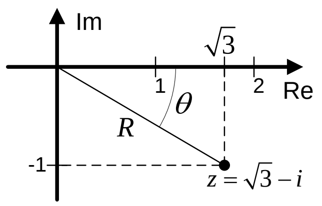
$$3y=2x+1=2\cdot\left(-\tfrac{1}{5}\right)+1=\tfrac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y=\tfrac{1}{5}}.$$

Løsningen blir

$$z=x+i\,y=\underline{\underline{-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}i}}.$$

Oppgave 7.3.1

a)



Vi ser av figuren at

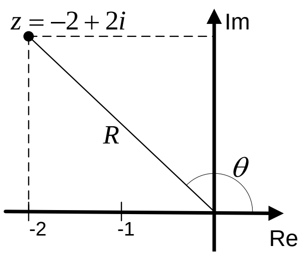
$$R=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2,$$

$$\tan\theta=\frac{-1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \theta=-\tfrac{1}{6}\pi \text{ fordi } \theta \text{ ligger i 4. kvadrant.}$$

Da er

$$z=2\left(\cos\left(-\tfrac{1}{6}\pi\right)-i\sin\left(-\tfrac{1}{6}\pi\right)\right).$$

b)



Vi ser av figuren at

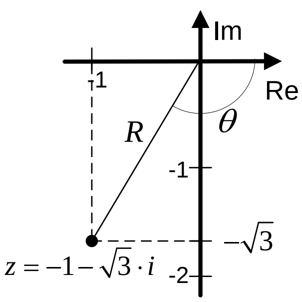
$$R=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2},$$

$$\tan\theta=\frac{2}{-2}=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta=\tfrac{3}{4}\pi$$

fordi θ ligger i 2. kvadrant. Da er

$$z=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)-i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right).$$

c)



Vi ser av figuren at

$$R=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2,$$

$$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \theta=-\tfrac{2}{3}\pi \text{ (eller } \theta=\tfrac{4}{3}\pi\text{)}$$

fordi θ ligger i 3. kvadrant. Da er

$$z=2\left(\cos\left(-\tfrac{2}{3}\pi\right)-i\sin\left(-\tfrac{2}{3}\pi\right)\right).$$

Oppgave 7.3.2

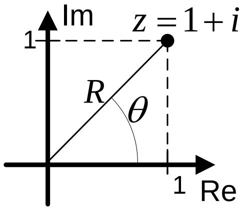
a) $$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2+i\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\underline{\underline{1+i}}.$$

b) $$z=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}}.$$

Oppgave 7.4.1

Benytter bl.a. beregningene i oppgave 3.1:

a)

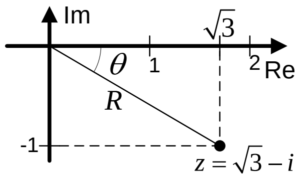


Vi ser av figuren at $R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ og at $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

Da blir

$$z = 1 + i = \underline{\underline{\sqrt{2}\, e^{\frac{1}{4}\pi i}}}.$$

b)



Vi ser av figuren at

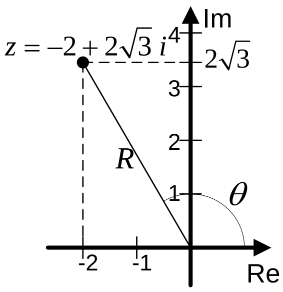
$$R = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

og at $\tan\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = -\frac{1}{6}\pi$.

Da blir

$$z = \sqrt{3} - i = \underline{\underline{2e^{-\frac{1}{6}\pi i}}}.$$

c)



Vi ser av figuren at

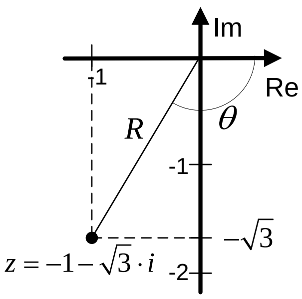
$$R = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

og at $\tan\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{2}{3}\pi$.

Da blir

$$z = -2 + 2\sqrt{3}\, i = \underline{\underline{4e^{\frac{2}{3}\pi i}}}.$$

d)

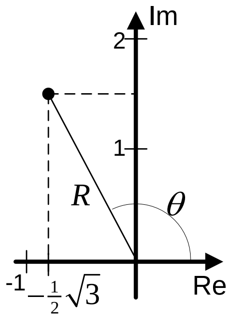


I Oppgave 3.1 har vi vist at $R = 2$ og at $\theta = -\frac{2}{3}\pi$.

