Bjørn Davidsen

MATEMATIKK FOR INGENIØRER

Derivasjon med anvendelser

Forord.

Kjære student!

Derivasjon er kanskje den matematiske disiplinen som du får mest bruk for i ditt ingeniør-studium. Du må *kunne* teknikkene, og du må *forstå* hva derivasjon innebærer. Dessuten må du vite en del om hva derivasjon kan brukes til.

Første del av dette heftet er viet innlæring av derivasjonsteknikker. I neste del skal du lære om noen anvendelser, og jeg håper at du under veis også får en dypere forståelse av hva den deriverte egentlig er.

Til slutt har jeg tatt med noen tidligere eksamensoppgaver. Men ikke tro at du er ferdig med derivasjon og bruk av derivasjon med dette. De fleste eksamensoppgaver av denne typen inneholder også *integrasjons*problemer, slik at du får bryne deg på derivasjon også etter at du har vært gjennom heftet om integrasjon og går løs på eksamensoppgaver derfra.

Jeg håper at du innser at derivasjon er så viktig at du virkelig gjør deg flid med å lære dette stoffet. Hver time du spanderer på dette, får du igjen med dryge renter senere i studiet.

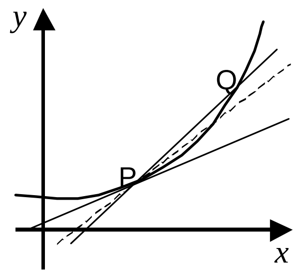
Med hilsen

Bjørn Davidsen

1. Derivasjon

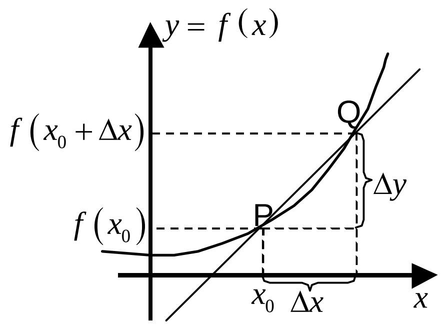
1.1. Definisjon av derivert.

Vi har stor nytte av å vite *hvor raskt* en funksjon vokser eller avtar. Mer presist: Vi ønsker å bestemme *stigningstallet til tangenten til funksjonsgrafen*.



Figuren til venstre viser hvordan vi kan gå fram for å bestemme stigningstallet til denne tangenten i et punkt P. Vi velger et annet punkt Q et lite stykke fra P, trekker ei rett linje gjennom P og Q, og bestemmer stigningstallet for denne rette linja. Så lar vi Q gå mot P langs funksjonsgrafen. Idet Q faller sammen med P blir linja PQ tangent til grafen. Grenseverdien for stigningstallet til linja PQ blir da stigningstallet til tangenten i P.

Denne framgangsmåten forutsetter at grafen til funksjonen er ”glatt” i området rundt P. Mer presist formulert: Vi forutsetter at grenseverdien for stigningstallet til linja PQ eksisterer når Q går mot P.



Nå er tiden inne til å uttrykke seg mer matematisk. Figuren til venstre illustrerer hva vi mener med ”stigningstallet til linja PQ”. Vi har at:

Punktet P har koordinatene $\left(x_0,\ f(x_0)\right)$.

Punktet Q har koordinatene $\left(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x)\right)$.

Stigningstallet til linja PQ blir da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

slik at stigningstallet til tangenten i P blir

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Denne grenseverdien kaller vi ***den deriverte av f i x_0***, og skriver den som $\frac{df(x_0)}{dx}$ eller enklere som $f'(x_0)$. Vi oppsummerer:

La *f* være en funksjon som er definert i et område rundt $x = x_0$.
Hvis grenseverdien

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

eksisterer, sier vi at *f* er ***deriverbar*** i x_0 og skriver

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Vanligvis finner vi en formel for den deriverte som er uavhengig av punktet x_0. Da skriver vi bare

$f'(x)$ eller $\frac{df(x)}{dx}$.

Litt formalisme om terminologien: Vi skriver gjerne $y = f(x)$. Da kan den deriverte skrives $\frac{dy}{dx}$. Her er egentlig kombinasjonen $\frac{d}{dx}$ et *derivasjonssymbol* som forteller at *y* skal deriveres med hensyn på *x*. Men det kan være hensiktsmessig å oppfatte $\frac{dy}{dx}$ som en brøk med en *liten* størrelse *dy* som teller og en *liten* størrelse *dx* som nevner. Formelt er dette helt feil, men det fungerer bra i praksis. Slik uformell "ingeniør-matematikk" vil du støte på mange ganger i dette kurset.

I praksis er det sjelden at vi finner den deriverte direkte ut fra definisjonen. Vi bruker heller et sett *generelle derivasjonsregler* kombinert med derivasjonsformler for spesielle funksjons-typer. Dessuten har vi et knippe *derivasjonsteknikker* som er helt uunnværlige når vi skal derivere mer kompliserte funksjoner.

1.2. Generelle derivasjonsregler.

Vi skal nå se på de generelle derivasjonsreglene. For oversiktens skyld vil jeg konsentrere meg om selve reglene med noen eksempler, og legge opp lenker til utledningene av reglene.

Jeg skal ta utgangspunkt i skrivemåten $y = f(x)$, og skal benytte y' og $f'(x)$ som symbol for den deriverte istedenfor den mer kompliserte (men mer korrekte) skrivemåten $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{df(x)}{dx}$.

På grunnlag av definisjonen av derivasjon kan vi utlede reglene nedenfor:

La *u* og *v* være to funksjoner som er deriverbare i *x*.
La *c* være en konstant.
Da gjelder:

1) $y = c \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot u'(x)$

2) $y = u(x) + v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x) + v'(x)$

3) $y = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

4) $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

Utledningene finner du i et vedlegg.

1.3. Derivasjon av spesielle funksjoner.

Reglene foran er generelle regler som alltid gjelder. Men vi trenger også formler for derivasjon av spesielle funksjonstyper. Vi skal ta disse funksjonstypene etter tur.

1.3.1. Potensfunksjoner.

En *potensfunksjon* er en funksjon av typen

$$y = f(x) = c \cdot x^n$$

der c er en konstant. Den enkleste potensfunksjonen får vi ved å sette $n = 0$. Da blir

$$y = f(x) = c = \text{konstant}\,.$$

En konstant funksjon har pr definisjon stigningstall lik null. Da er også den deriverte lik null. Altså:

$$y = f(x) = c = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad y' = 0\,.$$

Så setter vi $n = 1$ og lar $c = 1$, slik at vi ser på funksjonen

$$y = f(x) = x\,.$$

Dette er ei rett linje med stigningstall lik 1. Da er også den deriverte lik 1. Dette kan vi også se av definisjonen på derivasjon:

$$y' = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \underline{1}\,.$$

Vi har altså overbevist oss om at:

$$y = f(x) = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1$$

Disse reglene er spesialtilfeller av en generell regel, som er vist i et vedlegg:

$$y = f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1} \ \text{ for } \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

Sammen med de generelle regnereglene er vi nå i stand til å derivere både polynomfunksjoner og rasjonale funksjoner.

***Eksempel 1.3.1*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$

b) $y = f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 4)$

c) $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x + 2}$

Løsning:

a) $y' = 2 \cdot 3x^2 - 2x + 0 = \underline{\underline{6x^2 - 2x}}\,.$

b) Dette problemet kan angripes på to måter:

1) Jeg kan multiplisere ut og derivere etterpå. Da får jeg:

$$y = f(x) = \left(x^3 - 1\right)\left(x^2 + 4\right) = x^5 + 4x^3 - x^2 - 4$$

$$\Rightarrow \quad y' = 5x^4 + 4\cdot 3x^2 - 2x - 0 = \underline{\underline{5x^4 + 12x^2 - 2x}}$$

2) Jeg kan bruke regelen for derivasjon av et produkt. Da får jeg:

$$y' = \left(3x^2 - 0\right)\left(x^2 + 4\right) + \left(x^3 - 1\right)\left(2x + 0\right) = 3x^4 + 12x^2 + 2x^4 - 2x$$

$$= \underline{\underline{5x^4 + 12x^2 - 2x}}$$

c) $$y' = \frac{\left(2x - 3 + 0\right)\left(x + 2\right) - \left(x^2 - 3x + 1\right)\left(1 + 0\right)}{\left(x + 2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(2x^2 + 4x - 3x - 6\right) - \left(x^2 - 3x + 1\right)}{\left(x + 2\right)^2} = \underline{\underline{\frac{x^2 + 4x - 7}{\left(x + 2\right)^2}}}$$

Oppgave 1.3.1.

Vi har hittil forutsatt at n er et helt, positivt tall. Men ved å benytte logaritmisk derivasjon kan vi vise at formelen gjelder for alle $n \in \mathbb{R}$. Dette er en svært nyttig utvidelse av bruksområdet for formelen.

Vi summerer opp:

$$\boxed{y = f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1} \text{ for alle } n \in \mathbb{R}.}$$

***Eksempel 1.3.2*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = \sqrt{x}$

b) $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Løsning:

a) $$y = f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}.$$

b) Jeg kan bruke regelen for derivasjon av en brøk. Det er imidlertid lettere å gjøre slik:

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad y' = (-2)\cdot x^{-2-1} = -2\cdot x^{-3} = \underline{\underline{\frac{-2}{x^3}}}.$$

Oppgave 1.3.2.

1.3.2. Trigonometriske funksjoner.

Ramma nedenfor oppsummerer derivasjonsreglene for de trigonometriske funksjonene:

$$y = f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x\,.$$
$$y = f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x\,.$$
$$y = f(x) = \tan x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

De to første reglene er vist i et vedlegg. Den siste er vist i eksemplet nedenfor:

Eksempel 1.3.3: Utled derivasjonsregelen for $\tan x$ på grunnlag av derivasjonsreglene for $\sin x$ og $\cos x$.

Løsning: $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{u^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}}\,.$$

I eksemplene nedenfor er det vist hvordan vi kan kombinere disse reglene med de generelle derivasjonsreglene:

***Eksempel 1.3.4*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = x \cdot \sin x$

b) $y = f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

c) $y = f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

Løsning:

a) $y' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \underline{\underline{\sin x + x \cdot \cos x}}$

b) $$y' = \frac{(0 - (-\sin x)) \cdot x^2 - (1 - \cos x) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 \sin x - 2x + 2x \cos x}{x^4} = \underline{\underline{\frac{x \sin x + 2\cos x - 2}{x^3}}}$$

c) $$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x - \tan x \cdot 1}{x^2} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x}{x^2 \cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{x - \sin x \cdot \cos x}{x^2 \cos^2 x}}}$$

Oppgave 1.3.3.

1.3.3. Inverse trigonometriske funksjoner.

I avsnittet om derivasjon av inverse funksjoner skal vi vise hvordan vi kan komme fram til derivasjonsformlene nedenfor for inverse trigonometriske funksjoner. De kommer spesielt til nytte når vi skal integrere.

$$y = f(x) = \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
$$y = f(x) = \arccos(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
$$y = f(x) = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

1.3.4. Eksponential- og logaritmefunksjoner.

Grunntallet *e* i eksponentialfunksjonen

$$y = f(x) = e^x$$

er valgt spesielt slik at stigningstallet til tangenten skal være lik funksjonsverdien i tangerings-punktet (se vedlegg). Dette gir en svært enkel derivasjonsregel:

$$y = f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x$$

Den tilsvarende derivasjonsregelen for naturlige logaritmer er også enkel, og blir utledet i avsnittet om derivasjon av inverse funksjoner:

$$y = f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$$

Dersom vi bruker et generelt grunntall *a* istedenfor *e*, blir reglene:

$$y = f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad y' = a^x \cdot \ln a$$
$$y = f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

***Eksempel 1.3.5*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = x \cdot \ln x$

b) $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

Løsning:

a) $y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\ln x + 1}}.$

b) $y' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \dfrac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \underline{\underline{\dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}}} = \underline{\underline{\dfrac{1 - \ln x^2}{x^3}}}.$

Oppgave 1.3.4.

1.3.5. Hyperbolske funksjoner.

De deriverte av de hyperbolske funksjonene følger direkte av definisjonene av disse funksjonene:

$$y = f(x) = \sinh(x) = \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh(x).$$
$$y = f(x) = \cosh(x) = \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh(x).$$
$$y = f(x) = \tanh(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Du ser vel likheten med derivasjonsformlene for de trigonometriske funksjonene?

***Eksempel 1.3.6*:** Vis at derivasjonsregelen for $y = \tanh(x)$ stemmer.

Løsning: $y = f(x) = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

$$y' = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$
$$= \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\cosh^2(x)}}}$$

Hvis du nå tror at du kan derivere, tar du fryktelig feil. Det fins en mengde mer sammensatte funksjoner som du ikke kan derivere med disse grunnleggende reglene. Du må nok lære deg noen derivasjonsteknikker – og du må lære dem godt.

Men først skal vi innom *høyere ordens deriverte.*

1.4. Høyere ordens deriverte.

Hittil har vi egentlig bare sett på den ***førstederiverte***. Men vi kan derivere den deriverte på nytt, og får da den ***andrederiverte***. Vi antar som før at

$$y = f(x).$$

Den (første-) deriverte skriver vi som vanlig på formen

$$y' = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Da skriver vi den andrederiverte slik:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

eller enklere: $f''(x)$.

Nå kan jo den andrederiverte deriveres, og vi får den ***tredjederiverte***. Og slik kan vi fortsette.

Generelt skriver vi den ***n'te deriverte*** slik:

$$y^{(n)} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

Eksempel 1.4.1: Finn den 2. og 3. deriverte til

a) $y = f(x) = \sin x - \cos x$

b) $y = f(x) = \ln x$

Løsning:

a) $y' = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x$

$$\Rightarrow \quad y'' = \underline{\underline{-\sin + \cos}}$$

$$\Rightarrow \quad y''' = \underline{\underline{-\cos x - \sin x}}$$

b) $y' = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad y'' = (-1)\cdot x^{-2} = \underline{\underline{\frac{-1}{x^2}}}$

$$\Rightarrow \quad y''' = (-1)\cdot(-2)\cdot x^{-3} = \underline{\underline{\frac{2}{x^3}}}$$

Oppgave 1.4.1.

Nå er du klar til å gå løs på de mer avanserte derivasjonsteknikkene.

1.5. Kjerneregelen.

Mange funksjoner er *sammensatte*, slik at de kan oppfattes som $y = f(u(x))$. Et par eksempler:

$$y = f(x) = e^{-2x} = e^u \text{ der } u = -2x.$$

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{u} \text{ der } u = x^2 + 1.$$
$$y = f(x) = \ln(x-1) = \ln u \text{ der } u = x - 1.$$

Vi kan også komme bort i mer sammensatte funksjoner, som i eksemplet nedenfor:

$$y = f(x) = \sqrt{1 + \sin^2(3x)} = \sqrt{u}$$

der

$$u = 1 + \sin^2(3x) = 1 + v^2$$

der

$$v = \sin(3x) = \sin w$$

der

$$w = 3x.$$

Hele poenget med disse operasjonene er at sammensatte funksjoner skal tenkes bygd opp av enklere funksjoner som vi kan derivere. I det siste eksemplet ovenfor ble *y* bygd opp av $w = 3x$, $v = \sin w$, $u = 1 + v^2$ og $y = \sqrt{u}$, som alle er funksjoner som vi kan derivere. Og nå kommer vi til hovedpoenget:

Anta at en funksjon kan skrives på formen $y = f(x) = g(u(x))$ der både *f*, *g* og *u* er deriverbare funksjoner.
Da er

$$y' = \frac{dg(u)}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx}.$$

Regelen ovenfor kalles ***kjerneregelen***, og er kanskje den derivasjonsteknikken du oftest benytter. Regelen formuleres ofte (litt slurvet) slik:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Denne formuleringen gjør at regelen blir lett å huske. Du skal bare ”skyte inn” *du* i teller og nevner. Regelen blir også lett å utvide, som vi snart skal se.

***Eksempel 1.5.1*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = e^{-2x}$

b) $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $y = f(x) = \ln(x - 1)$

Løsning:

a) $y = e^{-2x} = e^u$ der $u(x) = -2x$.

Da blir

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot (-2) = \underline{\underline{-2e^{-2x}}}.$$

b) $y=\sqrt{x^2-1}=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$ der $u(x)=x^2+1$.

Da blir

$$y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2x+0)=\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\cdot x=\frac{x}{\sqrt{u}}=\underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}}.$$

c) $y=\ln(x-1)=\ln u$ der $u(x)=x-1$.

Da blir

$$y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot(1-0)=\underline{\underline{\frac{1}{x-1}}}.$$

Noen ganger er det gunstig å oppfatte en komplisert funksjon som en kjerne u som selv har en kjerne v som kanskje selv har en kjerne w osv. Da kan kjerneregelen utvides slik:

$$y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

eller

$$y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$$

osv. etter samme system. Se eksemplene nedenfor.

Eksempel 1.5.2: Deriver disse funksjonene:

a) $y=f(x)=\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)}$

b) $y=f(x)=\sqrt{1+\sin^2(3x)}$

Løsning:

a) $y=\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)}=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$

der

$$u=\ln\left(1+x^2\right)=\ln v$$

der

$$v=1+x^2.$$

Da blir

$$y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{1}{v}\cdot(0+2x)=\tfrac{1}{\cancel{2}}u^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\cancel{2}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{x}{1+x^2}=\underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)}\cdot\left(1+x^2\right)}}}$$

b) $y=\sqrt{1+\sin^2(3x)}=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$

der

$$u=1+\sin^2(3x)=1+v^2$$

der

$$v = \sin(3x) = \sin w$$

der

$$w = 3x\,.$$

Da blir

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx} = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(0+2v)\cdot\cos w\cdot 3$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{u}}\cdot\cancel{2}\sin(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3 = \underline{\underline{\frac{3\sin(3x)\cos(3x)}{\sqrt{1+\sin^2(3x)}}}}$$

Oppgave 1.5.1.

Noen slike sammensatte funksjoner forekommer så ofte at du like godt kan lære deg de derivasjonsreglene som kjerneregelen gir:

Dersom a er en konstant, får vi:

$$y = f(x) = e^{a\cdot x} \quad\Rightarrow\quad y' = a\cdot e^{a\cdot x}$$

$$y = f(x) = \ln(a\cdot x) \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{1}{x}$$

$$y = f(x) = \sin(a\cdot x) \quad\Rightarrow\quad y' = a\cdot\cos(a\cdot x)$$

$$y = f(x) = \cos(a\cdot x) \quad\Rightarrow\quad y' = -a\cdot\sin(a\cdot x)$$

$$y = f(x) = \tan(a\cdot x) \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{a}{\cos^2(a\cdot x)}$$

$$y = f(x) = (u(x))^n \quad\Rightarrow\quad y' = n\cdot(u(x))^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$y = f(x) = \sqrt{u(x)} \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\cdot\frac{du}{dx}$$

(som egentlig er et spesialtilfelle av formelen ovenfor med $n = \tfrac{1}{2}$).