Da blir

$$z = -1 - \sqrt{3}\, i = \underline{\underline{2e^{-\frac{2}{3}\pi i}}}.$$

e)



Vi ser av figuren at

$$R = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{4}} = \sqrt{\tfrac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

og at

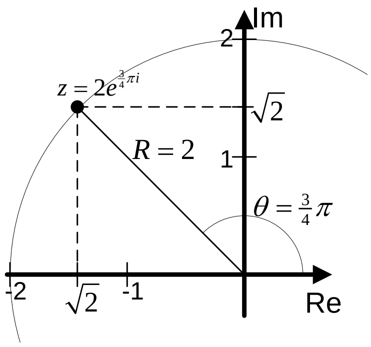
$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \tfrac{2}{3}\pi$$

fordi θ ligger i 2. kvadrant. Da blir

$$z = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{3}{2} i = \underline{\underline{\sqrt{3}\, e^{\frac{2}{3}\pi i}}}.$$

Oppgave 7.4.2

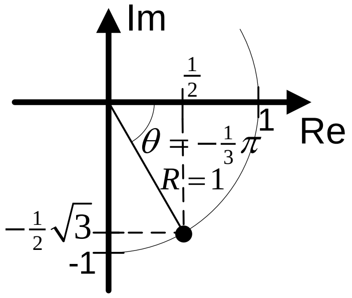
a)



Trekker ei linje som danner en vinkel $\theta = \frac{3}{4}\pi$ med positiv x-akse. Slår en sirkel med radius $R = 2$. I skjæringspunktet ligger $z = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

$$z = 2e^{\frac{3}{4}\pi i} = 2\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)$$
$$= 2\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \underline{\underline{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}}$$

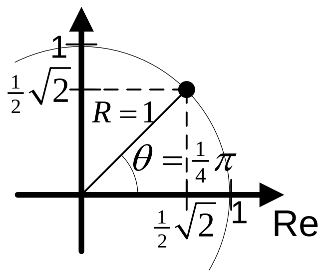
b)



Trekker ei linje som danner en vinkel $\theta = -\frac{1}{3}\pi$ med positiv x-akse. Slår en sirkel med radius $R = 1$. I skjæringspunktet ligger $z = e^{-\frac{1}{3}\pi i}$.

$$z = e^{-\frac{1}{3}\pi i} = \cos\left(-\tfrac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\tfrac{1}{3}\pi\right)$$
$$= \tfrac{1}{2} + i\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i}}$$

c)



Legger først merke til at $\frac{9}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi + 2\pi$, slik at

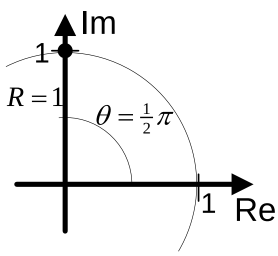
$$z = e^{\frac{9}{4}\pi i} = e^{\frac{1}{4}\pi i + 2\pi i} = e^{\frac{1}{4}\pi i}.$$

Trekker ei linje som danner en vinkel $\theta = \frac{1}{4}\pi$ med positiv x-akse. Slår en sirkel med radius $R = 1$. I skjæringspunktet ligger $z = e^{\frac{1}{4}\pi i}$.

$$z = e^{\frac{1}{4}\pi i} = \cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}}}.$$

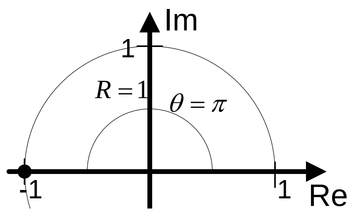
Oppgave 7.4.3

a)



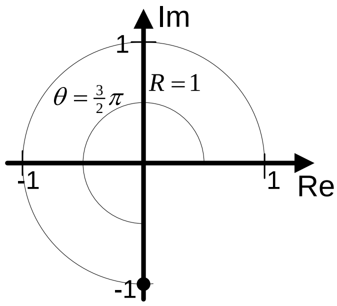
$$e^{\frac{1}{2}\pi i} = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 0 + i \cdot 1 = \underline{\underline{i}}.$$

b)



$$e^{\pi i} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = \underline{\underline{-1}}.$$

c)



$$e^{\frac{3}{2}\pi i} = \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 0 + i(-1) = \underline{\underline{-i}} .$$

d) $$e^{i(\theta \pm n\cdot 2\pi)} = \cos\left(\theta \pm n\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\theta \pm n\cdot 2\pi\right) = \cos\theta + i\sin\theta = \underline{\underline{e^{i\theta}}} .$$

Oppgave 7.4.4

a) $z_1 = -i = \underline{\underline{e^{\frac{3}{2}\pi i}}}$ (se oppg. 4.3c).

$z_2 = -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \underline{\underline{e^{\frac{4}{3}\pi i}}}$.