Det er fin trening å utlede disse derivasjonsreglene:

Eksempel 1.5.3: Utled reglene i ramma ovenfor.

Løsning: I de 5 første tilfellene innfører vi en kjerne

$$u = a\cdot x \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dx} = a\,.$$

Da får vi:

$$y = e^{a\cdot x} = e^u \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{du}{du}\cdot\frac{du}{dx} = e^u\cdot a = \underline{\underline{a\cdot e^{a\cdot x}}}\,.$$

$$y = \ln(a\cdot x) = \ln u \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot a = \frac{1}{a\cdot x}\cdot a = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}\,.$$

$$y = \sin(a \cdot x) = \sin u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot a = \underline{\underline{a \cdot \cos(a \cdot x)}}.$$

Reglene for $\cos(a \cdot x)$ og $\tan(a \cdot x)$ utledes på helt tilsvarende måte.
De to siste reglene er bare kjerneregelen brukt direkte.

Oppgave 1.5.2.

En liten presisering med tilhørende advarsel til slutt: Når vi skriver

$$y = f(x) = g(u(x)) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

er det underforstått at *y* er en funksjon av *u* alene, og at det ikke forekommer andre variable størrelser. Hvis vi for eksempel har

$$y = f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} = x + \sqrt{u} = x + u^{\frac{1}{2}} \text{ der } u = x^2 + 1,$$

blir det feil å skrive at

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

fordi $y = x + u^{\frac{1}{2}}$ blir en funksjon av *både x* og *u*, ikke bare av *u* alene. Her er det ikke bare tale om en formell feil. Dersom vi (mis)bruker denne skrivemåten, kan vi komme i skade for å derivere slik (for sikkerhets skyld har jeg krysset ut den gale løsningen):

$$\cancel{y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(1 + \tfrac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1}\right) \cdot \frac{du}{dx} = \left(1 + \tfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot 2x = \left(1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}}\right) \cdot 2x = 2x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}.$$

Korrekt derivasjon går ut på at vi deriverer ledd for ledd, og bruker kjerneregelen kun på det siste leddet slik:

$$y' = 1 + \left(\frac{d}{du} u^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{du}{dx} = 1 + \tfrac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot 2x = \underline{\underline{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}}.$$

1.6. Derivasjon av inverse funksjoner.

Anta at vi har en funksjon *f* som vi gjerne vil derivere. Hvis *f* har en invers funksjon f^{-1}, og vi kjenner den deriverte av f^{-1}, kan vi utnytte denne kunnskapen til å finne den deriverte av *f*.

Du husker sikkert at dersom $y = f(x)$, og *f* er strengt voksende eller strengt avtakende i et intervall, så eksisterer en invers funksjon f^{-1}. Mer presist har vi at:

Dersom en funksjon *f* er kontinuerlig i et intervall, og $f'(x)$ har samme fortegn i hele intervallet, så eksisterer det en invers funksjon f^{-1} i dette intervallet.

Når $y = f(x)$, og betingelsen over er oppfylt, er $x = f^{-1}(y)$. Vi hopper bukk over noen formelle betenkeligheter, og skriver

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Teknikken går i korthet ut på at når vi vil finne $y'=\frac{dy}{dx}$, så finner vi først $\frac{dx}{dy}$ på grunnlag av den inverse funksjonen $x=f^{-1}(y)$. Deretter finer vi y'. Dessverre finner vi da y' uttrykt ved *y*, og må omforme svaret slik at vi finner y' uttrykt ved *x*. Eksemplene nedenfor viser framgangsmåten.

***Eksempel 1.6.1*:** Bruk derivasjon av inverse funksjoner til å derivere disse funksjonene:

a) $y=f(x)=\sqrt{x}$ når du vet at $\frac{d}{dy}\left(y^2\right)=2y$ og $y\geq 0$.

b) $y=f(x)=\ln x$ når du vet at $\frac{d}{dy}\left(e^y\right)=e^y$.

c) $y=f(x)=\arcsin x$ når du vet at $\frac{d}{dy}(\sin y)=\cos y$ og $-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$.

d) $y=f(x)=\arctan x$ når du vet at $\frac{d}{dy}(\tan y)=\frac{1}{\cos^2 y}$ og $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

Løsning: Vi ser at i de angitte intervallene eksisterer det inverse funksjoner. Da får vi:

a) Benytter at

$$y=\sqrt{x}\quad\Leftrightarrow\quad x=y^2.$$

Da blir

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}=\underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}.$$

b) Benytter at

$$y=\ln x\quad\Leftrightarrow\quad x=e^y.$$

Da blir

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\underline{\underline{\frac{1}{x}}}.$$

c) Benytter at

$$y=\arcsin x\quad\Leftrightarrow\quad x=\sin y.$$

Da blir

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}.$$

d) Benytter at

$$y=\arctan x\quad\Leftrightarrow\quad x=\tan y.$$

Da blir

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\underline{\cos^2 y}.$$

Men dette svaret må uttrykkes ved $x=\tan y$. Det gjør vi slik:

$$x^2=\tan^2 y=\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}=\frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}.$$

Så ganger vi begge sider av likhetstegnet med $\cos^2 y$, og finner $\cos^2 y$ uttrykt ved x^2:

$$x^2\cos^2 y = 1-\cos^2 y \quad\Leftrightarrow\quad x^2\cos^2 y+\cos^2 y = 1$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x^2+1\right)\cos^2 y = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos^2 y = \underline{\frac{1}{x^2+1}}$$

Dermed har vi at

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \underline{\underline{\frac{1}{x^2+1}}}.$$

Oppgave 1.6.1.

Noen ganger kjenner vi en funksjon, og ønsker å finne den deriverte av den *inverse* funksjonen i ett bestemt punkt. Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 1.6.2: Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = x^3+3x.$$

Vis at *f* har en invers funksjon f^{-1}, og finn $\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right)$ når $x=4$.

Løsning: Vi ser at

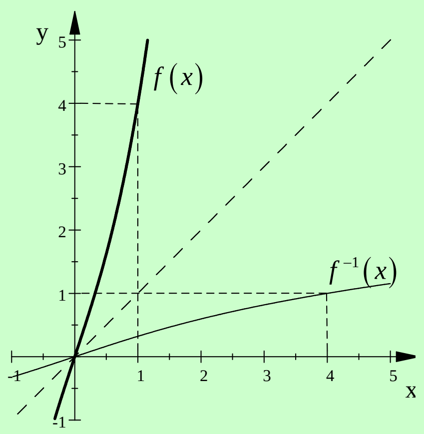
$$\tfrac{dy}{dx} = 3x^2+3 > 0 \text{ for alle } x\in\mathbb{R},$$

slik at det eksisterer en invers funksjon $x = f^{-1}(y)$.

Den deriverte av den inverse funksjonen blir

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{3x^2+3}.$$

Her har vi imidlertid funnet den deriverte med hensyn på *y*, uttrykt ved *x*. Det burde vært omvendt. Nå burde vi egentlig funnet *x* uttrykt ved *y*, satt inn $x(y)$ i uttrykket over slik at vi fikk $\frac{d}{dy}\left(f^{-1}(y)\right)$ uttrykt ved *y*, og deretter byttet om *x* og *y* for å finne $\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right)$.



Men det er ikke enkelt. Heldigvis trenger vi ikke å gjøre det i vårt eksempel. Vi ser at når $x=1$ blir

$$y = f(1) = 1^3+3 = 4,$$

slik at i uttrykket for $\frac{d}{dy}\left(f^{-1}(y)\right)$ blir $x = f^{-1}(4) = 1$. Dermed har vi at

$$\frac{df^{-1}(4)}{dy} = \frac{1}{3\cdot 1^2+3} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}.$$

Figuren til venstre illustrerer situasjonen.

Oppgave 1.6.2.

1.7. Implisitt derivasjon.

Hittil har vi forutsatt at sammenhengen mellom de to variablene *x* og *y* er gitt direkte på formen $y = f(x)$. Men noen ganger er sammenhengen mellom en fri variabel *x* og en avhengig variabel $y = f(x)$ gitt på ***implisitt form***, d.v.s. som et uttrykk som inneholder både *x* og *y*. Slike uttrykk skrives gjerne på formen $g(x, y) = 0$. Når vi skal derivere *y* (d.v.s. finne $y' = \frac{dy}{dx}$) kan vi først løse ut *y* av uttrykket $g(x, y) = 0$ og deretter derivere. Men kommer ofte bort i situasjoner der det er vanskelig eller umulig å løse ut *y*. Da må vi finne y' med ***implisitt derivasjon***.

Denne teknikken er slik: Deriver $g(x, y)$ ved hjelp av vanlige derivasjonsregler. Men ledd som inneholder *y*, deriveres da med kjerneregelen der vi benytter at *y* er en funksjon av *x*:

$$y' = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot y'.$$

Jeg skal vise teknikken gjennom eksempler.

Eksempel 1.7.1: Finn $y' = \dfrac{dy}{dx}$ når sammenhengen mellom *x* og *y* er gitt ved

$$2x^2 + 3y = 6.$$

Løsning: Det naturlige er kanskje å løse *y* av uttrykket. Da får vi:

$$y = f(x) = -\tfrac{2}{3}x^2 + 2,$$

og deretter derivere. Vi får da

$$y' = -\tfrac{2}{3} \cdot 2x = \underline{\underline{-\tfrac{4}{3}x}}.$$

Men vi kan også derivere uttrykket direkte med implisitt derivasjon. Når vi oppfatter *x* som fri variabel og *y* som avhengig variabel, får vi:

$$2x^2 + 3y = 6 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 \cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y' = -\tfrac{4}{3}x}}.$$

I eksemplet ovenfor fant vi den deriverte uttrykt ved bare *x*. Men ofte får vi den deriverte uttrykt ved både *x* og *y*. Noen ganger er det mulig å erstatte *y* med en funksjon av *x*, som neste eksempel viser. Men andre ganger må vi godta at den deriverte er uttrykt ved både *x* og *y*.

Eksempel 1.7.2: Finn $y' = \dfrac{dy}{dx}$ når sammenhengen mellom *x* og *y* er gitt ved

$$x^2 + y^2 = 9$$

(Dette er forresten likningen for en sirkel med sentrum i origo og radius 3).

Løsning: Deriverer ledd for ledd med hensyn på *x*, og får

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y' = -\frac{x}{y}}}.$$

Her kan vi uttrykke *y* ved *x* slik:

$$x^2+y^2=9 \quad\Leftrightarrow\quad y^2=9-x^2 \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm\sqrt{9-x^2}\ .$$

Setter dette inn i uttrykket for y', og får

$$y'=-\frac{x}{y}=-\frac{x}{\pm\sqrt{9-x^2}}=\underline{\underline{\frac{\mp x}{\sqrt{9-x^2}}}}\ .$$

Det er lett å gjøre feil når du skal derivere ledd som inneholder både *x* og *y* slik at du må bruke regneregler for derivasjon av produkt eller brøk i tillegg til kjerneregelen. Neste eksempel belyser dette.

***Eksempel 1.7.3*:** Finn $y'=\dfrac{dy}{dx}$ når sammenhengen mellom *x* og *y* er gitt ved

$$2x-2y+x\cdot y^2+\frac{y}{x}=0$$

Løsning: Deriverer ledd for ledd med hensyn på *x*:

$$2\cdot 1-2\cdot 1\cdot y'+\left(1\cdot y^2+x\cdot 2y\cdot y'\right)+\frac{(1\cdot y')\cdot x-y\cdot 1}{x^2}=0\ .$$

Multipliserer hele likningen med x^2:

$$2x^2-2x^2y'+x^2y^2+2x^3y\cdot y'+x\cdot y'-y=0\ .$$

Samler alle ledd som inneholder y':

$$\left(-2x^2+2x^3y+x\right)\cdot y'=-2x^2-x^2y^2+y \quad\Leftrightarrow\quad y'=\underline{\underline{\frac{y-x^2y^2-2x^2}{2x^3y-2x^2+x}}}\ .$$

Her er det neppe mulig å finne *y* uttrykt ved *x*. Vi lar derfor svaret stå uttrykt ved både *x* og *y*.

Vi tar noen eksempler til:

***Eksempel 1.7.4*:** Finn $y'=\dfrac{dy}{dx}$ av uttrykkene nedenfor med implisitt derivasjon:

a) $e^y-y\cdot e^x=1$

b) $x\cdot y-\ln y=0$

c) $y\cdot\sin(x+y)=2$

Løsning:

a) $e^y\cdot y'-\left((1\cdot y')\cdot e^x+y\cdot e^x\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad y'\cdot\left(e^y-e^x\right)=y\cdot e^x \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y'=\dfrac{y\cdot e^x}{e^y-e^x}}}\ .$

b) $(1\cdot y+x\cdot 1\cdot y')-\dfrac{1}{y}\cdot y'=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x-\dfrac{1}{y}\right)\cdot y'=-y \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y'=\dfrac{y}{\frac{1}{y}-x}=\dfrac{y^2}{1-xy}}}\ .$

c) Innfører

$$u=x+y \quad\Rightarrow\quad u'=\tfrac{du}{dx}=1+y'\ .$$

Det uttrykket som skal deriveres, blir da

$$y \cdot \sin u = 2\,.$$

Deriverer med hensyn på *x*:

$$(1 \cdot y') \cdot \sin u + y \cdot \cos u \cdot u' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' \cdot \sin u + y \cdot \cos u \cdot (1 + y') = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y' \cdot \sin u + y \cdot \cos u + y' \cdot y \cdot \cos u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' \cdot (\sin u + y\cos u) = -y\cos u$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{-y\cos u}{\sin u + y\cos u} = \underline{\underline{\frac{-y\cos(x+y)}{\sin(x+y) + y\cos(x+y)}}}$$

Oppgave 1.7.1.

Det kan være vanskelig å finne høyere ordens deriverte når du bruker implisitt derivasjon, og svaret er uttrykt ved både *x* og *y*. En teknikk går ut på å derivere sluttsvaret på nytt. En annen teknikk går ut på å derivere en av mellomregningene en gang til. Jeg skal vise begge disse teknikkene med utgangspunkt i Eksempel 1.7.2.

Eksempel 1.7.5**:** Finn andrederiverte av *y* med hensyn på *x* når

$$x^2 + y^2 = 9\,.$$

Løsning: Vi fant førstederiverte ved å deriverte ledd for ledd, og fikk

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}\,.$$

Dersom vi nå deriverer sluttsvaret med hensyn på *x*, får vi

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{1 \cdot y - x \cdot (1 \cdot y')}{y^2} = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} \cdot \frac{y}{y} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = \underline{\underline{-\frac{9}{y^3}}}$$

der jeg både har satt inn for $y' = -\frac{x}{y}$ og benyttet at $x^2 + y^2 = 9$.

Men jeg kan også derivere mellom-resultatet

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y \cdot y' = 0\,.$$

Da får jeg

$$1 + \left((1 \cdot y') \cdot y' + y \cdot y''\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot y'' = -1 - (y')^2 = -1 - \left(-\frac{x}{y}\right)^2 = -\frac{y^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2}$$

$$y'' = \frac{1}{y} \cdot \left(-\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right) = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = \underline{\underline{-\frac{9}{y^3}}}$$

Noen ganger kan disse metodene gi tilsynelatende ulike svar. Men (i alle fall dersom du har regnet riktig) vil det alltid være mulig å omforme fra ett svar til et annet med å sette inn kjente sammenhenger.

Oppgave 1.7.2.

1.8. Logaritmisk derivasjon.

Dette er en teknikk som spesielt egner seg til å derivere uttrykk av formen

$$y = \left(f(x)\right)^{g(x)}.$$

Du starter da med å ta logaritmen på begge sider av likhetstegnet:

$$\ln y = \ln\left(\left(f(x)\right)^{g(x)}\right) = g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right).$$

Så deriverer du, og bruker kjerneregelen:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{dg(x)}{dx}\cdot\ln\left(f(x)\right) + g(x)\cdot\left(\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx}\right).$$

Nå gjenstår det bare å derivere $f(x)$ og $g(x)$ og multiplisere med *y*, og du har funnet y'.

***Eksempel 1.8.1*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = x^x$

b) $y = f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

c) $y = f(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{-x}$

Løsning:

a)

$$\ln y = \ln\left(x^x\right) = x\cdot\ln x$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y' = y(\ln x + 1) = \underline{\underline{x^x\cdot(\ln x + 1)}}$$

b)

$$\ln y = \ln\left((\cos x)^{\sin x}\right) = \sin x\cdot\ln(\cos x)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \cos x\cdot\ln(\cos x) + \sin x\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \cos x\cdot\ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$y' = y\left(\cos x\cdot\ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) = \underline{\underline{(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)}}$$

c)

$$y = f(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{-x} = \left(\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-x} = \underline{\left(x^2+1\right)^{-\frac{x}{2}}}$$

$$\ln y = \ln\left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{x}{2}}\right) = -\tfrac{x}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = -\tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) - \tfrac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = -\tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) - \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$y' = y\left(-\tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) - \frac{x^2}{x^2+1}\right) = \underline{\underline{\left(x^2+1\right)^{-\frac{x}{2}}\left(-\tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) - \frac{x^2}{x^2+1}\right)}}$$

Logaritmisk derivasjon kan også benyttes når du skal derivere et produkt eller en brøk, selv om du også kan benytte de vanlige derivasjonsreglene. Se eksemplene nedenfor.

***Eksempel 1.8.2*:** Deriver disse funksjonene med logaritmisk derivasjon.

a) $y = f(x) = \left(x^2 - 2\right)^3 \cdot \sqrt{x+4}$

b) $y = f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1 - \sin^3 x}$

Løsning:

a)
$$\ln y = \ln\left(\left(x^2-2\right)^3 \cdot (x+4)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(x^2-2\right)^3 + \ln(x+4)^{\frac{1}{2}} = \underline{3\ln\left(x^2-2\right) + \tfrac{1}{2}\ln(x+4)}$$
$$\frac{1}{y}\cdot y' = 3\cdot\frac{1}{x^2-2}\cdot 2x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}\cdot 1 = \frac{6x}{x^2-2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}$$
$$y' = y\left(\frac{6x}{x^2-2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}\right) = \underline{\underline{\left(x^2-2\right)^3\cdot\sqrt{x+4}\left(\frac{6x}{x^2-2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}\right)}}$$

b)
$$\ln y = \ln\left(\frac{\cos^2 x}{1-\sin^3 x}\right) = \ln\left(\cos^2 x\right) - \ln\left(1-\sin^3 x\right) = \underline{2\ln(\cos x) - \ln\left(1-\sin^3 x\right)}$$
$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x) - \frac{1}{1-\sin^3 x}\left(-3\sin^2 x\cdot\cos x\right) = \frac{-2\sin x}{\cos x} + \frac{3\sin^2 x\cdot\cos x}{1-\sin^3 x}$$
$$y' = y\left(\frac{-2\sin x}{\cos x} + \frac{3\sin^2 x\cdot\cos x}{1-\sin^3 x}\right) = \underline{\underline{\frac{\cos^2 x}{1-\sin^3 x}\cdot\left(\frac{-2\sin x}{\cos x} + \frac{3\sin^2 x\cdot\cos x}{1-\sin^3 x}\right)}}$$

Du ser sikkert at disse svarene kan omformes på mange måter, og kanskje også forenkles litt.

Oppgave 1.8.1.

Logaritmisk derivasjon kan også brukes til å utlede flere av de generelle derivasjonsreglene på en forbløffende enkel måte:

***Eksempel 1.8.3*:** Bruk logaritmisk derivasjon til å vise at disse derivasjonsreglene gjelder:

a) $y = f(x) = x^n \quad\Rightarrow\quad y' = n\cdot x^{n-1}$ for alle $n\in\mathbb{R}$.

b) $y = f(x) = u(x)\cdot v(x) \quad\Rightarrow\quad y' = u'\cdot v + u\cdot v'$

c) $y = f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \quad\Rightarrow\quad y' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

Løsning:

a)
$$y = f(x) = x^n \quad\Leftrightarrow\quad \ln y = \ln\left(x^n\right) = n\cdot\ln x$$
$$\frac{1}{y}\cdot y' = n\cdot\frac{1}{x} \quad\Leftrightarrow\quad y' = n\cdot\frac{1}{x}\cdot y = n\cdot\frac{1}{x}\cdot x^n = \underline{\underline{n\cdot x^{n-1}}}$$

Legg merke til at alle overgangene gjelder for alle $n\in\mathbb{R}$.

b) $y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{v} \cdot v'$$

$$y' = y\left(\frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{v} \cdot v'\right) = u \cdot v\left(\frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{v} \cdot v'\right) = \underline{\underline{u' \cdot v + u \cdot v'}}$$

c) $y = f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \ln\left(\dfrac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{u} \cdot u' - \frac{1}{v} \cdot v'$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{1}{u} \cdot u' - \frac{1}{v} \cdot v'\right) = \frac{u}{v} \cdot \left(\frac{1}{u} \cdot u' - \frac{1}{v} \cdot v'\right) = \frac{1}{v} \cdot u' - \frac{u}{v^2} \cdot v' = \underline{\underline{\frac{u' \cdot v' - u' \cdot v'}{v^2}}}$$

2. Bruk av derivasjon.

Nå som du er blitt flink til å derivere, er det på tide å ta disse ferdighetene i bruk. Fra videregående skole har du sikkert benyttet derivasjon til å undersøke forløpet til funksjoner ("funksjonsdrøfting"), og spesielt til å finne maksimums- og minimumspunkter. Vi skal nå repetere og kanskje utvide dette temaet, men vi skal også ta for oss mange andre anvendelser.

2.1. Optimering.

Optimering er en fellesbetegnelse for ***maksimering*** og ***minimering***. Vi skal altså finne eventuelle maksimums- og minimumsverdier for en funksjon innenfor funksjonens definisjonsområde. En fellesbetegnelse for maksimums- og minimumsverdier er ***ekstremal-verdier***.

La meg starte med et par definisjoner:

Gitt en funksjon *f* med definisjonsmengde D_f. Da sier vi at:

- $x_{\max}$ er et ***maksimumspunkt*** for *f* dersom $f(x_{\max}) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
  Funksjonsverdien $f(x_{\max})$ kalles ***maksimalverdien*** til *f*.
- $x_{\min}$ er et ***minimumspunkt*** for *f* dersom $f(x_{\min}) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
  Funksjonsverdien $f(x_{\min})$ kalles ***minimalverdien*** til *f*.

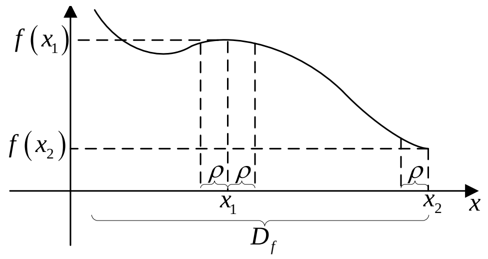
Definisjonene ovenfor gjelder den absolutt største og absolutt minste verdien for *f* i D_f. Disse verdiene kalles også ***globale*** eller ***absolutte*** ekstremalverdier. Men vi er ofte interessert i å kartlegge "humper" og "dumper" på funksjonsgrafen. Slike "humper" og "dumper" kaller vi ***lokale ekstremalverdier*** med tilhørende ***lokale ekstremalpunkter***. (Ordet "optimal" brukes også istedenfor "ekstremal").

Vi prøver oss med en definisjon av slike lokale ekstremalpunkter og -verdier:

Gitt en funksjon *f* med definisjonsmengde D_f. La $x_1 \in D_f$, $x_2 \in D_f$.
Da sier vi at:

- x_1 er et ***lokalt maksimumspunkt*** for *f* dersom det fins et tall $\rho > 0$ slik at
  $f(x_1) \geq f(x)$ for alle $x \in [x_1 - \rho, x_1 + \rho] \cap D_f$.
  Funksjonsverdien $f(x_1)$ er en ***lokal maksimalverdi*** til *f*.
- x_2 er et ***lokalt minimumspunkt*** for *f* dersom det fins et tall $\rho > 0$ slik at
  $f(x_2) \leq f(x)$ for alle $x \in [x_2 - \rho, x_2 + \rho] \cap D_f$.
  Funksjonsverdien $f(x_2)$ er en ***lokal minimalverdi*** til *f*.

Disse definisjonene kan illustreres ved hjelp av figuren nedenfor til venstre.



Der ser vi at vi kan legge en liten omegn rundt x_1 slik at $f(x) \le f(x_1)$ for alle *x*-verdier innenfor denne omegnen. Derfor er x_1 et *lokalt* maksimumspunkt for *f*. Det spiller ingen rolle at vi kan få større funksjonsverdier dersom vi har *x*-verdier utenfor denne omegnen.

Punktet x_2 er et endepunkt for definisjonsmengden, og er selv med i definisjonsmengden. Vi ser at det er mulig å legge en liten omegn rundt x_2 slik at $f(x_2) \le f(x)$ for alle $x \in D_f$ som ligger innenfor denne omegnen. Derfor er x_2 et *lokalt* minimumspunkt for *f*.

La oss et øyeblikk vende tilbake til de *absolutte* maksimums- og minimumspunktene. Kan vi være sikre på at en funksjon alltid har maksimums- og minimumspunktet med tilhørende maksimal- og minimalverdier? Setningen nedenfor gir svaret:

Dersom en funksjon *f* er definert på et *lukket* intervall $[a, b]$ (eller en union av slike lukkede intervall), vil funksjonen alltid ha både maksimums- og minimumspunkter.

Dersom D_f *ikke* er et lukket intervall, *kan* funksjonen ha maksimums- og/eller minimums-punkter. Men vi kan ikke være sikker. La oss illustrere disse påstandene med et eksempel:

Eksempel 2.1.1: Vi har gitt funksjonen $f(x) = x^2$. Har denne funksjonen maksimums- og minimumspunkter i disse tilfellene:

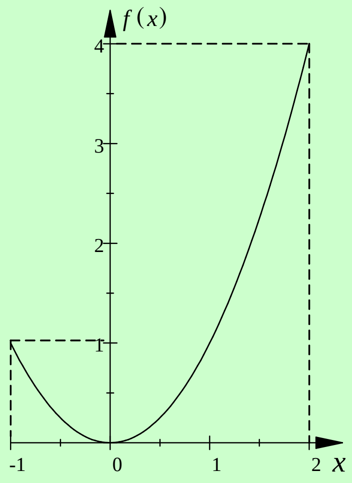
a) $D_f = [-1, 2]$.

b) $D_f = \langle -1, 2]$.

c) $D_f = [-1, 2\rangle$.

d) $D_f = \langle -1, 2\rangle$.

Løsning: Vi starter med å tegne grafen til *f*, se figuren nedenfor til venstre.



a) Når $D_f = [-1, 2]$, er begge endepunktene med i definisjonsmengden. Da har *f* et lokalt maksimum når $x = -1$, et lokalt og absolutt minimum når $x = 0$, og et lokalt og absolutt maksimum når $x = 2$.

b) Når $D_f = \langle -1, 2]$, er ikke endepunktet $x = -1$ med i definisjonsmengden. Da kan ikke *f* ha noe lokalt maksimums-punkt her, selv om vi kan komme så nær dette punktet vi bare vil. Derimot har vi et lokalt og absolutt minimum når $x = 0$, og et lokalt og absolutt maksimum når $x = 2$.

c) Når $D_f = [-1, 2\rangle$, er ikke endepunktet $x = 2$ med i definisjonsmengden. Da kan ikke *f* ha noe maksimumspunkt her, selv om vi kan komme så nær dette punktet vi bare vil. Derimot har vi et lokalt og absolutt minimum når $x = 0$, og et lokalt maksimum når $x = -1$.

d) Når $D_f = \langle -1, 2 \rangle$, er ingen av endepunktene med i definisjonsmengden. Vi har derfor ingen maksimumspunkter i dette tilfellet. Men vi har fremdeles det lokale og globale minimumspunktet når $x = 0$.

Vi summerer opp dette eksemplet, og ser at vi alltid har både maksimums- og minimums-punkter når definisjonsmengden er *lukket* slik som i a). Når definisjonsmengden *ikke* er lukket, *kan* vi ha både maksimums- og minimumspunkter slik som i b). Men vi er ikke garantert at slike punkter eksisterer, noe vi ser i c) og d).

En systematisk jakt på ekstremalpunkter krever skikkelig verktøy. Vi benytter da at:

Vi har *kandidater* til ekstremalpunkter til en funksjon $y = f(x)$ i disse punktene:

- For *x*-verdier der $f'(x) = 0$ fordi tangenten til grafen da er horisontal.
- I endepunktene av D_f, forutsatt at disse endepunktene er med i D_f.
- For *x*-verdier der $f'(x)$ ikke eksisterer.

I tillegg til disse kandidatene for ekstremalpunkter er det nyttig å ha en oversikt over når funksjonen er voksende og når den er avtakende. Da benytter du at:

f er *voksende* når $f'(x) > 0$.

f er *avtakende* når $f'(x) < 0$.

Nå har du det verktøyet du trenger. Du starter med å derivere funksjonen, og setter den deriverte lik null. Da finner du *kandidater* til ekstremalpunkter. Nå kan du avgjøre om disse kandidatene er maksimums- eller minimums-punkter (eller ingen av delene) ved skaffe deg oversikt over *fortegnet* til $f'(x)$. Der hvor $f'(x)$ er positiv, er *f* voksende. Og der hvor $f'(x)$ er negativ, er *f* avtakende.

Eksemplene nedenfor viser hvordan vi benytter dette verktøyet til å finne ekstremalpunkter:

Eksempel 2.1.2: Finn eventuelle lokale og globale ekstremalpunkter til funksjonen

$$y = f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 24x}{12x + 8}, \; D_f = \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{2}{3}\right\}.$$

Løsning: Vi starter med å derivere funksjonen:

$$y'=\frac{\left(3x^2-12x+24\right)\left(12x+8\right)-\left(x^3-6x^2+24x\right)\cdot 12}{\left(12x+8\right)^2}$$

$$=\frac{36x^3+24x^2-144x^2-96x+288x+192-12x^3+72x^2-288x}{\left(12\left(x+\frac{2}{3}\right)\right)^2}$$

$$=\frac{24x^3-48x^2-96x+192}{12^2\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{24\left(x^3-2x^2-4x+8\right)}{12^2\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}=\underline{\frac{x^3-2x^2-4x+8}{6\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}}$$

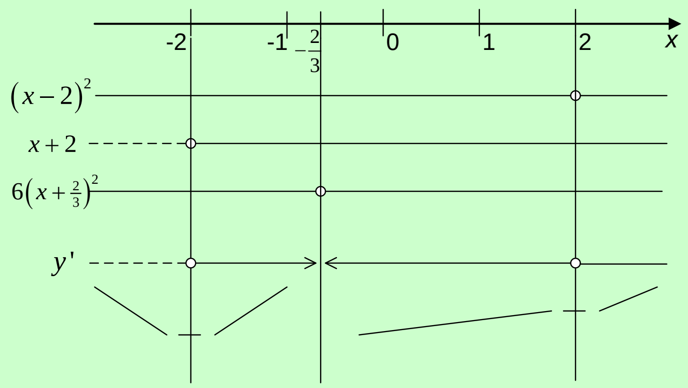
Med litt smartness kan telleren faktoriseres slik:

$$x^3-2x^2-4x+8=\left(x^3-2x^2\right)-\left(4x-8\right)=x^2\left(x-2\right)-4\left(x-2\right)$$

$$=\left(x-2\right)\left(x^2-4\right)=\left(x-2\right)\left(\left(x+2\right)\left(x-2\right)\right)=\underline{\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)}$$

Dermed har vi at

$$y'=\underline{\frac{\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)}{6\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}}.$$



Vi ser direkte at $y'=0$ når $x=-2$ eller når $x=2$. For å avgjøre om dette er maksimal- eller minimal-punkter, setter vi opp fortegnslinja til y' slik det er gjort til venstre. De intervallene der en faktor er positiv, er markert med hel strek. De inter-vallene der en faktor er negativ, er markert med stiplet linje. Punkter der en faktor er lik null, er markert med en null.

I den nederste linja for y' er det avmerket at y' ikke er definert når $x=-\frac{2}{3}$. Dessuten er det tegnet inn linjer som antyder når funksjonen er voksende, når den er avtakende, og når grafen har horisontal tangent.

Vi kan nå slå fast at punktet $x=-2$ er et lokalt minimumspunkt, med minimalverdi

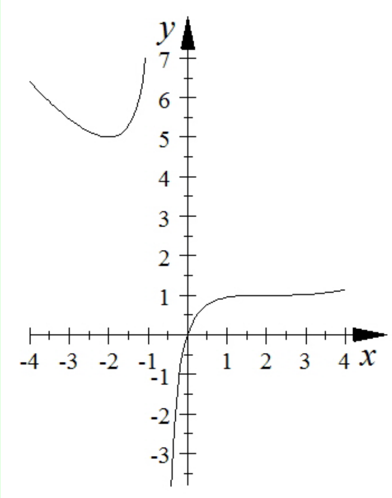
$$f\left(-2\right)=\frac{\left(-2\right)^3-6\cdot\left(-2\right)^2+24\cdot\left(-2\right)}{12\cdot\left(-2\right)+8}=\frac{-8-24-48}{-24+8}=\frac{-80}{-16}=\underline{\underline{5}}.$$

Dette er åpenbart ikke noe absolutt minimum, siden vi kan få lavere funksjonsverdier for eksempel ved å sette inn $x=0$.

Til vår overraskelse ser vi at punktet $x=2$ verken er minimums- eller maksimumspunkt. Det er et ***terrassepunkt***.

Funksjonsuttrykket kan omformes til

$$y=f\left(x\right)=\frac{x^3-6x^2+24x}{12x+8}=\frac{x^2-6x+24}{12+\frac{8}{x}}.$$



Siden leddet x^2 i teller vil dominere når $x \to \pm\infty$, ser vi at

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \to \infty.$$

Dermed har ikke funksjonen noe veldefinert absolutt minimums- eller maksimumspunkt.

Vi summerer opp: Funksjonen har et lokalt minimumspunkt $x = -2$ med minimalverdi $y = 5$. Den har ingen lokale maksimumspunkt. Den har ikke absolutte maksimums- eller minimumspunkt.

Noen ganger er vi også interessert i å vite når $f'(x)$ er voksende og når den er avtakende. Vi innser at når $f'(x)$ er voksende, må $f''(x) > 0$. Da vil også grafen vende sin innhule side *opp*. Vi sier at *f* er ***konveks***.

Når $f'(x)$ er avtakende, må $f''(x) < 0$. Da vil grafen vende sin innhule side *ned*. Vi sier at *f* er ***konkav***.

Funksjonen har et ***vendepunkt*** når den skifter mellom å være konveks og konkav. Dette forekommer oftest når $f''(x) = 0$. Men det kan også forekomme i et ***knekkpunkt***, d.v.s. et punkt der *f* er kontinuerlig samtidig som $f'(x)$ ikke eksisterer.

Vi summerer opp:

- *f* er ***konveks*** (innhul side opp) når $f''(x) > 0$.
  Funksjonen har derfor et *minimumspunkt* når $f'(x) = 0$ samtidig som $f''(x) > 0$.
- *f* er ***konkav*** (innhul side ned) når $f''(x) < 0$.
  Funksjonen har derfor et *maksimumspunkt* når $f'(x) = 0$ samtidig som $f''(x) < 0$.
- *f* har et ***vendepunkt*** når den skifter mellom å være konveks og konkav.

***Eksempel 2.1.3*:** Finn eventuelle ekstremalpunkter og vendepunkter for funksjonen

$$y = f(x) = e^{-x} \cdot \sin x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Løsning: Vi starter med å derivere:

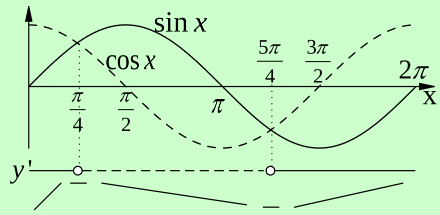
$$y' = -e^{-x} \cdot \sin x + e^{-x} \cdot \cos x = \underline{e^{-x}(\cos x - \sin x)}.$$

Vi vet at $e^{-x} > 0$ for alle *x*. Da får vi:

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = 1 .$$

Innenfor definisjonsområdet er nå $\underline{x = \frac{\pi}{4}}$ eller $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \underline{\frac{5}{4}\pi}$.

Så undersøker vi fortegnet til den deriverte for å avgjøre hva som er maksimums- og hva som er minimumspunkt. Det er ofte vanskelig å sette opp fortegnslinje for trigonometriske uttrykk. En metode er å merke av de x-verdiene der uttrykket er lik null, og deretter beregne fortegnet i ett punkt i hvert intervall mellom disse nullpunktene. Da vil fortegnet være det samme i hele intervallet. I dette tilfellet er det imidlertid enklere å tegne grafene til $\sin x$ (hel strek) og $\cos x$ (stiplet) i samme koordinatsystem, slik det er gjort nedenfor til venstre. Da får vi at:



$$\cos x - \sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x > \sin x$$
når
$$0 < x < \tfrac{\pi}{4} \text{ og når } \tfrac{5}{4}\pi < x < 2\pi .$$
Siden e^{-x} alltid er positiv, får vi den fortegnslinja for y' som er tegnet inn nederst på figuren.