Mellomregninger:

$$R = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = \underline{1} ,$$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\theta = \tfrac{4}{3}\pi}$$ fordi z_2 ligger i 3. kvadrant.

b) $$z_1\cdot z_2 = e^{\frac{3}{2}\pi i}\cdot e^{\frac{4}{3}\pi i} = e^{\frac{9}{6}\pi i + \frac{8}{6}\pi i} = e^{\frac{17}{6}\pi i} = e^{\left(2\pi + \frac{5}{6}\pi\right)i} = \cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i}} .$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{\frac{3}{2}\pi i}}{e^{\frac{4}{3}\pi i}} = e^{\frac{3}{2}\pi i - \frac{4}{3}\pi i} = e^{\frac{9}{6}\pi i - \frac{8}{6}\pi i} = e^{\frac{1}{6}\pi i} = \cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i}} .$$

$$\frac{z_1}{z_2^{\,2}} = \frac{e^{\frac{3}{2}\pi i}}{\left(e^{\frac{4}{3}\pi i}\right)^2} = e^{\frac{3}{2}\pi i - \frac{8}{3}\pi i} = e^{\frac{9}{6}\pi i - \frac{16}{6}\pi i} = e^{-\frac{7}{6}\pi i} = \cos\left(-\tfrac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\tfrac{7}{6}\pi\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i}} .$$

Oppgave 7.4.5

a) $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \underline{\underline{\cos\theta - i\sin\theta}} .$$

b) Adderer likningene ovenfor, og får

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}} .$$

Trekker likningene i a) fra hverandre:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}} .$$

Oppgave 7.4.6

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \underline{\underline{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}}.$$

Oppgave 7.4.7

Setter $n=2$ i Moivres formel, og får

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

$$\cos^2\theta + 2\cos\theta\cdot i\sin\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

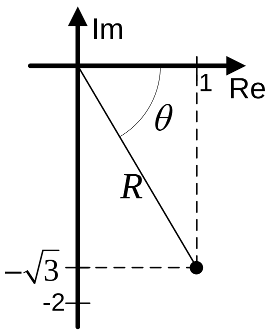
Setter realdelene lik hverandre, og imaginærdelene lik hverandre. Får da:

$$\underline{\underline{\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta}},$$

$$\underline{\underline{\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta}}.$$

Oppgave 7.5.1

a)



$$z = 1 - \sqrt{3}\,i = 2e^{-\frac{1}{3}\pi i}$$

Mellomregninger:

$$R = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = \underline{2},$$

$$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = -\tfrac{1}{3}\pi \text{ (4. kvadrant).}$$

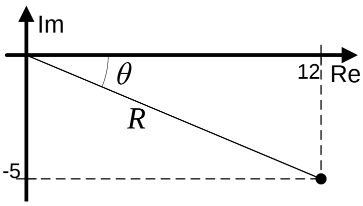
Da blir

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{R}\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \pm\sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\tfrac{1}{6}\pi\right)\right)$$

$$= \pm\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + i\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = \underline{\underline{\pm\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i\right)}}$$

b)



$$z = 12 - 5i = 13e^{\arccos\frac{12}{13}\cdot i}.$$

Mellomregninger:

$$R = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = \underline{13}.$$

Ser da av figuren at

$$\cos\theta = \frac{12}{13}.$$

Da blir

$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{25}{26}} = \pm\frac{5}{\sqrt{26}}.$$

$$\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{26}} = \pm\frac{1}{\sqrt{26}}.$$

For å finne rett fortegn, ser vi av figuren at $\theta \approx -30^\circ$. Da er $\frac{\theta}{2} \approx -15^\circ$ slik at $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ mens $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$. Dette gir at

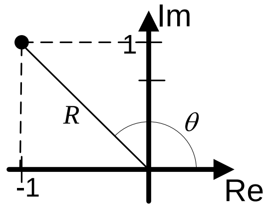
$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=\frac{5}{\sqrt{26}}, \qquad \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Da blir

$$\sqrt{z}=\pm\sqrt{R}\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)=\pm\sqrt{13}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}+i\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)\right)$$

$$=\pm\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\underline{\underline{\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}(5-i)}}$$

c)



$z=-1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

Mellomregninger:

$$R=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},$$

$$\tan\theta=\frac{1}{-1}=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \theta=\tfrac{3}{4}\pi \quad \text{(2. kvadrant).}$$

Nå blir $\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{8}\pi$. De fleste tabeller har ikke eksakte verdier for sinus og cosinus til denne vinkelen. Vi benytter derfor at $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, og at $\frac{\theta}{2}$ ligger i 1. kvadrant. Da blir

$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

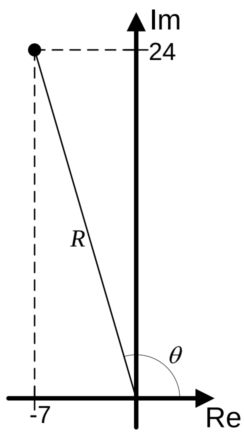
$$\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Da blir

$$\sqrt{z}=\pm\sqrt{R}\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)=\pm\sqrt{\sqrt{2}}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$=\underline{\underline{\pm\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}}$$

d)



$z=-7+24i=\underline{25e^{\arccos\frac{24}{25}i}}$.

Mellomregninger:

$$R=\sqrt{(-7)^2+24^2}=\sqrt{625}=\underline{25},$$

Vi ser at $\frac{\theta}{2}$ blir liggende i 1. kvadrant, og at

$$\cos\theta=\frac{-7}{25}.$$

Da blir

$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{7}{25}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{18}{50}}=\frac{3}{5}.$$

$$\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{7}{25}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{32}{50}}=\frac{4}{5}.$$

Dermed blir

$$\sqrt{z}=\pm\sqrt{R}\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)=\pm\sqrt{25}\left(\frac{3}{5}+i\cdot\frac{4}{5}\right)=\underline{\underline{\pm(3+4i)}}.$$

Oppgave 7.5.2

a) $z^2+(1-i)z-i=0$

$$z=\frac{-(1-i)\pm\sqrt{(1-i)^2-4(-i)}}{2}=\frac{-1+i\pm\sqrt{1-2i+i^2+4i}}{2}=\frac{-1+i\pm\sqrt{2i}}{2}.$$

Må finne kvadratrota:

$$\sqrt{2i}=\left(2e^{\frac{1}{2}\pi i}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\right)=\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)=\underline{1+i}.$$

Dermed blir

$$z=\frac{-1+i\pm\sqrt{2i}}{2}=\frac{-1+i\pm(1+i)}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+i+(1+i)}{2}=\dfrac{2i}{2}=\underline{\underline{i}}\\[2ex]\dfrac{-1+i-(1+i)}{2}=\dfrac{-2}{2}=\underline{\underline{-1}}\end{cases}$$

b) $z^2-3(1+i)z+5i=0$

$$z=\frac{3(1+i)\pm\sqrt{\left(3(1+i)\right)^2-4\cdot5i}}{2}=\frac{3+3i\pm\sqrt{9\left(1+2i+i^2\right)-20i}}{2}$$

$$=\frac{3+3i\pm\sqrt{18i-20i}}{2}=\frac{3+3i\pm\sqrt{-2i}}{2}$$

Må finne kvadratrota:

$$\sqrt{-2i}=\left(2e^{-\frac{1}{2}\pi i}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{4}\pi i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right)=\underline{1-i}$$

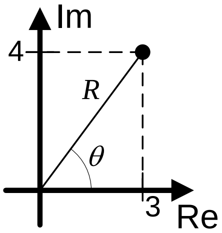
Dermed blir

$$z=\frac{3+3i\pm\sqrt{-2i}}{2}=\frac{3+3i\pm(1-i)}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+3i+(1-i)}{2}=\dfrac{4+2i}{2}=\underline{\underline{2+i}}\\[2ex]\dfrac{3+3i-(1-i)}{2}=\dfrac{2+4i}{2}=\underline{\underline{1+2i}}\end{cases}$$

c) $z^2-(2+4i)z-6=0$

$$z=\frac{-(-(2+4i))\pm\sqrt{(2+4i)^2-4\cdot(-6)}}{2}=\frac{2+4i\pm\sqrt{4+16i-16+24}}{2}$$

$$=\frac{2+4i\pm\sqrt{12+16i}}{2}=\frac{2+4i\pm2\sqrt{3+4i}}{2}=1+2i\pm\sqrt{3+4i}$$



Figuren til venstre viser $3+4i$ i det komplekse planet. Vi ser direkte at $R=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5$, og at $\cos\theta=\frac{3}{5}$. Da blir

$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{8}{10}}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{2}{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\sqrt{3+4i} = \sqrt{R}\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right) = \sqrt{5}\left(\tfrac{2}{\sqrt5}+i\cdot\tfrac{1}{\sqrt5}\right) = \underline{2+i}\,.$$

$$z = 1+2i \pm \sqrt{3+4i} = \begin{cases} 1+2i+(2+i) = \underline{\underline{3+3i}} \\ 1+2i-(2+i) = \underline{\underline{-1+i}} \end{cases}$$

Oppgave 7.5.3

a) $$\sqrt[4]{-1} = (-1)^{\frac14} = \left(e^{\pi i}\right)^{\frac14} = e^{\frac14\pi i} = \cos\left(\tfrac14\pi\right)+i\sin\left(\tfrac14\pi\right) = \tfrac12\sqrt2+\tfrac12\sqrt2\,i = \underline{\underline{\tfrac12\sqrt2(1+i)}}\,.$$

Eller:

$$\sqrt[4]{-1} = (-1)^{\frac14} = \left(e^{(\pi+2\pi)i}\right)^{\frac14} = e^{\frac34\pi i} = \cos\left(\tfrac34\pi\right)+i\sin\left(\tfrac34\pi\right) = -\tfrac12\sqrt2+\tfrac12\sqrt2\,i = \underline{\underline{\tfrac12\sqrt2(-1+i)}}\,.$$