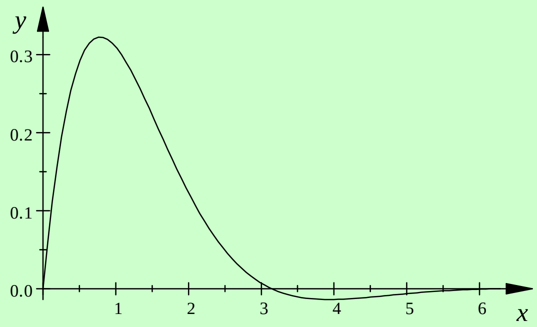
Her er det faktisk lettere å benytte y'' for å avgjøre hva som er maksimums- og hva som er minimumspunkt. Vi får

$$y' = e^{-x}\left(\cos x - \sin x\right) \quad \Rightarrow \quad y'' = -e^{-x}\left(\cos x - \sin x\right) + e^{-x}\left(-\sin x - \cos x\right) = \underline{-2e^{-x}\cos x} .$$

Siden faktoren $-2e^{-x}$ alltid blir negativ, ser vi at:

$y'' < 0$ slik at vi får et *maksimalpunkt* når $x = \frac{\pi}{4}$.

$y'' > 0$ slik at vi får et *minimalpunkt* når $x = \frac{5}{4}\pi$.



Vi får vendepunkt når $y'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0$. Innenfor definisjonsmengden betyr det at vi får vendepunkt når $\underline{\underline{x = \frac{\pi}{2}}}$ og når $\underline{\underline{x = \frac{3}{2}\pi}}$.

Vi ser hvordan disse resultatene stemmer overens med grafen som er tegnet til venstre.

Til slutt må vi summere opp de optimal-punktene og -verdiene vi finner.

Siden begge ytterpunktene er med i definisjonsmengden, får vi:

Lokale minimumspunkter

$\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = \frac{5}{4}\pi}}$

med minimalverdier henholdsvis

$$f\left(0\right) = e^{-0}\sin\left(0\right) = \underline{\underline{0}}$$

og

$$f\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) = e^{-\frac{5}{4}\pi}\sin\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) \approx \underline{\underline{-0.014}} .$$

Lokale maksimumspunkter

$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}}}$ og $\underline{\underline{x = 2\pi}}$

med maksimalverdier henholdsvis

$$f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}} \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \approx \underline{\underline{0.32}}$$

og

$$f\left(2\pi\right) = e^{-2\pi} \sin\left(2\pi\right) = \underline{\underline{0}}.$$

Vi får globalt maksimum $\underline{\underline{0.32}}$ for $\underline{\underline{x = \tfrac{\pi}{4}}}$, og globalt minimum $\underline{\underline{-0.014}}$ for $\underline{\underline{x = \tfrac{5}{4}\pi}}$.

Vi får vendepunkter når $x = \underline{\underline{\tfrac{\pi}{2}}}$ og når $x = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}\pi}}$, med funksjonsverdier henholdsvis

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \approx \underline{\underline{0.21}} \text{ og } f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3}{2}\pi} \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) \approx \underline{\underline{-0.0090}}.$$

Oppgave 2.1.1, Oppgave 2.1.2.

2.2. Økonomiske anvendelser av derivasjon.

Økonomer er svært opptatte av maksimering og minimering. Bedriftsøkonomene benytter da matematiske modeller for inntekter og kostnader, og vil gjerne innrette seg slik at overskuddet (profitten) blir størst mulig. Sosialøkonomene er mer interessert i å få størst mulig nytte av de tilgjengelige ressursene. Uansett problemstilling benyttes derivasjon i stor grad. I dette lille notatet skal jeg bare antyde noe om hvordan derivasjon kan anvendes, og vil konsentrere meg om bedriftsøkonomiske anvendelser. Dette skyldes bl.a. at jeg må begrense meg til problemer med kun *en* variabel. I de fleste praktiske situasjonene (spesielt innenfor sosialøkonomi) må vi imidlertid benytte funksjoner av flere variable. Men det ligger utenfor rammen av dette lille avsnittet.

2.2.1. Kostnader, inntekter og profitt.

Når vi skal lage modeller over produksjonskostnader, er det vanlig å starte med noen *faste kostnader* som påløper uavhengig av hvor mange enheter som produseres, i alle fall innen visse grenser. Dette kan være renter på lån, avskrivninger, kommunale avgifter, husleie, kostnader til lys og oppvarming, osv. osv. Slike kostnader skal vi kalle K_0.

Så har vi kostnader som er proporsjonale med antall enheter som produseres. Dersom vi produserer x enheter, og kostnadene pr enhet er K_1, får vi nå en ***kostnadsfunksjon***

$$K\left(x\right) = K_0 + K_1 x.$$

Nå er det vanlig å anta at med store produksjonsserier oppnår man rasjonaliseringsgevinster. Kostnadsfunksjonen blir da

$$K\left(x\right) = K_0 + K_1 x - K_2 x^2$$

der K_2 er så liten at leddet $K_2 x^2$ først får betydning når x er relativt stor.

Men hvis x blir for stor (vi produserer mer enn vi egentlig har kapasitet til), risikerer vi at det påløper ekstra kostnader til overtidslønn, ekstra slitasje fordi vi ikke får tid til å vedlikeholde produksjonsutstyret, eller liknende. Vi må derfor foreta enda en justering av kostnadsfunksjonen, og benytter

$$K\left(x\right) = K_0 + K_1 x - K_2 x^2 + K_3 x^3$$

der K_3 er et svært lite tall slik at leddet K_3x^3 først får betydning når *x* blir svært stor.

Koeffisientene K_0, K_1, K_2 og K_3 må tilpasses til forholdene i den enkelte bedrift.

Så skal vi se på inntektene ved salg av produktene. Dersom salgsprisen pr enhet er lik *p*, er ***inntektsfunksjonen***

$$I(x) = p \cdot x$$

der *x* er antall solgte enheter.

Det er vanlig å anta at alle produserte enheter blir solgt. Da er *overskuddet* (*profitten*) gitt ved en ***profittfunksjon***

$$\pi(x) = I(x) - K(x) = p \cdot x - \left(K_0 + K_1x - K_2x^2 + K_3x^3\right)$$
$$= -K_0 + (p - K_1)x + K_2x^2 - K_3x^3$$

Vi vil nå innrette oss slik at profitten blir størst mulig. For å finne maksimalpunktet for profittfunksjonen, deriverer vi slik eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 2.2.1: En kostnadsfunksjon er gitt ved

$$K(x) = 400 + 60x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{120}x^3,$$

mens salgsprisen pr enhet er $p = 90$. Anta at alle produserte enheter blir solgt. Finn den produksjonsmengden *x* som gir størst profitt.

Løsning: Vi setter opp profittfunksjonen

$$\pi(x) = I(x) - K(x) = 90x - \left(400 + 60x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{120}x^3\right) = \underline{-\tfrac{1}{120}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 30x - 400}.$$

Deriverer:

$$\pi'(x) = -\tfrac{1}{40}x^2 + x + 30.$$

$$\pi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{40}x^2 + x + 30 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{40}\right)\cdot 30}}{2\cdot\left(-\frac{1}{40}\right)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{-\frac{1}{20}} = \begin{cases} -20\cdot(-1+2) = -20 \\ -20\cdot(-1-2) = 60 \end{cases}$$

Siden vi må ha $x \geq 0$, er $x = 60$ eneste brukbare kandidat for maksimal profitt. Ser at

$$\pi''(x) = -\tfrac{1}{20}x + 1$$

slik at

$$\pi''(60) = -\tfrac{1}{20}\cdot 60 + 1 = -2.$$

Dermed vet jeg at profittfunksjonen er konkav rundt $x = 60$, slik at profitten er størst når $x = \underline{\underline{60}}$.

[Oppgave 2.2.1]().

2.2.2. Grensekostnad, -inntekt og -profitt.

En økonom vil definere ***grensekostnad*** som kostnadsøkingen ved å produsere *en* enhet til. Når vi benytter matematiske modeller, gjør vi det litt annerledes:

La $K(x)$ være kostnadene ved å produsere x enheter. La $\Delta K = K(x+\Delta x) - K(x)$ være kostnadsøkingen når antall produserte enheter øker med Δx. Da defineres ***grensekostnaden*** som

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}.$$

Den oppmerksomme leser vil kjenne igjen uttrykket i ramma ovenfor som den deriverte av kostnadsfunksjonen. Nå definerer vi ***grenseinntekt*** og ***grenseprofitt*** på helt tilsvarende måte:

Grensekostnaden er $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = K'(x)$.

Grenseinntekten er $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = I'(x)$.

Grenseprofitten er $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \pi(x)}{\Delta x} = \pi'(x)$.

Når vi husker at

$$\pi(x) = I(x) - K(x)$$

får vi ved derivasjon at

$$\pi'(x) = I'(x) - K'(x).$$

Vi vet at profitten er størst når $\pi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I'(x) = K'(x)$. Dermed har vi vist en av de mest fundamentale sammenhengene innenfor bedriftsøkonomi:

Profitten er størst når grenseinntekten er lik grensekostnaden.

En våken leser vil forhåpentlig murre litt nå. Selv om $\pi'(x) = 0$, er det jo ikke sikkert at profitten er *størst*. Den kan jo hende at profitten er *minst*! Men med de kostnads- og inntekts-funksjonene vi opererer med, kan du i `Oppgave 2.2.2` vise at vi i praksis kan være sikre på at profitten virkelig er *størst* når grenseinntekten er lik grensekostnaden.

En annen viktig størrelse er ***enhetskostnaden***, som er de samlede kostnader delt på antall produserte enheter. Med andre ord:

Enhetskostnaden $E(x) = \frac{K(x)}{x}$.

Ikke bland sammen enhetskostnad og grensekostnad!

Det er god bedriftsøkonomi å innrette seg slik at enhetskostnaden blir minst mulig. Da er

$$E'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K'(x)\cdot x-K(x)\cdot 1}{x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad K'(x)\cdot x-K(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad K'(x)=\frac{K(x)}{x}$$

Med andre ord:

Enhetskostnaden er minst når enhetskostnaden er lik grensekostnaden.

Også her vil nok vår skeptiske leser kreve bevis for at vi virkelig får *minst* og ikke *størst* enhetskostnad når grensekostnad er lik enhetskostnad. Men med vår kostnadsfunksjon får vi:

$$E(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{K_0}{x}+K_1-K_2x+K_3x^2$$

slik at

$$E'(x)=-\frac{K_0}{x^2}-K_2+2K_3x\,.$$

Av dette uttrykket ser vi at når x er liten, blir $E'(x)$ negativ slik at enhetskostnaden avtar når x øker. Men når x er tilstrekkelig stor, vil leddet $2K_3x$ dominere slik at enhetskostnaden vokser når x øker. Altså må $E(x)$ ha en minimumsverdi for en og kun en verdi av x, og det er nettopp den x-verdien vi finner ved å sette grensekostnad lik enhetskostnad.

2.2.3. Elastisiteter.

Når det er en sammenheng mellom to størrelser x og y, vil en liten endring av den ene størrelsen føre til at også den andre størrelsen endres. Økonomene definerer da:

Elastisiteten av y med hensyn på x er

$$\mathrm{El}_x(y)=\frac{\text{relativ endring av } y}{\text{relativ endring av } x}=\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}$$

Når vi lager matematiske modeller, er det naturlig å anta at y er en funksjon av x slik at $y=y(x)$. Da er det naturlig å revidere definisjonen av ***elastisitet*** slik:

Elastisiteten av y med hensyn på x er

$$\mathrm{El}_x(y)=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\cdot\frac{x}{y}=\frac{dy(x)}{dx}\cdot\frac{x}{y(x)}$$

All erfaring tilsier at det er en sammenheng mellom prisen *p* på en vare og omsetningen *x*. Settes prisen *p* ned, vil *x* øke. Vi ser da bort fra noen sære ”status”-varer der en øking av prisen på visse merkevarer gir økt status for de som bruker denne merkevaren, slik at pris-øking faktisk kan gi *økt* omsetning av denne merkevaren.

Vi har definert inntektsfunksjonen som $I(x) = p \cdot x$. Men hvis *x* avhenger av *p*, er det mer naturlig å skrive

$$I(p) = p \cdot x(p).$$

Anta at vi fritt kan fastsette prisen *p* selv, og vil innrette oss slik at inntekten blir størst mulig. Da vil vi fastsette *p* slik at

$$I'(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \cdot x(p) + p \cdot \frac{dx(p)}{dp} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{x(p)} \cdot \frac{dx(p)}{dp} = -1.$$

Størrelsen $\frac{p}{x(p)} \cdot \frac{dx(p)}{dp}$ kalles gjerne ***priselastisiteten***, og gir forholdet mellom relativ endring av omsetning *x* og relativ endring av pris *p*. Vi ser at:

Dersom omsetningen $x(p)$ avhenger av prisen *p*, er inntekten $I(p) = p \cdot x(p)$ størst når ***priselastisiteten*** $\frac{p}{x(p)} \cdot \frac{dx(p)}{dp} = -1$.

Eksempel 2.2.2: Et fotball-lag har erfart at når billettprisen er 100 kr pr billett, kommer det 3000 tilskuere til hver kamp. Laget har også funnet ut at hver gang billettprisen økes med 10 kr, reduseres tilskuertallet med 200.

a) Finn tilskuertallet *x* som funksjon av billettprisen *p*.

b) Finn den billettprisen som gir størst inntekt.

Løsning:

a) Når *x* reduseres med 200 hver gang *p* øker med 10, må vi ha en lineær sammenheng mellom *x* og *p*:

$$x - x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta p}(p - p_0) \quad \Leftrightarrow \quad x - 3000 = \frac{-200}{10}(p - 100)$$

$$\Leftrightarrow \quad x(p) = -20(p - 100) + 3000 = -20p + 2000 + 3000 = \underline{\underline{-20p + 5000}}$$

b) Inntekten er størst når priselastisiteten er lik -1:

$$\frac{p}{x(p)} \cdot \frac{dx(p)}{dp} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{-20p + 5000} \cdot (-20) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -20p = 20p - 5000$$

$$\Leftrightarrow \quad -40p = -5000 \quad \Leftrightarrow \quad p = \underline{\underline{125}}$$

Eksempel 2.2.3: Vis at dersom omsetningen *x* avhenger av prisen *p* som

$$x(p) = \frac{A}{p^a},$$

er priselastisiteten konstant lik $-a$.

Løsning: Vi setter

$$x(p) = A \cdot p^{-a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx(p)}{dp} = A \cdot (-a) \cdot p^{-a-1}.$$

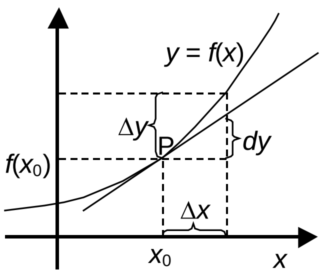
Priselastisiteten blir da

$$\frac{p}{x(p)} \cdot \frac{dx(p)}{dp} = \frac{p}{\frac{\cancel{A}}{p^a}} \cdot \cancel{A}(-a)\,p^{-a-1} = p \cdot p^a(-a)\,p^{-a-1} = p^{1+a-a-1} \cdot (-a) = p^0 \cdot (-a) = \underline{\underline{-a}}.$$

Oppgave 2.2.3

2.3. Tilvekstformel og differensial.

2.3.1. Tilvekstformelen.



Figuren til venstre viser grafen til en funksjon $y = f(x)$. Punktet P har koordinatene $(x_0,\ f(x_0))$.

Vi gir *x* et lite tillegg Δx. Dersom vi går langs *grafen til f*, får *f* et tillegg Δy når *x* får et tillegg Δx. Men dersom vi går langs *tangenten* i P, får *y* et tillegg dy når *x* får et tillegg Δx.

Vi vet at den deriverte av *f* i punktet P er lik stigningstallet til tangenten i P. Av figuren ser vi at dersom vi går langs *tangenten* i P, er stigningstallet

$$a = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy}{\Delta x} \quad \Leftrightarrow \quad dy = \frac{df(x_0)}{dx} \cdot \Delta x.$$

Men dersom Δx er svært liten, vil tangenten være svært nær funksjonsgrafen. Vi gjør ikke noen alvorlig feil dersom vi setter $\Delta y \approx dy$. Da får vi at

Vi har en funksjon $y = f(x)$. Et punkt P på grafen har koordinatene $(x_0, f(x_0))$. Anta at *y* får et tillegg Δy når *x* får et tillegg Δx. Dersom Δx er svært liten, har vi at

$$\Delta y \approx \frac{df(x_0)}{dx} \cdot \Delta x.$$

Denne formelen kaller vi ***tilvekstformelen***.

***Eksempel 3.1*: En terning har sidekant x_0. På grunn av oppvarming øker lengden av sidekanten med Δx. Finn en tilnærmet formel for hvor mye volumet av terningen øker.**

Løsning: Volumet av terningen er

$$V(x) = x^3.$$

Tilvekstformelen gir at voluminkingen blir

$$\Delta V \approx \frac{dV(x_0)}{dx} \cdot \Delta x = \underline{\underline{3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x}}.$$

Merknad 1: Vi kan kontrollere resultatet ved å finne en *eksakt* formel. Før oppvarmingen var volumet

$$V_0 = x_0^{\ 3}.$$

Etter oppvarmingen er terningens volum blitt

$$V = (x_0 + \Delta x)^3 = x_0^{\ 3} + 3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Volum*økingen* er da

$$\Delta V = V - V_0 = \left(x_0^{\ 3} + 3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right) - x_0^{\ 3}$$

$$= \underline{3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}$$

Men vi har forutsatt at Δx er svært liten sammenliknet med x_0. Da kan vi se bort fra de to siste leddene (de blir mikroskopiske), slik at vi sitter igjen med at

$$\Delta V \approx 3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x,$$

som er samme resultat som vi fant ved hjelp av tilvekstformelen.

Merknad 2: Vi er ofte mer interessert i den *relative* (eller prosentvise) tilveksten enn i den absolutte tilveksten. Vi definerer:

Dersom en størrelse y_0 får en tilvekst Δy, er den relative tilveksten

$$\frac{\Delta y}{y_0}.$$

I vårt eksempel blir den relative tilveksten

$$\frac{\Delta V}{V_0} \approx \frac{3x_0^{\ 2} \cdot \Delta x}{x_0^{\ 3}} = \underline{3\frac{\Delta x}{x_0}}.$$

Vi ser at den relative volumøkingen er 3 ganger så stor som den relative økingen i sidelengde. Dette innebærer at hver gang sidelengden øker med 1%, vil volumet øke med (omtrent) 3%.

Merknad 3: Dersom økingen i sidelengde (og i volum) skyldes en temperaturøking ΔT, kan vi vise eksperimentelt at

$$\Delta x \approx \alpha \cdot x_0 \cdot \Delta T$$

der α er en konstant som kalles *den lineære utvidelseskoeffisienten*, og at

$$\Delta V \approx \gamma \cdot V_0 \cdot \Delta T$$

der γ er en konstant som kalles *volum-utvidelseskoeffisienten*.

Men tilvekstformelen gir at

$$\Delta V \approx 3x_0^{\,2} \cdot \Delta x \approx 3x_0^{\,2} \cdot \alpha x_0 \Delta T = 3\alpha x_0^{\,3} \Delta T = 3\alpha \cdot V_0 \cdot \Delta T \,.$$

Dette medfører at vi må ha

$$\gamma \approx 3\alpha$$

noe som også bekreftes eksperimentelt.

Eksempel 2.3.2: Fra fysikken har vi at når et legeme kastes ut med startfart v_0 under en vinkel θ med horisontalplanet, er den horisontale kastevidden gitt ved

$$s = \frac{v_0^{\,2}}{2g}\sin(2\theta)$$

der g er tyngdens akselerasjon. Finn en tilnærmet formel for den relative økingen i kastevidde når utkastvinkelen er $\theta_0 = 30^\circ$ og øker med en liten størrelse $\Delta\theta$.

Løsning: Vi oppfatter strekningen s som funksjon av θ, d.v.s.

$$s = f(\theta) = \frac{v_0^{\,2}}{2g}\sin(2\theta)\,.$$

Ved hjelp av kjerneregelen får vi at

$$\Delta s \approx \frac{df(\theta)}{d\theta}\Delta\theta = \frac{v_0^{\,2}}{2g}\cos(2\theta)\cdot 2\cdot\Delta\theta = \frac{v_0^{\,2}}{g}\cos(2\theta)\cdot\Delta\theta\,.$$

Den relative økingen i kastevidde blir da

$$\frac{\Delta s}{s_0} \approx \frac{\frac{v_0^{\,2}}{g}\cos(2\theta_0)\cdot\Delta\theta}{\frac{v_0^{\,2}}{2g}\sin(2\theta_0)} = 2\cdot\frac{\cos(2\theta_0)}{\sin(2\theta_0)}\cdot\Delta\theta = 2\cdot\frac{\cos(2\cdot 30^\circ)}{\sin(2\cdot 30^\circ)}\cdot\Delta\theta = 2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\cdot\Delta\theta = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\Delta\theta}}$$

Merk at $\Delta\theta$ må oppgis i radianer, siden derivasjonsreglene for de trigonometriske funksjonene forutsetter at vinklene er gitt i radianer.

Oppgave 2.3.1.

2.3.2. Differensial.

La oss gå tilbake til sammenhengen

$$dy = \frac{df(x_0)}{dx}\cdot\Delta x$$

der Δx er øking i x-verdi, mens dy er øking i y-verdi når vi går langs *tangenten* til funksjons-grafen i P. Økingen i funksjonsverdi dersom vi får langs *grafen*, har vi kalt Δy. Vi skal nå la Δx være så liten at vi med god samvittighet kan sette $\Delta y = dy$. For å markere dette, erstatter vi også Δx med dx. Da har vi at

$$dy = \frac{df(x_0)}{dx}\cdot dx$$

der vi antar at dx er så liten at vi ikke bryr oss om at vi egentlig går langs tangenten til grafen istedenfor langs grafen selv. Størrelsen *dy* kalles gjerne ***differensialet til funksjonen f***. det er vanlig å sløyfe referansen til punktet x_0, og bare skrive

$$dy = \frac{df(x)}{dx} \cdot dx .$$

I uttrykket ovenfor er $\frac{d}{dx}$ *ett derivasjonssymbol* som angir at vi skal derivere $f(x)$, mens *dy* på venstre side av likhetstegnet og *dx* helt til høyre kan oppfattes som (meget små) størrelser. Mer presist er *dy* øking i funksjonsverdi når *x* øker med en svært liten størrelse *dx*, og du går langs tangenten. Da kan vi dele på *dx* på begge sider av likhetstegnet, og får

$$dy = \frac{df(x)}{dx} \cdot dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} .$$

Størrelsen $\frac{dy}{dx}$ kan altså oppfattes som en brøk som er lik den deriverte av $y = f(x)$. Dette er bakgrunnen for at vi noen ganger oppfatter $\frac{dy}{dx}$ som en brøk, og noen ganger som symbol for at $y = f(x)$ skal deriveres med hensyn på *x*.

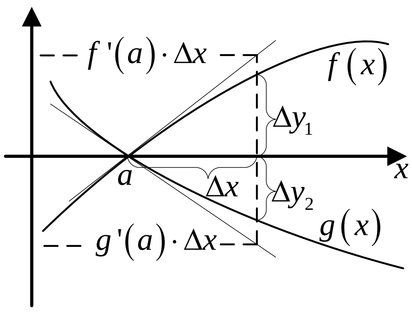
2.4. Bestemmelse av grenseverdier (L'Hôpitals regel).

Vi har tidligere sett at vi kan få problemer med å bestemme grenseverdier av formen "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$". L'Hôpitals regel er et nyttig redskap til å bestemme slike grenseverdier. Vi skal først se på " $\frac{0}{0}$"-formen.

La *f* og *g* være to funksjoner som begge er deriverbare for $x = a$.
Dersom $f(a) = 0$ og $g(a) = 0$, er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Bevis-skisse: Figuren nedenfor til venstre viser grafene til to funksjoner *f* og *g* som er slik at $f(a) = 0$ og $g(a) = 0$. La *x* være et punkt nær *a* slik at $x = a + \Delta x$ der Δx er svært liten. Siden vi har forutsatt at $f(a) = 0$, gir tilvekstformelen at



$$f(x) = \Delta y_1 \approx f'(a) \cdot \Delta x .$$

Siden $g(a) = 0$, gir et tilsvarende resonnement at

$$g(x) = \Delta y_2 \approx g'(a) \cdot \Delta x .$$

Da blir

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{g'(x) \cdot \Delta x} = \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Jo mindre Δx er, jo bedre blir tilnærmelsen. Når $\Delta x \to 0$, kan vi erstatte ≈ med =. Da får vi

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

som vi skulle vise.

Dersom også $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ blir et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, deriverer vi bare teller og nevner en gang til.

Eksempel 2.4.1: Bruk L'Hôpitals regel til å bestemme disse grenseverdiene:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

Løsning:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}\left(=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)\cdot 2}{1}=\frac{2\cos 0}{1}=\frac{2\cdot 1}{1}=\underline{\underline{2}}.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\left(=\frac{1-\cos 0}{0^2}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0-(-\sin x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\left(=\frac{\sin 0}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1-0}=\frac{\frac{1}{1}}{1}=\underline{\underline{1}}.$

Oppgave 2.4.1.

Hittil har vi brukt L'Hôpitals regel på "$\frac{0}{0}$"-uttrykk. Men det fins en variant av L'Hôpitals regel som gjelder for "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk. Den ser slik ut:

La f og g være to funksjoner som begge er deriverbare når $x \to a$, og som begge går mot $\pm\infty$ når $x \to a$. Da er

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Et formelt bevis er kronglete. Men du finner en skisse til et litt lurvete bevis i et vedlegg.

Hittil har vi forutsatt at x går mot en endelig verdi a. Men L'Hôpitals regel gjelder også dersom $x \to \pm\infty$ slik setningene nedenfor angir. Først en variant som gjelder for "$\frac{0}{0}$"-uttrykk:

La f og g være to funksjoner som begge er deriverbare når $x \to \pm\infty$, og der $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.
Da er

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Så en variant som gjelder for "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk:

La f og g være to funksjoner som begge er deriverbare når $x \to \pm\infty$, og som begge går mot $\pm\infty$ når $x \to \pm\infty$. Da er

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

***Eksempel 2.4.2*:** Bruk L'Hôpitals regel til å bestemme grenseverdien

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

Løsning:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \left(= \dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2x} \left(= \dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2} \to \infty$.

Denne grenseverdien eksisterer ikke.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} \left(= \dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \underline{\underline{0}}$.

Eksemplene ovenfor illustrerer en generell regel: Når $x \to \pm\infty$ vil e^x-faktorer dominere over x^n-faktorer, som igjen vil dominere over $\ln x$-faktorer.

[`Oppgave 2.4.2`]().

Vær nøye med å kontrollere at du virkelig har et "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk før du bruker L'Hôpitals regel. Hvis du for eksempel skal beregne

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x},$$

får du

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

slik at denne grenseverdien ikke eksisterer. Du må ikke begynne å derivere teller og nevner i slike situasjoner.

Vi har flere former for ubestemte uttrykk som vi ikke har sett på hittil. En av dem er "$0\cdot\infty$"-uttrykk. Slike uttrykk må omformes til enten "$\frac{\infty}{\infty}$" eller "$\frac{0}{0}$"-formen. Ofte er flere forskjellige omforminger mulig, og det gjelder å velge den som gir enklest regninger. Hvis du er riktig uheldig, bruker du en omforming som bare gjør problemet verre og verre.

***Eksempel 2.4.3*:** Bruk L'Hôpitals regel til å bestemme disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x\right)$

Løsning:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right)\left(=0\cdot(-\infty)\right).$

Prøver omformingen

$$x\cdot\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\ln x}{x^{-1}}.$$

Dette gir

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}\cdot\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{-1}=\underline{\underline{0}}.$$

Jeg kunne også prøvd omformingen

$$x\cdot\ln x=\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}=\frac{x}{\left(\ln x\right)^{-1}}.$$

Men her vil derivasjon av teller og nevner gi

$$\frac{1}{-\left(\ln x\right)^{-2}\cdot\frac{1}{x}}=-x\cdot\left(\ln x\right)^2$$

som er et verre problem enn det vi startet med. Dersom vi prøver å gjenta bruken av L'Hôpitals regel, blir uttrykket bare verre og verre.

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x\right)\left(=0\cdot\infty\right).$

Jeg prøver omformingen

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}{\cos x}.$$

Da blir

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x\right)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{1\cdot\sin x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x}{-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(-1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x}{\sin x}\right)=-1-\frac{0\cdot 0}{1}=\underline{\underline{-1}}$$

[**Oppgave 2.4.3.**]

En annen form for ubestemte uttrykk er "$\infty - \infty$"-formen. Her kan vi prøve å omforme til "$\frac{\infty}{\infty}$" eller "$\frac{0}{0}$"-formen, for eksempel ved å samle uttrykket på en fellesnevner slik som neste eksempel viser:

Eksempel 2.4.4: Finn

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

Løsning: Direkte innsetting av $x=0$ gir et "$\infty - \infty$"-uttrykk. Vi omformer derfor slik:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x\cdot \sin x}\left(=\frac{\sin 0-0}{0\cdot \sin 0}=\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{1\cdot \sin x + x\cdot \cos x}\left(=\frac{\cos 0 -1}{1\cdot \sin 0 + 0\cdot \cos 0}=\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x - 0}{\cos x + \left(1\cdot \cos x + x\cdot(-\sin x)\right)}\\
&= \frac{-\sin 0 - 0}{\cos 0 + \left(1\cdot \cos 0 + 0\cdot(-\sin 0)\right)} = \frac{0}{1+1-0}=\frac{0}{2}=\underline{\underline{0}}
\end{aligned}$$

Oppgave 2.4.4.

Vi skal til slutt se på grenseverdier for uttrykk av formen

$$y=f(x)=\left(u(x)\right)^{v(x)}.$$

Da forekommer det at $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ gir uttrykk av formen "0^0", "∞^0" eller "1^∞". Alle disse formene har til felles at grenseverdien avhenger av om grunntallet eller eksponenten vil dominere når $x \to a$.

For å kunne bruke L'Hôpitals regel, omformer vi slik:

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a}\left(e^{\ln y}\right) = e^{\lim\limits_{x\to a}(\ln y)} = e^L \text{ der } L=\lim_{x\to a}(\ln y).$$

Når $y=u^v$ (der det er underforstått at både u og v er funksjoner av x), blir

$$L=\lim_{x\to a}(\ln y)=\lim_{x\to a}\left(\ln\left(u^v\right)\right)=\lim_{x\to a}(v\cdot \ln u).$$

Hvis vi er heldige og dyktige, kan vi bruke L'Hôpitals regel til å finne denne grenseverdien. Deretter blir $\lim\limits_{x\to a} y = e^L$. Vi summerer opp:

Dersom $\lim\limits_{x\to a}\left(\left(u(x)\right)^{v(x)}\right)$ gir uttrykk av formen "0^0", "∞^0" eller "1^∞", beregner vi først

$$L=\lim_{x\to a}\left(\ln\left(u^v\right)\right)=\lim_{x\to a}(v\cdot \ln u).$$

Deretter blir

$$\lim_{x\to a}\left(\left(u(x)\right)^{v(x)}\right)=e^L.$$

Eksempel 2.4.5: Finn disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\tan x\right)^{\cos x}$

Løsning:

a) Dette er et "0^0"-uttrykk. Da blir

$$L = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x^x\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot \ln x\right) = 0$$

ifølge Eksempel 4.3a. Dermed har vi at

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^L = e^0 = \underline{\underline{1}}.$$

b) Dette er et "1^∞"-uttrykk. Da blir

$$L = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot \ln\left(x+1\right)\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(x+1\right)}{x}\left(=\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{0+1} = \underline{1}$$

Dermed har vi at

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}} = e^L = e^1 = \underline{\underline{e}}.$$

(Dette bør ikke komme som noen overraskelse dersom du kjenner definisjonen på tallet *e*).

c) Dette er et "∞^0"-uttrykk. Da blir

$$L = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\ln\left(\left(\tan x\right)^{\cos x}\right)\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\cos x\cdot \ln\left(\tan x\right)\right)\left(=0\cdot\ln\infty = 0\cdot\infty\right)$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\left(\tan x\right)}{\left(\cos x\right)^{-1}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\cancel{\frac{1}{\cos^2 x}}}{\left(-1\right)\cdot\cancel{\left(\cos x\right)^{-2}}\cdot\left(-\sin x\right)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{0}{1^2} = \underline{0}$$

Dermed har vi at

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\tan x\right)^{\cos x} = e^L = e^0 = \underline{\underline{1}}.$$

Oppgave 2.4.5.

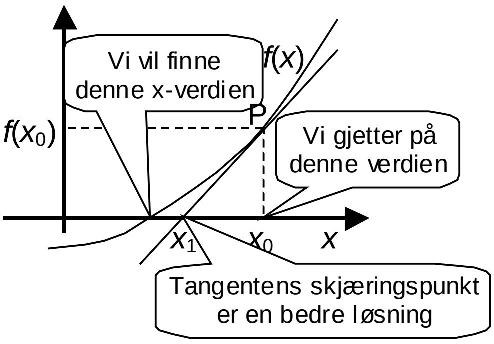
2.5. Numerisk løsing av likninger (Newtons metode).

I praktisk arbeid kommer vi ofte bort i likninger som ikke lar seg løse eksakt. Da må vi benytte en eller annen metode for å finne en tilnærmet løsning. Vi sier at vi løser likningen ***numerisk***.

Det er utviklet mange slike metoder. De fleste krever at du først gjetter på en løsning. Deretter beregnes en ny løsning av likningen som forhåpentlig er bedre enn den første gjetningen. Med utgangspunkt i den nye (og bedre) løsningen kan du beregne en enda mer nøyaktig løsning. Og slik fortsetter du inntil løsningene ser ut til å stabilisere seg. Men hvis du er uheldig med valg av start-løsning (eller hvis likningen er spesielt ekkel) *kan* du risikere at de nye løsningene kommer stadig lengre vekk fra riktig verdi istedenfor å komme stadig nærmere.

Du må også være klar over at disse metodene vanligvis kun finner *en* løsning selv om likningen har flere løsninger.

Alle kalkulatorer og dataprogram som kan løse likninger, benytter en eller annen slik metode. Vi skal nå se på ***Newtons metode*** som kanskje er den vanligste.



Metoden forutsetter at likningen er på formen

$$f(x) = 0$$

(merk nullen på høyre side av likhetstegnet). Vi tegner grafen til $f(x)$, og ønsker å finne den x-verdien der grafen skjærer x-aksen. Dette er illustrert på figuren til venstre.

For å finne denne x-verdien, gjetter vi først på et skjæringspunkt som vi skal kalle x_0. Vi beregner funksjonsverdien $f(x_0)$, og merker av punktet P med koordinater $(x_0, f(x_0))$. Så trekker vi tangenten til grafen i P. Likningen til denne tangenten er

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Denne tangenten vil normalt skjære x-aksen i et punkt x_1 som er en bedre løsning av likningen enn vår første gjetning x_0. Vi finner dette punktet ved å sette inn $y = 0$ i tangent-likningen. Vi får da:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}.$$

Denne prosessen kan vi gjenta inntil vi får skjæringspunkt for tangenten som er tilstrekkelig nær grafens skjæringspunkt med x-aksen. Vi får da nye skjæringspunkter slik:

$$\underline{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}, \qquad \underline{x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}}, \qquad \text{osv...}$$

Vi summerer opp:

Vi kan finne stadig bedre tilnærmede løsninger av likningen

$$f(x) = 0$$

ved å gjette på en startløsning x_0, og deretter rekursivt finne stadig bedre løsninger ved hjelp av formelen

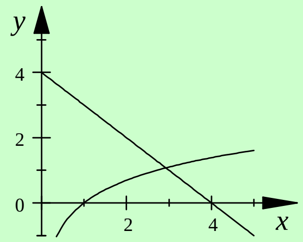
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

***Eksempel 2.5.1*: Løs likningen**

$\ln x = 4 - x$

numerisk med Newtons metode.

Løsning:



Vi starter med å skissere grafene til $y = \ln x$ og $y = 4 - x$ i samme koordinatsystem som vist til venstre. Vi ser at grafene skjærer hverandre nær $x = x_0 = 3$, som blir utgangspunkt for de videre beregningene. Selv en unøyaktig skisse vil vanligvis gi bra nok startverdi. Så omformer vi likningen til

$$\ln x + x - 4 = 0$$

og danner funksjonen

$$f(x) = \ln x + x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \tfrac{1}{x} + 1.$$

En følge av stadig bedre (håper vi…) løsninger får vi av den rekursive likningen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln x_n + x_n - 4}{\frac{1}{x_n} + 1}.$$

Vi setter i gang:

$$x_1 = x_0 - \frac{\ln x_0 + x_0 - 4}{\frac{1}{x_0} + 1} = 3 - \frac{\ln 3 + 3 - 4}{\frac{1}{3} + 1} = \underline{2.92604}.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{\ln x_1 + x_1 - 4}{\frac{1}{x_1} + 1} = 2.92604 - \frac{\ln(2.92604) + 2.92604 - 4}{\frac{1}{2.92604} + 1} = \underline{2.92627}.$$

$$x_3 = x_2 - \frac{\ln x_2 + x_2 - 4}{\frac{1}{x_2} + 1} = 2.92627 - \frac{\ln(2.92627) + 2.92627 - 4}{\frac{1}{2.92627} + 1} = \underline{2.92627}.$$

Videre regninger vil ikke gi noen forbedring. Vi har altså funnet løsningen $\underline{\underline{x = 2.92627}}$ som bør være korrekt med 6 gjeldende sifre.