Eller:

$$\sqrt[4]{-1} = (-1)^{\frac14} = \left(e^{(\pi+4\pi)i}\right)^{\frac14} = e^{\frac54\pi i} = \cos\left(\tfrac54\pi\right)+i\sin\left(\tfrac54\pi\right) = -\tfrac12\sqrt2-\tfrac12\sqrt2\,i = \underline{\underline{\tfrac12\sqrt2(-1-i)}}\,.$$

Eller:

$$\sqrt[4]{-1} = (-1)^{\frac14} = \left(e^{(\pi+6\pi)i}\right)^{\frac14} = e^{\frac74\pi i} = \cos\left(\tfrac74\pi\right)+i\sin\left(\tfrac74\pi\right) = \tfrac12\sqrt2-\tfrac12\sqrt2\,i = \underline{\underline{\tfrac12\sqrt2(1-i)}}\,.$$

b) $$\sqrt[3]{-i} = \left(e^{\frac32\pi i}\right)^{\frac13} = e^{\frac12\pi i} = \cos\left(\tfrac12\pi\right)+i\sin\left(\tfrac12\pi\right) = 0+1i = \underline{\underline{i}}\,.$$

Eller:

$$\sqrt[3]{-i} = \left(e^{\left(\frac32\pi+2\pi\right)i}\right)^{\frac13} = e^{\frac76\pi i} = \cos\left(\tfrac76\pi\right)+i\sin\left(\tfrac76\pi\right) = \underline{\underline{-\tfrac12\sqrt3-\tfrac12 i}}\,.$$

Eller:

$$\sqrt[3]{-i} = \left(e^{\left(\frac32\pi+4\pi\right)i}\right)^{\frac13} = e^{\frac{11}{6}\pi i} = \cos\left(\tfrac{11}{6}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{11}{6}\pi\right) = \underline{\underline{\tfrac12\sqrt3-\tfrac12 i}}\,.$$

c) $$\sqrt[4]{-1-i\sqrt3}\,.$$

$$R = \sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt3\right)^2} = \sqrt4 = 2, \qquad \tan\theta = \frac{-\sqrt3}{-1} = \sqrt3 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \tfrac43\pi \text{ (4. kvadrant).}$$

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt3} = \left(2e^{\frac43\pi i}\right)^{\frac14} = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac13\pi i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\tfrac13\pi\right)+i\sin\left(\tfrac13\pi\right)\right) = \underline{\underline{\sqrt[4]{2}\left(\tfrac12+\tfrac12\sqrt3\cdot i\right)}}\,.$$

Eller:

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt3} = \left(2e^{\left(\frac43\pi+2\pi\right)i}\right)^{\frac14} = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac56\pi i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\tfrac56\pi\right)+i\sin\left(\tfrac56\pi\right)\right) = \underline{\underline{\sqrt[4]{2}\left(-\tfrac12\sqrt3+\tfrac12 i\right)}}\,.$$

Eller:

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt3} = \left(2e^{\left(\frac43\pi+4\pi\right)i}\right)^{\frac14} = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac43\pi i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\tfrac43\pi\right)+i\sin\left(\tfrac43\pi\right)\right) = \underline{\underline{\sqrt[4]{2}\left(-\tfrac12-\tfrac12\sqrt3 i\right)}}\,.$$

Eller:

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt3} = \left(2e^{\left(\frac43\pi+6\pi\right)i}\right)^{\frac14} = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{11}{6}\pi i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\tfrac{11}{6}\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{11}{6}\pi\right)\right) = \underline{\underline{\sqrt[4]{2}\left(\tfrac12\sqrt3-\tfrac12 i\right)}}\,.$$

Oppgave 7.6.1

Siden et 3.gradspolynom med reelle koeffisienter kan skrives enten som

$$P(z) = c_3 (z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)$$

der r_1, r_2 og r_3 er reelle tall, eller som

$$P(z) = c_3 (z - r_1)(z - (\alpha + i\beta))(z - (\alpha - i\beta))$$

må en tredjegradslikning ha enten en eller tre reelle røtter. Den kan ikke ha to reelle og en kompleks rot så lenge koeffisientene i polynomet er reelle.

10. Tillegg.

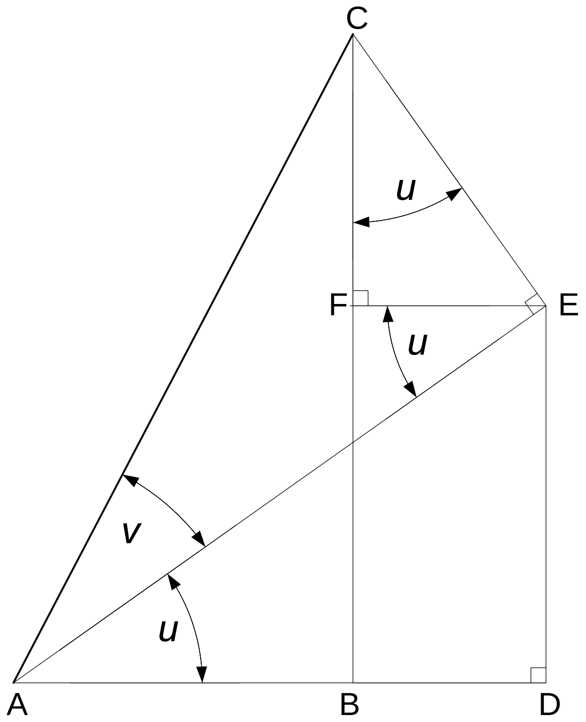
10.1. Sinus og cosinus til en sum av to vinkler.

10.1.1. Geometrisk bevis.

Det vanligste er nok å bevise disse identitetene geometrisk. Det fins flere slike bevis, men jeg kjenner ingen *enkle* geometriske bevis. Det beviset som jeg skal gjennomføre, er nok det minst arbeidskrevende, selv om det krever litt ”triksing”.

I figuren nedenfor er to vinkler *u* og *v* tegnet inn. Videre er linjene DE og BC vinkelrett på AD, og EF står vinkelrett på DE og BC. Dermed finner vi igjen vinkel *v* tre steder i figuren.

Så setter vi i gang:



$$\sin(u+v) = \frac{BC}{AC} = \frac{BF+FC}{AC}$$
$$= \frac{BF}{AC} + \frac{FC}{AC}$$
$$= \frac{DE}{AC} + \frac{FC}{AC}$$
$$= \frac{DE}{AE}\cdot\frac{AE}{AC} + \frac{FC}{CE}\cdot\frac{CE}{AC}$$
$$= \underline{\sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v}$$

$$\cos(u+v) = \frac{AB}{AC} = \frac{AD-BD}{AC}$$
$$= \frac{AD}{AC} - \frac{BD}{AC}$$
$$= \frac{AD}{AC} - \frac{EF}{AC}$$
$$= \frac{AD}{AE}\cdot\frac{AE}{AC} - \frac{EF}{CE}\cdot\frac{CE}{AC}$$
$$= \underline{\cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v}$$

10.1.2. Bevis med identiteter for komplekse tall.

Dersom du har vært borti komplekse tall, vil du vite at

$$e^{iu} = \cos u + i\sin u\,, \qquad e^{iv} = \cos v + i\sin v\,.$$

På samme måte er

$$e^{i(u+v)} = \cos(u+v) + i\sin(u+v) \tag{1}$$

Men

$$\begin{aligned} e^{i(u+v)} &= e^{iu+iv} = e^{iu}\cdot e^{iv} = (\cos u + i\sin u)(\cos v + i\sin v) \\ &= \cos u\cdot\cos v + \cos u\cdot i\sin v + i\sin u\cdot\cos v + i\sin u\cdot i\sin v \qquad (2) \\ &= \cos u\cdot\cos v - \sin u\cdot\sin v + i(\cos u\cdot\sin v + \sin u\cdot\cos v) \end{aligned}$$

Her må realdelen av (1) være lik realdelen av (2), og imaginærdelen av (1) må være lik imaginærdelen av (2). Herav følger de to identitetene vi ønsker å bevise.

10.2. Tidskonstant.

Jeg skal nøye meg med å bevise påstanden for funksjonen

$$y = f(t) = A \cdot e^{-k \cdot t}.$$

Ved et vilkårlig tidspunkt t_1 er

$$y(t_1) = y_1 = A \cdot e^{-k \cdot t_1}.$$

Den deriverte av funksjonen er

$$\frac{dy(t)}{dt} = A \cdot \left(-k \cdot e^{-k \cdot t}\right) = -k \cdot y(t)$$

slik at tangenten i punktet (t_1, y_1) blir

$$y - y_1 = \frac{dy(t_1)}{dt} \cdot (t - t_1) = -k \cdot y(t_1) \cdot (t - t_1) = -k \cdot y_1 \cdot (t - t_1).$$

Denne tangenten skjærer *t*-aksen når $y = 0$. Da er

$$-y_1 = -k \cdot y_1 \cdot (t - t_1) \quad \Leftrightarrow \quad k(t - t_1) = 1.$$

Men $t - t_1$ er jo nettopp lik tidskonstanten τ. Dermed har vi at

$$k \cdot \tau = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \frac{1}{k}.$$

Beviset for at påstanden holder også for funksjonen

$$y = f(t) = A\left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$$

er helt tilsvarende. Du kan selv prøve å gjennomføre det. Bare husk at tangenten skal skjære linja $y = A$, ikke linja $y = 0$ som i beviset ovenfor.