En liten sluttmerknad: Den rekursive likningen kan forenkles litt i dette tilfellet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\ln x_n + x_n - 4}{\frac{1}{x_n} + 1} = \frac{x_n\left(\frac{1}{x_n} + 1\right) - (\ln x_n + x_n - 4)}{\frac{1}{x_n} + 1} = \frac{1 + x_n - \ln x_n - x_n + 4}{\frac{1}{x_n} + 1} = \underline{\frac{x_n(5 - \ln x_n)}{1 + x_n}}.$$

Denne formen gir litt mindre tallregning.

Oppgave 2.5.1.

2.6. Sammenheng mellom endringshastigheter.

I mange praktiske situasjoner er en størrelse *y* avhengig av en annen størrelse *x*. Så endrer *x* seg, og vi vet hvor fort *x* endrer seg. Hvor fort vil da *y* endre seg?

Slike problem kan formuleres mer matematisk: Anta at vi kjenner en sammenheng mellom *x* og *y*. La *t* være symbol for *tid*. Da vil $\frac{dx}{dt}$ angi hvor fort *x* endrer seg når *t* øker, d.v.s. at $\frac{dx}{dt}$ er et mål for endringshastigheten til *x*. På samme måte blir $\frac{dy}{dt}$ et mål for endringshastigheten til *y*. Finn en sammenheng mellom $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$.

Slike problem kan løses på flere måter. Jeg skal demonstrere to metoder:

Metode 1: Dersom vi kjenner en matematisk sammenheng mellom *x* og *y*, for eksempel på formen $y = f(x)$, kan vi derivere med kjerneregelen:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Dette gir en sammenheng mellom $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$.

Samme framgangsmåte kan også brukes dersom sammenhengen mellom *x* og *y* er implisitt gitt.

Metode 2: Når *x* endres med en *liten* størrelse Δx vil *y* endres med en *liten* størrelse Δy. Dersom det er mulig å sette opp en sammenheng mellom *endringene* Δx og Δy, kan vi deretter prøve å finne en sammenheng mellom $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ og $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Så lar vi $\Delta t \to 0$, og vi har en sammenheng mellom $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$.

Jeg vil vise begge disse metodene med et eksempel:

***Eksempel 2.6.1*:** En oppblåst ballong har form som ei kule med radius *r*. På grunn av en lekkasje siver det ut luft av ballongen.

a) Hvor raskt endres radien når du vet hvor raskt lufta siver ut av ballongen?

b) Hvor raskt endres radien i det øyeblikk radien er 10cm, og det siver ut 2.0 liter luft per minutt?

Løsning: Det første problemet er å oversette opplysningene til matematisk språkdrakt:

- ”Hvor raskt radien endres” må oversettes til $\frac{dr}{dt}$ (radiens endringshastighet målt i for eksempel cm/minutt).
- ”Hvor raskt lufta siver ut av ballongen” må oversettes til $\frac{dV}{dt}$ (volumets endringshastighet målt i for eksempel cm^3/minutt).

Problemet består altså i å finne en sammenheng mellom $\frac{dr}{dt}$ og $\frac{dV}{dt}$. Jeg skal benytte de to metodene etter tur.

Metode 1: Jeg vet at volumet til ei kule er

$$V(r) = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Jeg deriverer med hensyn på tiden *t*, og får

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \tfrac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = \underline{4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}}.$$

Denne likningen gir oss den ønskede sammenhengen mellom $\frac{dr}{dt}$ og $\frac{dV}{dt}$.

Av opplysningene i b) vet vi at

$$\frac{dV}{dt} = -2.0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

(minus fordi volumet avtar når det siver luft ut av ballongen), og at $r = 0.10\text{m}$. Da får vi:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4\pi (0.10\text{m})^2} \cdot \left(-2.0\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}^3}{\text{min}}\right) \approx \underline{\underline{-0.016\frac{\text{m}}{\text{min}}}}.$$

Det vil si at i det øyeblikk radien er 10 cm, reduseres radien med en hastighet på 1.6 cm/min. Denne hastigheten vil imidlertid endres etter hvert som radien endres.

Metode 2: Nå benytter jeg at overflaten av ei kule er

$$A(r) = 4\pi r^2 .$$

Når radien *r* endres med en *liten* størrelse Δr, blir volumendringen

$$\Delta V \approx A(r)\cdot \Delta r = 4\pi r^2 \cdot \Delta r$$

(volum = grunnflate ganger høyde). Så deler vi med et *kort* tidsintervall Δt og får

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \approx 4\pi r^2 \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Når nå $\Delta t \to 0$, vil denne sammenhengen gå mot

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

som er det samme som vi fikk med metode 1. Den videre regningen er den samme som med metode 1.

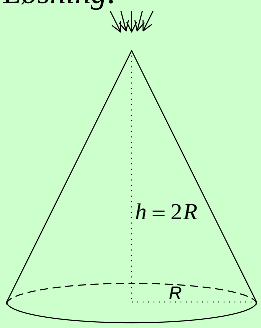
Legg merke til en viktig detalj: Selv om du kjenner en del opplysninger (som i del b av eksemplet), må du finne en generell sammenheng mellom endringshastighetene før du benytter disse opplysningene. Dersom du setter inn de kjente opplysningene for tidlig, risikerer du at du ikke får utført de nødvendige derivasjonene.

Hvilken metode er best? Dersom det er mulig å sette opp en sammenheng mellom *x* og *y*, vil jeg anbefale metode 1. Men dersom det ser umulig ut, må du ty til metode 2. Uansett metode: Det vanskeligste punktet er ofte å oversette oppgaveteksten til matematisk språkdrakt der du identifiserer hvilke endringshastigheter som inngår i problemet.

Neste eksempel er nesten et "standard-eksempel" som forekommer i mange varianter:

Eksempel 2.6.2: En sandhaug har form av en kjegle med spissen opp. Ved hjelp av et transportband tilføres det hele tiden $1.5\,\text{dm}^3$ sand pr sekund. Kjeglen står på et horisontalt underlag, og er hele tiden formet slik at høyden er dobbelt så stor som radien. Hvor fort øker høyden i det øyeblikket høyden er $2.00\,\text{m}$?

Løsning:



Sandhaugen (uten transportband) er vist på figuren til venstre. Vi ønsker å finne hvor fort høyden øker, d.v.s. at vi vil finne $\frac{dh}{dt}$.

Vi vet at det tilføres $1.5\,\text{dm}^3$ sand pr sekund. Da er $\frac{dV}{dt} = 1.5\frac{\text{dm}^3}{\text{s}}$.

Volumet av en slik kjegle er

$$V = \tfrac{1}{3}\cdot \pi R^2 \cdot h .$$

Siden vi er ute etter en sammenheng mellom $\frac{dh}{dt}$ og $\frac{dV}{dt}$, er det naturlig å uttrykke volumet ved høyden alene. Nå har vi at

$$h = 2R \quad \Leftrightarrow \quad R = \tfrac{1}{2}h$$

slik at

$$V = \tfrac{1}{3}\cdot \pi R^2 \cdot h = \tfrac{1}{3}\cdot \pi\left(\tfrac{1}{2}h\right)^2 \cdot h = \underline{\tfrac{1}{12}\pi h^3}\,.$$

Da blir

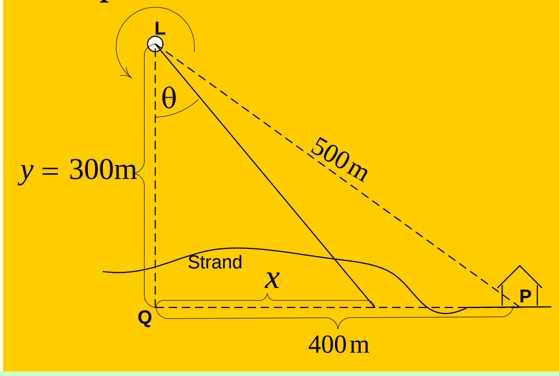
$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(h)}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \tfrac{1}{12}\pi\cdot 3h^2\cdot\frac{dh}{dt} = \tfrac{1}{4}\pi h^2\cdot\frac{dh}{dt} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dh}{dt} = \underline{\frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt}}\,.$$

Nå gjenstår det bare å sette inn de oppgitte verdiene:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{4}{\pi\cdot(2.00\,\mathrm{m})^2}\cdot 1.5\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}} = \frac{4}{\pi\cdot(2.00\,\mathrm{m})^2}\cdot 1.5\frac{(0.1\mathrm{m})^3}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{0.00048\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}\,.$$

Vi avslutter med et vanskeligere eksempel:

***Eksempel 2.6.3*:**



Ei roterende fyrlykt L står på en holme 500 m fra Petters hus P. Lykta sender ut en smal lysstråle som roterer en hel omdreining pr minutt. Petter vil gjerne vite hvor fort lysstrålen beveger seg bortover stranda idet den passerer huset hans. Kan du hjelpe ham?

Anta at stranda er rettlinjet ved Petters hus slik skissen til venstre angir, og at ei rett linje PQ langs stranda gir de dimensjonene som er angitt på skissen.

Løsning: Vi innfører en størrelse x som er avstanden fra punktet Q til det punktet på stranda der lysstrålen befinner seg. Den farten som lysstrålen har langs stranda må være $\frac{dx}{dt}$ der t er tiden. Den vinkelen som lysstrålen danner med linja LQ kaller vi θ. Siden lysstrålen roterer en omdreining (d.v.s. 2π radianer) pr minutt, blir rotasjonsfarten

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{60}\,\mathrm{rad/s}\,.$$

For å finne en sammenheng mellom lysstrålens fart $\frac{dx}{dt}$ og rotasjonsfarten $\frac{d\theta}{dt}$, ser vi av figuren at

$$\tan\theta = \tfrac{x}{y} \quad\Leftrightarrow\quad x = y\cdot\tan\theta\,.$$

Vi deriverer denne sammenhengen med hensyn på tiden t (husk at y er konstant), og får

$$\frac{dx}{dt} = \underline{y\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}}\,.$$

Av figuren ser vi videre at idet lysstrålen passerer Petters hus, er

$$\cos\theta = \tfrac{300}{500} = 0.6\,.$$

Da er strålens fart langs stranda

$$\frac{dx}{dt} = y\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = 300\mathrm{m}\cdot\frac{1}{0.6^2}\cdot\frac{2\pi}{60}\,\mathrm{rad/s} \approx \underline{\underline{87\mathrm{m/s}}}\,.$$

Oppgave 2.6.1.

2.7. Sekantsetningen og Rolles setning.

Dette er to setninger som først og fremst er nyttige i teoretiske undersøkelser. Vi får lite bruk for dem i praktisk arbeid, og skal derfor nøye oss med å nevne dem.

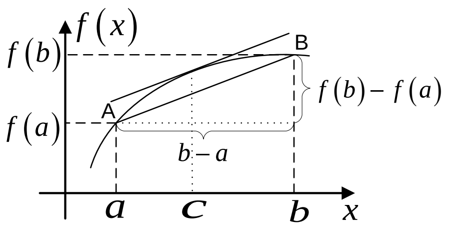
Gitt en funksjon *f* som er kontinuerlig i et lukket intervall $\left[a, b\right]$ og deriverbar i det åpne intervallet $\left\langle a, b\right\rangle$.

Sekantsetningen:
Det fins minst ett punkt $c \in \left\langle a, b\right\rangle$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Rolles setning:
Dersom $f(a) = f(b)$, fins det minst ett punkt $c \in \left\langle a, b\right\rangle$ slik at

$$f'(c) = 0.$$



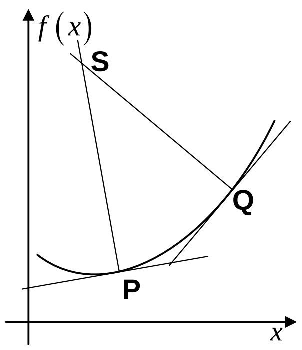
Sekantsetningen er illustrert i figuren til venstre. Der ser du at den rette linja gjennom punktene A og B har stigningstall

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Et eller annet sted mellom $x = a$ og $x = b$ må det da (siden *f* er kontinuerlig) finnes minst ett punkt $x = c$ slik at tangenten i dette punktet er parallell med den rette linja gjennom A og B.

Rolles setning er bare et spesialtilfelle med $f(a) = f(b)$.

2.8. Krumning og krumningsradius.



Noen ganger er vi interessert i å vite hvor mye grafen til en funksjon krummer i et bestemt punkt. For å finne et mål for krumningen, kan vi gå fram som vist på figuren til venstre.
Der ser du grafen til en funksjon $y = f(x)$. Vi merker av et punkt P på grafen, tegner inn tangenten til grafen i P, og oppreiser normalen til denne tangenten i P. Så velger vi et nytt punkt Q på grafen nær P, trekker tangenten i Q og oppreiser normalen til denne tangenten i Q. De to normalene skjærer hverandre i punktet S. Dette punktet kan oppfattes som sentrum for en sirkel som har PS som radius.

Så lar vi Q gli mot P langs grafen. Grenseverdien for avstanden PS når Q faller sammen med P skal vi kalle ***krumningsradien*** til *f* i P. Punktet S blir da ***krumningssenteret***, og sirkelen med sentrum i S og krumningsradien som radius kalles ***krumningssirkelen***.

I et vedlegg er det vist at:

Krumningsradien ρ til en funksjon $y = f(x)$ er gitt ved

$$\rho = \left| \frac{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right| .$$

Av figuren ser du at jo mer grafen krummer, jo mindre blir krumningsradien. Vi definerer derfor en størrelse som vi kaller ***krumning***, som blir større jo mer grafen krummer. Denne størrelsen definerer vi slik:

Krumningen κ til en funksjon $y = f(x)$ er

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \left| \frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{2}{3}}} \right| .$$

Det er vanlig å bruke absoluttverdien i uttrykkene for ρ og κ fordi en radius er et positivt tall. Men dersom vi fjerner absoluttverditegnene og regner med fortegn, vil et positivt fortegn bety at krumningssirkelen ligger over grafen. Et negativt fortegn betyr at krumningssirkelen ligger under grafen.

La oss se på et par eksempler:

***Eksempel 2.8.1*:** Finn krumningsradien til disse funksjonene:

a) $y = f(x) = x^2$ i punktet $(0, 0)$.

b) $y = f(x) = \ln x$ i punktet $(1, 0)$.

Løsning:

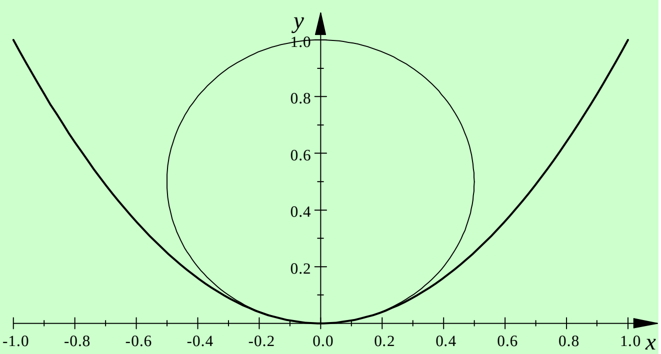
a) $y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x \quad \Rightarrow \quad y'' = 2$.

$$\rho = \left| \frac{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right| = \left| \frac{\left(1+(2x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right| .$$

Setter inn $x = 0$ og får

$$\rho = \left| \frac{(1+0)^{\frac{3}{2}}}{2} \right| = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} .$$

Grafen til $y = x^2$ er vist til høyre sammen med krumningssirkelen.



b) $y=\ln x \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{1}{x}=x^{-1}$

$\Rightarrow \quad y''=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

Istedenfor å sette inn disse uttrykkene i formelen for ρ, er det lettere å beregne verdiene av y' og y'' i punktet $(1, 0)$ før innsettingen:

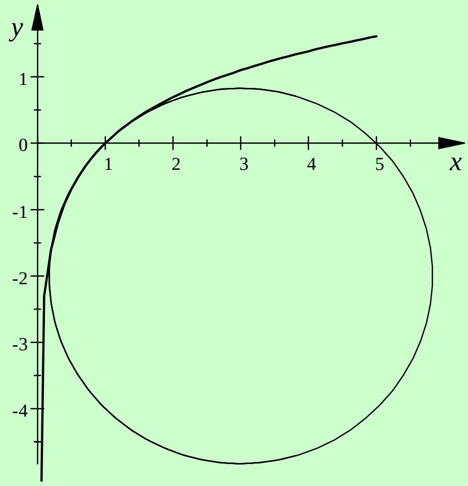
$y'=\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1.$

$y''=-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{1^2}=-1.$

Da får vi

$$\rho=\left|\frac{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|=\left|\frac{\left(1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-1}\right|$$

$$=2^{\frac{3}{2}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}=\underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$



Grafen til $y=\ln x$ sammen med krumningssirkelen.

Merk at dersom vi regner med fortegn, vil ρ bli positiv i eksempel a) og negativ i eksempel b). Dette stemmer med at krumningssirkelen ligger over grafen til *f* dersom $\rho>0$ og under grafen til *f* dersom $\rho<0$.

Oppgave 2.8.1.

3. Blandede oppgaver.

3.1. Oppgaver.

Her finner du en samling blandede oppgaver innen derivasjon og anvendelser av derivasjon. De fleste oppgavene har vært gitt som eksamensoppgaver. Et par oppgaver er litt endret. Du finner løsning på oppgavene ved å klikke på oppgavenummeret.

Oppgave 1

Deriver disse funksjonene:

a) $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 1}$

c) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x^2 - 1}\right)$

d) $y = \sqrt{e^{\frac{1}{x}}}$

e) $y = \ln\left(x^2 \cos x\right)$

f) $y = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$

g) $y = f(x) = \left(e^{-x} \sin(2x)\right)^2$

h) $y = \ln\left(\sqrt[3]{1 - \cos(2x)}\right)$

i) $y = f(x) = x^2 \cdot \sqrt{\ln x}$

j) $y = f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$

k) $f(x) = e^{2x}\sqrt{1 + e^{-2x}}$

Oppgave 2

a) Gitt funksjonen

$$y = f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{\tan x}.$$

Vis at

$$y' = -\left(1 + \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}\right).$$

b) Deriver funksjonen

$$f(x) = \sin x \cdot \sqrt{1+\cos^2 x}\ ,$$

og vis at svaret kan skrives på formen

$$f'(x) = \frac{2\cos^3 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}.$$

c) Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

1) Hva er funksjonens største definisjonsmengde?
2) Deriver funksjonen, og skriv svaret så enkelt som mulig.

d) Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = \ln\left(\sqrt{\tan x}\right).$$

Vis ved å utføre derivasjonen at

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin(2x)}.$$

Oppgave 3

Finn $y' = \dfrac{dy}{dx}$ i disse tilfellene:

a) $x^3 - xy^2 + y = 0$

b) $y \cdot e^x + y^2 \cdot e^{2x} = 4$

c) $x^3 - 3xy^2 - 6y = 4$

d) $x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$

e) $x \cdot \sin y = y \cdot \sin x$

f) $y \cdot \ln y = x^2$

g) $y \cdot \ln x - \dfrac{y^2}{x} = 1$

h) $x^2 y + 2\dfrac{x}{y} = 1$

i) $x^2 - 1 = 2y\sqrt{y}$

j) $2x^2 - xy + y^2 = 1$

Oppgave 4

En funksjon $y = f(x)$ er gitt implisitt ved

$$x \cdot \ln y + 2 = x^2 + y^2 .$$

Bestem y' og y'' i punktet $(1, 1)$.

Oppgave 5

Du skal bestemme koeffisientene *a*, *b*, *c* og *d* i tredjegradsfunksjonen

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

slik at punktene $(0,0)$ og $(2,4)$ blir lokale ekstremalpunkter.

Oppgave 6

Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) .$$

Bestem eventuelle lokale maksimums- og minimumspunkter for funksjonen.

Oppgave 7

Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x , \quad D_f = \langle 0, \infty \rangle .$$

a) Finn den deriverte av *y*, og bruk denne til å bestemme eventuelle maksimal- og minimalpunkter for funksjonen med tilhørende funksjonsverdier.

b) Finn $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, og skisser grafen til *f* på grunnlag av det du nå vet.

Oppgave 8

Gitt funksjonen

$$y = f(x) = e^{-x} \cdot \sin x , \qquad 0 \le x \le 2\pi .$$

a) For hvilke verdier av *x* ligger grafen til *f* over *x*-aksen?
b) Finn y' og y''.
c) Bestem funksjonens maksimal- og minimalpunkter.
d) Skisser grafen til funksjonen ut fra de opplysningene du har nå.

Oppgave 9

En hermetikkboks har form som en rett sylinder med radius *R* og høyde *h*. Boksen skal ha et fast volum *V*. Bestem boksens form (d.v.s. sammenhengen mellom *h* og *R*) slik at arealet av boksens overflate (summen av topp, bunn og sideflate) skal bli minst mulig.

Oppgave 10

Bruk Newtons metode til å finne en tilnærmet løsning av likningen

$$\cos x = x^2$$

med 3 desimaler.

Oppgave 11

a) Bestem disse grenseverdiene:

1) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{\ln x}$

2) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

3) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

4) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)-2x}{e^{x^2}-1}$

5) $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \left(\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\right)$

6) $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)$

7) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$

8) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(x+1)}$

b) I) Finn første- og andrederiverte til funksjonene

$$f(x) = \cos^2\left(\tfrac{1}{2}\pi x\right)$$

og

$$g(x) = (x-1)\ln x .$$

II) Finn

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi x\right)}{(x-1)\ln x} .$$

c) Bestem grenseverdiene:

I) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{xe^{-bx}}{1-e^{-x}}$ II) $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \frac{xe^{-bx}}{1-e^{-x}}$

der b er en positiv konstant.

d) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} .$$

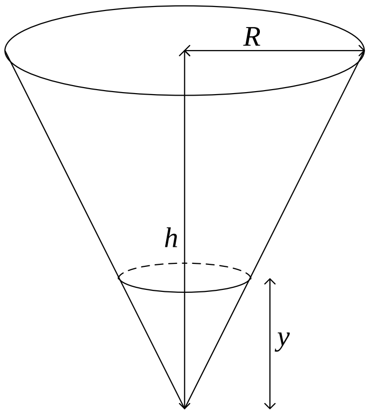
e) Vi har gitt funksjonen

$$f(x)=\frac{e^{5x}-1}{5x}$$

1) Vis at $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{5xe^{5x}-e^{5x}+1}{5x^2}$.

2) Finn $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{df}{dx}\right)$

Oppgave 12



Et kar er formet som en rett kjegle som står med spissen ned. Kjeglens dimensjoner er slik at radien er halvparten av høyden. Vi fyller vann i karet til en høyde y.

a) Vis at volumet av vannet er

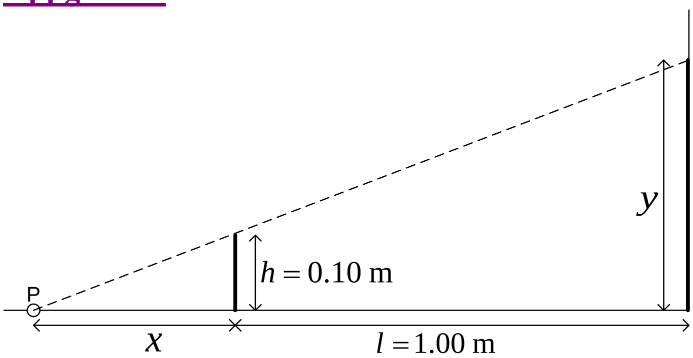
$$V=\tfrac{1}{12}\pi y^3.$$

Du kan ta utgangspunkt i at volumet av en rett kjegle med radius R og høyde h er

$$V=\tfrac{1}{3}\pi R^2 h.$$

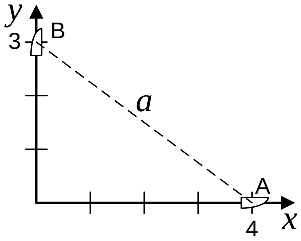
b) Vi fyller vann i karet, slik at volumet øker med 0.20 m^3 vann pr. minutt. Hvor raskt stiger vannflata i det øyeblikk vannet står 1.50 m høyt i karet?

Oppgave 13



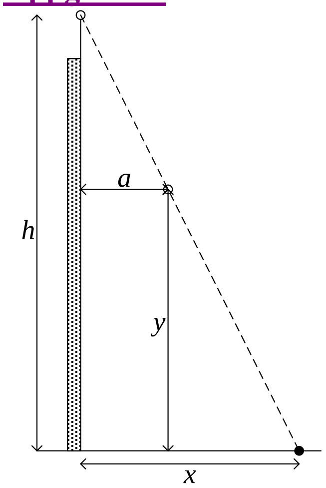
En punktformet lyskilde P kan gli langs en horisontal skinne. En stav med høyde h = 0.10 m står loddrett i en avstand l = 1.00 m fra en loddrett skjerm. Når lyskilden er i avstand x fra staven, kaster staven en skygge med høyde y på skjermen. Hvor fort vokser skyggen når lyskilden er 0.50 m fra staven, og beveger seg med en fart på 0.10 m/s mot staven?

Oppgave 14



To båter A og B går langs hver sin akse i et koordinatsystem. Båt A går med en fart $\dfrac{dx}{dt}=10$ i retning østover (langs positiv x-akse), mens båt B går med en fart $\dfrac{dy}{dt}=15$ i retning nordover (langs positiv y-akse). Avstanden mellom båtene skal vi kalle a. Hvor fort øker avstanden mellom båtene i det øyeblikket da A befinner seg i punktet $(4,0)$ mens B befinner seg i $(0,3)$?

Oppgave 15



Ei gatelykt står en høyde h over bakken, som er horisontal. Et snøfnugg faller rett ned i en horisontal avstand a fra lykta. Skyggen av snøfnugget befinner seg i en horisontal avstand x fra lykta når snøfnugget er i en høyde y over bakken.

a) Vis at $x \cdot y = h(x-a)$.

b) Finn skyggens fart $\dfrac{dx}{dt}$ uttrykt ved bl.a. snøfnuggets fart $\dfrac{dy}{dt}$.

3.2. Løsninger.

Oppgave 1

a) $y = f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}} = e^u$ der $u = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{v} = v^{\frac{1}{2}}$ der $v = 1-x^2$.

Da blir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = e^u \cdot \tfrac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = e^{\sqrt{1-x^2}} \cdot \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \underline{\underline{\frac{-x\cdot e^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}}}.$$

b) $y = f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 1} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ der $u = (\sin x)^2 + 1$.

Da blir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \sin x \cdot \cos x = \underline{\underline{\frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}}}}.$$

c) $y = f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right) = \arctan u$ der $u = \dfrac{x}{x^2-1}$.

Da blir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{1\cdot(x^2-1) - x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^2 + 1}\cdot\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(x^2-1)^2}{x^2 + (x^2-1)^2}\cdot\frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-(x^2+1)}{x^2+x^4-2x^2+1} = \underline{\underline{\frac{-(x^2+1)}{x^4-x^2+1}}}$$

d) $y = \sqrt{e^{\frac{1}{x}}} = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2x}} = e^u$ der $u = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2}x^{-1}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{1}{2}(-1)x^{-2} = e^{\frac{1}{2x}}\left(\frac{-1}{2x^2}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2x^2}e^{\frac{1}{2x}}}}.$$

e) Det enkleste er nok å omforme ved hjelp av logaritmeregler:

$$y=\ln\left(x^2\cos x\right)=\ln x^2+\ln\left(\cos x\right)=2\ln x+\ln u \text{ der } u=\cos x.$$

Da er

$$\frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{2}{x}+\frac{1}{\cos}\cdot\left(-\sin x\right)=\underline{\underline{\frac{2}{x}-\tan x}}.$$

Alternativ: $y=\ln\left(x^2\cos x\right)=\ln u$ der $u=x^2\cos x$.

Da er

$$y=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2\cos x}\left(2x\cos x+x^2\left(-\sin x\right)\right)=\frac{2x\cos x-x^2\sin x}{x^2\cos x}=\underline{\underline{\frac{2}{x}-\tan x}}.$$

f) $$y=\frac{e^{-x^2}}{x}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{e^{-x^2}\left(-2x\right)\cdot x-e^{-x^2}\cdot 1}{x^2}=\underline{\underline{\frac{-e^{-x^2}}{x^2}\left(2x^2+1\right)}}.$$

g) $$y=f\left(x\right)=\left(e^{-x}\sin\left(2x\right)\right)^2=u^2 \text{ der } u=e^{-x}\sin\left(2x\right).$$

$$y'=2u\cdot\frac{du}{dx}=2\left(e^{-x}\sin\left(2x\right)\right)\left(-e^{-x}\sin\left(2x\right)+e^{-x}\cos\left(2x\right)\cdot 2\right)$$

$$=2e^{-x}\sin\left(2x\right)\cdot e^{-x}\left(-\sin\left(2x\right)+2\cos\left(2x\right)\right)=\underline{\underline{2e^{-2x}\sin\left(2x\right)\left(2\cos\left(2x\right)-\sin\left(2x\right)\right)}}$$

h) $$y=\ln\left(\sqrt[3]{1-\cos\left(2x\right)}\right)=\ln\left(1-\cos\left(2x\right)\right)^{\frac{1}{3}}=\tfrac{1}{3}\ln\left(1-\cos\left(2x\right)\right)$$

$$y'=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\cos\left(2x\right)}\cdot-\left(-\sin\left(2x\right)\right)\cdot 2=\underline{\underline{\frac{2\sin\left(2x\right)}{3\left(1-\cos\left(2x\right)\right)}}}.$$

i) $$y=f\left(x\right)=x^2\sqrt{\ln x}=x^2\cdot u^{\frac{1}{2}} \text{ der } u=\ln x.$$

$$\frac{dy}{dx}=2x\cdot u^{\frac{1}{2}}+x^2\cdot\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{du}{dx}=2x\cdot u^{\frac{1}{2}}+x^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}=\frac{2x\cdot u^{\frac{1}{2}}\cdot 2u^{\frac{1}{2}}+x}{2u^{\frac{1}{2}}}=\frac{4xu+x}{2u^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\underline{\underline{\frac{x\left(4\ln x+1\right)}{2\sqrt{\ln x}}}}$$

j) $$y=f\left(x\right)=\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

Deriverer først nevneren for seg:

$$g\left(x\right)=\sqrt{1+\sin^2 x}=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}} \text{ der } u=1+\sin^2 x=1+v^2 \text{ der } v=\sin x.$$

$$g'\left(x\right)=\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot 2v\cdot\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot\sin x\cdot\cos x=\underline{\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}.$$

Da blir

$$y' = \frac{\left(-\sin x\right)\cdot\sqrt{1+\sin^2 x} - \cos x \cdot \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\sqrt{1+\sin^2 x}^2} \cdot \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\left(-\sin x\right)\left(1+\sin^2 x\right) - \sin x \cdot \cos^2 x}{\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right)^3} = \frac{\left(-\sin x\right)\left(1+\sin^2 x + \left(1-\sin^2 x\right)\right)}{\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-2\sin x}{\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}}}$$

k) $f(x) = e^{2x}\sqrt{1+e^{-2x}} = e^{2x}\cdot\sqrt{u} = e^{2x}\cdot u^{\frac{1}{2}}$ der $u = 1+e^{-2x}$.

$$f'(x) = 2e^{2x}\cdot\sqrt{u} + e^{2x}\cdot\tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot u' = 2e^{2x}\cdot\sqrt{u} + e^{2x}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{u^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(0-2e^{-2x}\right)$$

$$= 2e^{2x}\cdot\sqrt{u} + \cancel{e^{2x}}\cdot\frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{u}}\left(-\cancel{2}\,\cancel{e^{-2x}}\right) = 2e^{2x}\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{2e^{2x}\cdot u - 1}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{2e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)-1}{\sqrt{1+e^{-2x}}} = \frac{2e^{2x}+2-1}{\sqrt{1+e^{-2x}}} = \underline{\underline{\frac{2e^{2x}+1}{\sqrt{1+e^{-2x}}}}}$$

Oppgave 2

a) $y = f(x) = \dfrac{\ln\left(\cos x\right)}{\tan x}$.

Da blir

$$y' = \frac{\dfrac{1}{\cos x}\cdot\left(-\sin x\right)\cdot\tan x - \ln\left(\cos x\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{-\tan x\cdot\tan x - \ln\left(\cos x\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}$$

$$= -\left(1+\frac{\ln\left(\cos x\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\right) = \underline{\underline{-\left(1+\frac{\ln\left(\cos x\right)}{\sin^2 x}\right)}}$$

b) $f(x) = \sin x\cdot\sqrt{1+\cos^2 x}$

$$f'(x) = \cos x\cdot\sqrt{1+\cos^2 x} + \sin x\cdot\tfrac{1}{\cancel{2}}\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\cancel{2}\cos x\left(-\sin x\right)$$

$$= \cos x\cdot\sqrt{1+\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{\cos x\cdot\left(1+\cos^2 x\right) - \sin^2 x\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^3 x - \left(1-\cos^2 x\right)\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{\cos x + \cos^3 x - \cos x + \cos^3 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\cos^3 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}}}$$

c) $y = f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Funksjonen er definert når $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. Dette er åpenbart tilfelle dersom $x \geq 0$. Men siden $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = +|x|$, ser vi at funksjonen også er definert når $x < 0$. Altså blir funksjonens største definisjonsmengde $D_f = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$.

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln u \text{ der } u = x + \sqrt{x^2+1} = x + \sqrt{v} = x + v^{\frac{1}{2}} \text{ der } v = x^2 + 1.$$

Da blir

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dv}{dx}\right) = \frac{1}{u}\left(1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{u}\left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{u}{\sqrt{x^2+1}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}}$$

d) $y = f(x) = \ln\left(\sqrt{\tan x}\right) = \ln\sqrt{u} = \ln u^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\ln u$ der $u = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\tan x} \cdot \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{2\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\sin x \cos x} = \underline{\underline{\frac{1}{\sin(2x)}}}$$

Oppgave 3

Deriverer implisitt i alle oppgavene:

a) $x^3 - xy^2 + y = 0$

$$3x^2 - \left(1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y'\right) + y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - y^2 - 2xy \cdot y' + y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 2xy)y' = y^2 - 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \underline{\underline{\frac{y^2 - 3x^2}{1 - 2xy}}}$$

b) $y \cdot e^x + y^2 \cdot e^{2x} = 4$

$$\left(y' \cdot e^x + y \cdot e^x\right) + \left(2y \cdot y' \cdot e^{2x} + y^2 \cdot e^{2x} \cdot 2\right) = 0$$

Deler på e^x:

$$y' + 2y \cdot y' \cdot e^x + y + 2y^2 \cdot e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + 2y \cdot e^x\right)y' = -y - 2y^2 \cdot e^x$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = -\frac{y + 2y^2 \cdot e^x}{1 + 2y \cdot e^x} = -\frac{y\left(1 + 2y \cdot e^x\right)}{1 + 2y \cdot e^x} = \underline{\underline{-y}}$$

c) $x^3 - 3xy^2 - 6y = 4$

$$3x^2 - 3\left(1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y'\right) - 6y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3y^2 - 6xy \cdot y' - 6y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 - 2(xy + 1)y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \underline{\underline{\frac{x^2 - y^2}{2(xy + 1)}}}$$

d) $x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$

$$2x - 2\left(1\cdot y + x\cdot y'\right) + 3\cdot 2y\cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2y - 2x\cdot y' + 6y\cdot y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x - y + \left(-x + 3y\right)\cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y' = \frac{x-y}{x-3y}}}$$

e) $x\cdot \sin y = y\cdot \sin x$.

$$1\cdot \sin y + x\cdot \cos y\cdot \frac{dy}{dx} = 1\cdot \frac{dy}{dx}\cdot \sin x + y\cdot \cos x$$

$$\left(x\cos y - \sin x\right)\frac{dy}{dx} = y\cos x - \sin y$$

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x - \sin y}{x\cos y - \sin x}}}$$

f) $y\cdot \ln y = x^2$.

$$\frac{dy}{dx}\cdot \ln y + y\cdot \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left(\ln y + 1\right) = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\ln y + 1}}}.$$

g) $y\cdot \ln x - \dfrac{y^2}{x} = 1$.

$$y'\cdot \ln x + y\cdot \frac{1}{x} - \frac{2y\cdot y'\cdot x - y^2\cdot 1}{x^2} = 0$$

$$x^2 y'\cdot \ln x + xy - 2xy\cdot y' + y^2 = 0$$

$$y'\left(x^2 \ln x - 2xy\right) = -y^2 - xy$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{y^2 + xy}{2xy - x^2 \ln x}}}$$

h) $y = f\left(x\right) = \left(e^{-x}\sin\left(2x\right)\right)^2 = u^2$ der $u = e^{-x}\sin\left(2x\right)$.

$$y' = 2u\cdot \frac{du}{dx} = 2\left(e^{-x}\sin\left(2x\right)\right)\left(-e^{-x}\sin\left(2x\right) + e^{-x}\cos\left(2x\right)\cdot 2\right)$$

$$= 2e^{-x}\sin\left(2x\right)\cdot e^{-x}\left(-\sin\left(2x\right) + 2\cos\left(2x\right)\right) = \underline{\underline{2e^{-2x}\sin\left(2x\right)\left(2\cos\left(2x\right) - \sin\left(2x\right)\right)}}$$

i) $x^2 - 1 = 2y\sqrt{y} = 2y^{1+\frac{1}{2}} = 2y^{\frac{3}{2}}$

$$2x = 2\cdot \tfrac{3}{2}y^{\frac{3}{2}-1}\cdot y' = 3y^{\frac{1}{2}}\cdot y' = 3\sqrt{y}\cdot y' \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y' = \frac{2x}{3\sqrt{y}}}}.$$

j) $2x^2 - xy + y^2 = 1$.

$$2\cdot 2x-\left(1\cdot y+x\cdot y'\right)+2y\cdot y'=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x-y-x\cdot y'+2y\cdot y'=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (2y-x)\cdot y'=y-4x \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y'=\frac{y-4x}{2y-x}}}$$

Oppgave 4

$x\cdot \ln y+2=x^2+y^2$.