10.3. Komplekse argumenter i funksjonsuttrykk.

Ved enhver anledning har vi stresset at funksjonen $y = f(x) = e^x$ aldri kan få negative funksjonsverdier. Men vi har også sagt at $e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$. Setter vi inn $\theta = \pi$, får vi

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \cdot \sin\pi = -1 + i \cdot 0 = \underline{\underline{-1}}.$$

Eksponentialfunksjonen kan altså bli negativ når argumentet er et komplekst tall.

Vi skal nå vise at flere inngrodde oppfatninger står for fall når vi benytter komplekse argumenter i funksjonsuttrykk.

10.3.1. Logaritmen til komplekse tall.

Du er sikkert overbevist om at vi ikke kan ta logaritmen til negative tall. Men det gjelder bare så lenge vi begrenser oss til *reelle* tall. Dersom vi benytter *komplekse* tall, kan vi ta logaritmen til negative tall, som vi straks kan se.

Ethvert komplekst tall z kan skrives på formen $z = R \cdot e^{i\theta}$. Da får vi at

$$\ln(z) = \ln\left(R \cdot e^{i\theta}\right) = \ln R + \ln\left(e^{i\theta}\right) = \ln R + i\theta .$$

Nå kan vi ta logaritmen til negative tall. Et slikt negativt $-a$ (der a er et positivt, reelt tall) kan alltid oppfattes som et komplekst tall med modulus $R = a$ og argumentvinkel $\theta = \pi$ slik at $-a = a \cdot e^{\pi i}$. Da blir

$$\ln(-a) = \ln\left(a \cdot e^{\pi i}\right) = \ln a + i\pi .$$

Eksempel 10.3.1: Finn $\ln(-1)$ og $\ln(-5)$.

Løsning:

$$\ln(-1) = \ln 1 + i\pi = \underline{\underline{0 + i\pi}}$$

$$\ln(-5) = \underline{\underline{\ln 5 + \pi i}}$$

Og slik kan vi fortsette. Sjekk med din kalkulator! Dersom kalkulatoren benytter minus istedenfor pluss foran imaginærleddet, betyr det at kalkulatoren oppfatter $-a$ som $a \cdot e^{-\pi i}$, noe som er helt i orden.

Logaritmen til negative tall er bare et spesialtilfelle av logaritmen til komplekse tall, noe eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 10.3.2: Finn $\ln(4 + 3i)$.

Løsning: Vi merker oss at

$$R = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\tan\theta = \tfrac{3}{4}.$$

Da blir

$$\ln(4 + 3i) = \underline{\underline{\ln 5 + i\tan^{-1}\left(\tfrac{3}{4}\right)}}.$$

Får du samme svar med dataverktøy?

10.3.2. Må *sin*(x) og *cos*(x) ligge mellom -1 og +1?

Du har sikkert tegnet grafene til $y = \sin x$ og $y = \cos x$ så mange ganger at du er overbevist om at $\sin x$ og cos må ligge mellom -1 og +1. Men er nå det så sikkert? Hva skjer dersom vi benytter komplekse tall? Som en test fikk jeg kalkulatoren til å beregne $\arcsin(2)$ og $\arcsin(-3)$. Svarene ble

$\arcsin(2) = \tfrac{1}{2}\pi + i \cdot \ln\left(\sqrt{3}+2\right)$.

$\arcsin(-3) = -\tfrac{1}{2}\pi + i \cdot \ln\left(2\sqrt{2}+3\right)$.

For å forklare disse mysteriene, må vi benytte disse formlene:

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\cdot\alpha} - e^{-i\cdot\alpha}\right) \quad \text{og} \qquad \cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(e^{i\cdot\alpha} + e^{-i\cdot\alpha}\right).$$

I utgangspunktet er α en reell vinkel målt i radianer. Men hva skjer dersom vi erstatter α med en *kompleks* vinkel $v = x + iy$? Vi prøver:

$$\sin v = \sin(x+iy) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right) = \frac{i}{2i^2}\left(e^{ix}\cdot e^{i^2 y} - e^{-ix}\cdot e^{-i^2 y}\right)$$
$$= \frac{-i}{2}\left(e^{ix}\cdot e^{-y} - e^{-ix}\cdot e^{y}\right).$$

Så benytter vi at $e^{\pm ix} = \cos x \pm i\sin x$ og får

$$\sin v = \frac{-i}{2}\left(e^{ix}\cdot e^{-y} - e^{-ix}\cdot e^{y}\right) = \frac{-i}{2}\left(\left(\cos x + i\sin x\right)e^{-y} - \left(\cos x - i\sin x\right)e^{y}\right)$$
$$= \frac{-i}{2}\left(\cos x\left(e^{-y} - e^{y}\right) + i\sin x\left(e^{-y}+e^{y}\right)\right) = \underline{\sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + i\cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)}$$
$$= \underline{\sin x\cdot\cosh y + i\cos x\cdot\sinh y}$$

Et lite sidesprang: Ser du likheten mellom formelen

$$\sin v = \sin(x+iy) = \sin x\cdot\cosh y + i\cos x\cdot\sinh y$$

og

$$\sin(u+v) = \sin u\cdot\cos v + \cos u\cdot\sin v\,?$$

Tilbake til problemet vårt. Vi skal begrense oss til at $\sin v$ er et reelt tall, men skal droppe kravet om at $-1 \le \sin v \le 1$. Tvert imot skal vi se hva som skjer når $\sin v$ ligger utenfor dette intervallet. Når $\sin v$ er et reelt tall, må

$$\cos x\cdot\sinh y = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x = 0 \quad\vee\quad \sinh y = 0\,.$$

Alternativet $\sinh y = 0$ er ikke aktuelt fordi

$$\sinh y = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{y} - e^{-y} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{y} = e^{-y} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{y = 0}\,,$$

og da er ikke v noen kompleks vinkel. Vi må altså ha at

$$\cos x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm\tfrac{1}{2}\pi \quad\Leftrightarrow\quad \sin x = \pm 1\,.$$

Da blir

$$\sin v = \sin x\cdot\cosh y + 0i = \underline{\pm 1\cdot\cosh y}\,.$$

Nå kan vi sette $\sin v = a$ der $a > 1$. Dette gir

$$\cosh y = a \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\left(e^{y} + e^{-y}\right) = a\,.$$

Multipliserer begge sider med $2e^{y}$ og ordner:

$$\left(e^{y}\right)^2 - 2ae^{y} + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{y} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

som gir

$$y = \ln\left(a \pm \sqrt{a^2 - 1}\right).$$

Vi kan ikke bruke minus foran rottegnet, fordi $\sqrt{a^2-1} < \sqrt{a^2} = a$ slik at $a - \sqrt{a^2-1} < 0$. Det er ikke mulig fordi både a og y etter forutsetningene er reelle tall. Vi får derfor at:

Dersom $\sin v = \pm a$ der $a > 1$, så er

$$v = x + iy = \pm\tfrac{1}{2}\pi + i\ln\left(a + \sqrt{a^2-1}\right).$$

Eksempel 10.3.3: Beregn $\arcsin(2)$ og $\arcsin(-3)$.

Løsning:

$$\arcsin(2) = \tfrac{1}{2}\pi + i\cdot\ln\left(2 + \sqrt{2^2-1}\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\pi + i\cdot\ln\left(\sqrt{3}+2\right)}},$$

$$\arcsin(-3) = -\tfrac{1}{2}\pi + i\cdot\ln\left(3+\sqrt{3^2-1}\right) = -\tfrac{1}{2}\pi + i\cdot\ln\left(3+\sqrt{8}\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\pi + i\cdot\ln\left(2\sqrt{2}+3\right)}}.$$

Dette er de samme uttrykkene som kalkulatoren kom fram til.

På samme måte kan vi handtere cosinus-verdier som ligger utenfor området $[-1, 1]$. Jeg skal bare ta med hovedtrekkene, og overlater til deg å fylle ut mellomregningene.

$$\begin{aligned}\cos(x+iy) &= \tfrac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left((\cos x + i\sin x)e^{-y} + (\cos x - i\sin x)e^{y}\right)\\ &= (\cos x\cdot\cosh y - i\sin x\cdot\sinh y)\end{aligned}$$

For å få reell cosinus-verdi, må vi ha at

$$\sin x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0 \vee x = \pi \quad\Leftrightarrow\quad \cos x = \pm 1.$$

Da blir

$$\cos(x+iy) = \pm a = \pm\cosh y \quad\Leftrightarrow\quad \cosh y = a$$

der a er reell og $a > 1$. Som tidligere fører dette til at

$$y = \ln\left(a \pm \sqrt{a^2-1}\right).$$

Vi bruker bare den positive rota, og summerer opp:

Dersom $\cos v = \pm a$ der $a > 1$, så er $v = x + iy$ der

$$x = \begin{cases}\pi & \text{når} \quad \cos v < -1\\ 0 & \text{når} \quad \cos v > 1\end{cases} \qquad \text{og} \qquad y = \ln\left(a + \sqrt{a^2-1}\right).$$

Eksempel 10.3.4: Beregn $\arccos(2)$ og $\arccos(-3)$.

Løsning:

$$\arccos(2) = i \cdot \ln\left(2 + \sqrt{2^2 - 1}\right) = \underline{\underline{i \cdot \ln\left(\sqrt{3} + 2\right)}},$$

$$\arccos(-3) = \pi + i \cdot \ln\left(3 + \sqrt{3^2 - 1}\right) = \underline{\underline{\pi + i \cdot \ln\left(2\sqrt{2} + 3\right)}}.$$

Hvis du kontrollerer med dataverktøy, kan det hende at du får den kompleks konjugerte av disse verdiene. Det er helt i orden (kan du se hvorfor)?