Deriverer implisitt:

$$1\cdot \ln y+x\cdot\frac{1}{y}\cdot y'+0=2x+2y\cdot y' \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{x}{y}-2y\right)y'=2x-\ln y \quad\Leftrightarrow\quad \underline{y'=\frac{2x-\ln y}{\frac{x}{y}-2y}}.$$

Setter inn $x=1$, $y=1$ og får

$$y'(1,1)=\frac{2\cdot 1-\ln 1}{\frac{1}{1}-2\cdot 1}=\frac{2-0}{-1}=\underline{\underline{-2}}.$$

Nå kan y'' finnes på flere måter. Jeg velger å multiplisere uttrykket for y' med y i teller og nevner, og deretter derivere på nytt:

$$y'=\frac{2xy-y\cdot\ln y}{x-2y^2}$$

$$y''=\frac{\left(2\left(1\cdot y+x\cdot y\cdot y'\right)-\left(y'\cdot\ln y+\cancel{y}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}\cdot y'\right)\right)\left(x-2y^2\right)-\left(2xy-y\cdot\ln y\right)\left(1-2\cdot 2y\cdot y'\right)}{\left(x-2y^2\right)^2}.$$

Setter inn $x=y=1$ og $y'=-2$, og får:

$$y''=\frac{\left(2\left(1\cdot 1+1\cdot 1\cdot(-2)\right)-\left((-2)\cdot\ln 1+(-2)\right)\right)\left(1-2\cdot 1^2\right)-\left(2\cdot 1\cdot 1-1\cdot\ln 1\right)\left(1-2\cdot 2\cdot 1\cdot(-2)\right)}{\left(1-2\cdot 1^2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(2(1-2)-(0-2)\right)(1-2)-(2-0)\left(1-(-8)\right)}{(-1)^2}=\frac{(-2+2)(-1)-2\cdot 9}{1}=\underline{\underline{-18}}$$

Oppgave 5

$$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

$$y'=3ax^2+2bx+c.$$

Siden punktet $(0,0)$ ligger på funksjonsgrafen, er

$$a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{d=0}}.$$

Siden punktet $(0,0)$ er et ekstremalpunkt, er

$$3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{c=0}}.$$

Altså kan funksjonen reduseres til

$$y=f(x)=\underline{ax^3+bx^2} \quad\Rightarrow\quad y'=\underline{3ax^2+2bx}.$$

Siden punktet $(2,4)$ ligger på funksjonsgrafen, er

$$a\cdot 2^3+b\cdot 2^2=4 \quad\Leftrightarrow\quad 8a+4b=4 \quad\Leftrightarrow\quad 2a+b=1.$$

Siden punktet $(2,4)$ er et ekstremalpunkt, er

$$3a\cdot 2^2+2b\cdot 2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 12a+4b=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3a+b=0\,.$$

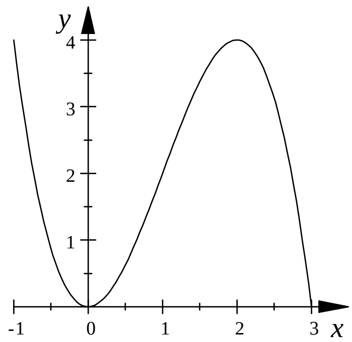
Trekker de to siste likningene fra hverandre, og får $\underline{\underline{a=-1}}$.

Deretter blir $b=-3a=\underline{\underline{3}}$.

Funksjonen blir da

$$y=f(x)=\underline{-x^3+3x^2}\,.$$

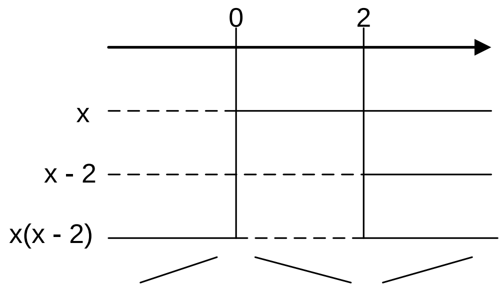
Til kontroll er grafen skissert til høyre.



Oppgave 6

a) $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)-\arctan(x)\,.$

$$\frac{df(x)}{dx}=1-\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{x^2+1}=\frac{\left(x^2+1\right)-2x-1}{x^2+1}=\frac{x^2-2x}{x^2+1}=\underline{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}$$



Siden x^2+1 alltid er positiv, vil fortegnet til $\frac{df(x)}{dx}$ kun avhenge av telleren. Av fortegns-skjemaet til venstre ser vi at *f* vokser når $x<0$ og når $x>2$, og at *f* avtar når $0<x<2$.
Da får *f* et lokalt maksimum når $\underline{\underline{x=0}}$ og et lokalt minimum når $\underline{\underline{x=2}}$.

De tilhørende funksjonsverdiene blir:

$$f(0)=0-\ln(0+1)-\arctan 0=\underline{\underline{0}}\,.$$

$$f(2)=2-\ln\left(2^2+1\right)-\arctan 2\approx\underline{\underline{-0.72}}$$

Oppgave 7

a) $y=f(x)=\sqrt{x}\cdot\ln x\,,\quad D_f=\langle 0,\infty\rangle\,.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}=\underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\ln x+2\right)}}\,.$$

$$\frac{dy}{dx}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\ln x+2\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x=-2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{e^{-2}}\,.$$

Siden $2\sqrt{x}$ alltid er positiv, er $\frac{dy}{dx}>0$ når $\ln x+2>0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x>-2 \quad\Leftrightarrow\quad x>e^{-2}$.
Dette viser at *f* er avtakende når $0<x<e^{-2}$ og voksende når $x>e^{-2}$. Altså har vi et minimumspunkt for $x=\underline{\underline{e^{-2}}}$.

Da er

$$y_{\min}=\sqrt{e^{-2}}\ln\left(e^{-2}\right)=\left(e^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-2\ln e\right)=e^{-1}(-2)\cdot 1=\underline{\underline{-\frac{2}{e}}}\,.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x\,.$

Vi ser at $\sqrt{x}\to 0$ mens $\ln x\to-\infty$ når $x\to 0^+$. Vi har altså et "$0\cdot\infty$"-uttrykk. For å kunne bruke 'Hôpitals regel, må uttrykket omformes. Vi prøver denne omformingen:

$$y = \sqrt{x} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}.$$

Deriverer teller og nevner hver for seg, og får

$$\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = -2 \cdot \frac{x^{-1}}{x^{-\frac{3}{2}}} = -2x^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{x} \to 0 \text{ når } x \to 0^+.$$

Alternativ omforming:

$$y = \sqrt{x} \cdot \ln x = \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^{-1}}.$$

Deriverer teller og nevner hver for seg, og får

$$\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\left((\ln x)^{-1}\right)'} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-1 \cdot (\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^{-2}}$$

som ikke ser ut til å føre fram.
Siden vi nå vet at $f(x) \to 0$ når $x \to 0^+$, og også vet at *f* er avtakende når $0 < x < e^{-2}$, må grafen til *f* se ut som vist til høyre:

Oppgave 8

$$y = f(x) = e^{-x} \cdot \sin x, 0 \le x \le 2\pi.$$

a) Funksjonsgrafen ligger over *x*-aksen når $y > 0$. Siden e^{-x} alltid er positiv, er $y > 0$ når

$$\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{0 < x < \pi}}.$$

b)
$$y' = -e^{-x} \cdot \sin x + e^{-x} \cdot \cos x = \underline{\underline{e^{-x}(\cos x - \sin x)}}.$$

$$y'' = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = \underline{\underline{-2e^{-x}\cos x}}.$$

c) Funksjonen har ekstremalpunkt når

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}(\cos x - \sin x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = \tfrac{1}{4}\pi \vee x = \tfrac{5}{4}\pi}$$

Dessuten kan funksjonen ha ekstremalpunkt i endepunktene av definisjonsområdet.
Når $x = \frac{1}{4}\pi$, er $\cos x > 0$ slik at $y'' < 0$. Da får vi et lokalt maksimumspunkt når $\underline{\underline{x = \frac{1}{4}\pi}}$.

Da er funksjonsverdien

$$y = f\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) = e^{-\frac{1}{4}\pi} \cdot \sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\pi}}} \approx \underline{\underline{0.3224}}.$$

Når $x = \frac{5}{4}\pi$, er $\cos x < 0$ slik at $y'' > 0$. Da får vi et lokalt minimumspunkt når $\underline{\underline{x = \frac{5}{4}\pi}}$.

Da er funksjonsverdien

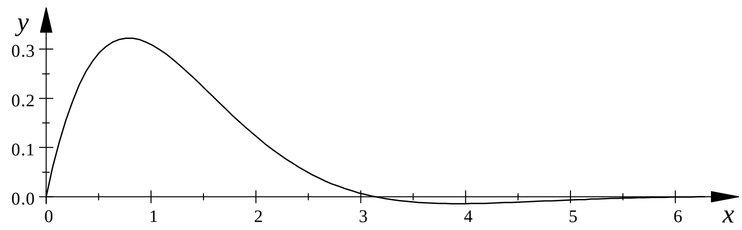
$$y = f\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) = e^{-\frac{5}{4}\pi} \cdot \sin\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}}} \approx \underline{\underline{-0.0139}}.$$

I begge endepunktene av definisjonsområdet er $\sin x = 0$ slik at $y = 0$. Videre vet vi at funksjonen er kontinuerlig siden både e^{-x} og $\sin x$ er kontinuerlige. Dermed har vi at:
Funksjonen har globalt maksimum i $\left(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\pi}\right)$,

og globalt minimum i $\left(\frac{5}{4}\pi, -\frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}\right)$.

Funksjonen har lokalt minimum i $(0,0)$ og lokalt maksimum i $(2\pi, 0)$.

d) Da kan vi skissere grafen:



Oppgave 9
Boksens volum er

$$V = \pi R^2 h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Arealet av overflaten er

$$F = 2 \cdot \pi R^2 + 2\pi R \cdot h = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = \underline{2\pi R^2 + 2\frac{V}{R}}.$$

Når *F* er minst, er

$$\frac{dF}{dR} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi R - 2\frac{V}{R^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi R^3 = 2V \quad \Leftrightarrow \quad \underline{V = 2\pi R^3}.$$

Under derivasjonen har jeg benyttet at *V* er konstant.
Vet fra før at

$$V = \pi R^2 h,$$

slik at

$$2\pi R^3 = \pi R^2 h \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h = 2R}}.$$

Vil for sikkerhets skyld kontrollere at dette gir en minimumsverdi for *F*:

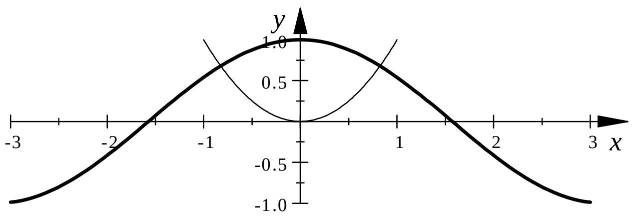
$$\frac{dF}{dR} = 4\pi R - 2V \cdot R^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2F}{dR^2} = 4\pi - 2V \cdot \left(-2R^{-3}\right) = 4\pi + \frac{4V}{R^3} > 0$$

slik at vi finner en minimumsverdi for *F*.

Oppgave 10
For å finne en tilnærmet løsning av likningen

$$\cos x = x^2$$

starter jeg med å tegne grafene til de to funksjonene ($\cos x$ er tegnet med tykkere strek):



Vi ser at det er løsninger nær $x=1$ og nær $x=-1$. Danner funksjonen

$$f(x)=\cos x - x^2$$

og skal da løse likningen $f(x)=0$. Siden *f* åpenbart er en jamn funksjon, er det tilstrekkelig å finne løsningen nær $x=1$. Med Newtons metode får vi:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\cos(x_n)-x_n^{\,2}}{-\sin(x_n)-2x_n}=\underline{x_n+\frac{\cos(x_n)-x_n^{\,2}}{\sin(x_n)+2x_n}}.$$

Starter med $x_0=1$, og får

$$x_1=x_0+\frac{\cos(x_0)-x_0^{\,2}}{\sin(x_0)+2x_0}=1+\frac{\cos(1)-1^2}{\sin(1)+2\cdot 1}\approx 1+\frac{0.5403-1}{0.8415+2}\approx \underline{0.8382}.$$

$$x_2=x_1+\frac{\cos(x_1)-x_1^{\,2}}{\sin(x_1)+2x_1}=0.8382+\frac{\cos(0.8382)-0.8382^2}{\sin(0.8382)+2\cdot 0.8382}\approx \underline{0.8242}.$$

$$x_3=x_2+\frac{\cos(x_2)-x_2^{\,2}}{\sin(x_2)+2x_2}=0.8242+\frac{\cos(0.8242)-0.8242^2}{\sin(0.8242)+2\cdot 0.8242}\approx \underline{0.8241}.$$

Med tre desimalers nøyaktighet har vi nå at løsningen blir $x\approx \underline{\underline{\pm 0.824}}$.

Oppgave 11

a)

1) $$\frac{\sin(x^2-1)}{\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x^2-1)\cdot 2x}{\frac{1}{x}}=\frac{\cos(1^2-1)\cdot(2\cdot 1)}{\frac{1}{1}}=\frac{1\cdot 2}{1}=\underline{\underline{2}}.$$

2) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\left(\frac{\ln 1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{1}{1}}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{1\cdot\frac{\pi}{2}}=\underline{\underline{-\frac{2}{\pi}}}.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{1-1}{0^2}=\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{e^{x^2}-1}=\left(\frac{\ln(1+0)-2\cdot 0}{1-1}=\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+2x}\cdot 2-2}{e^{x^2}\cdot 2x}=\left(\frac{\frac{2}{1+0}-2}{1\cdot 2\cdot 0}=\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{ordner}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}-2}{e^{x^2}\cdot 2x}\cdot\frac{1+2x}{1+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{e^{x^2}\cdot\left(2x+4x^2\right)}$$

$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-4}{e^{x^2}\cdot 2x\cdot\left(2x+4x^2\right)+e^{x^2}\left(2+8x\right)}=\frac{-4}{0+1\cdot 2}=\underline{\underline{-2}}$$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\right)$. Dette er et ”$\frac{\infty}{\infty}$”-uttrykk, der vi kan bruke L’Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+\frac{1}{x}}=\frac{2}{\infty}=\underline{\underline{0}}.$$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)$.

Vet at $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$. Da er $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\infty}=\underline{\underline{0}}$.

(L'Hôpitals regel skal ikke brukes).

7)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\left(=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot\sin x+x\cdot\cos x}{0-\left(-\sin x\right)}\left(=\frac{0-0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1\cdot\cos x+x\left(-\sin x\right)}{\cos x}=\frac{1+1-0}{1}=\underline{\underline{2}}$$

8)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln\left(x+1\right)}\left(=\frac{\tan 0}{\ln\left(0+1\right)}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{x+1}\cdot 1}=\frac{\frac{1}{1\cdot 2}}{\frac{1}{1}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

b) I) $f\left(x\right)=\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$.

$$f'\left(x\right)=2\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi x\right)\cdot\left(-\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi x\right)\right)\cdot\tfrac{1}{2}\pi=-\pi\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi x\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi x\right)=\underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\pi\sin\left(\pi x\right)}}.$$

(Har da benyttet at $\sin\left(2v\right)=2\sin v\cdot\cos v$, og har satt $v=\frac{1}{2}\pi x$).

$$f''\left(x\right)=-\tfrac{1}{2}\pi\cos\left(\pi x\right)\cdot\pi=\underline{\underline{-\tfrac{1}{2}\pi^2\cos\left(\pi x\right)}}.$$

$$g\left(x\right)=\left(x-1\right)\ln x.$$

$$g'\left(x\right)=1\cdot\ln x+\left(x-1\right)\cdot\tfrac{1}{x}=\underline{\underline{\ln x+1-\tfrac{1}{x}}}.$$

$$g''\left(x\right)=\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}=\underline{\underline{\frac{x+1}{x^2}}}.$$

II)
$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi x\right)}{\left(x-1\right)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2}\pi\sin\left(\pi x\right)}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2}\pi^2\cos\left(\pi x\right)}{\frac{x+1}{x^2}}$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}\pi^2\left(-1\right)}{\frac{1+1}{1^2}}=\underline{\underline{\frac{\pi^2}{4}}}$$

c) 1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-bx}}{1-e^{-x}}=\left(\frac{0\cdot 1}{1-1}=\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot e^{-bx}+x\cdot\left(-b\right)e^{-bx}}{-\left(-e^{-x}\right)}=\frac{1\cdot 1-0\cdot b\cdot 1}{1}=\underline{\underline{1}}.$$

2)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{-bx}}{1-e^{-x}}=\left(\frac{\infty\cdot 0}{1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{-bx}}{1-e^{-x}}\cdot\frac{e^{bx}}{e^{bx}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{bx}-e^{\left(b-1\right)x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{be^{bx}-\left(b-1\right)e^{\left(b-1\right)x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{bx}\left(b-\left(b-1\right)e^{-x}\right)}$$
$$=\frac{1}{\infty\left(b-\left(b-1\right)\cdot 0\right)}=\underline{\underline{0}}$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Dette er av formen 1^{∞}. Definerer

$$y=\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}} \quad\Rightarrow\quad \ln y=\tfrac{1}{x}\ln\left(\cos x\right)=\frac{\ln\left(\cos x\right)}{x}.$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\left(\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot\left(-\sin x\right)}{1}=\frac{-\frac{0}{1}}{1}=\underline{0}$$

Da er

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}=e^{0}=\underline{\underline{1}}.$$

e1) $$f\left(x\right)=\frac{e^{5x}-1}{5x}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{df}{dx}=\frac{5e^{5x}\cdot 5x-\left(e^{5x}-1\right)\cdot 5}{\left(5x\right)^{2}}=\frac{25xe^{5x}-5e^{5x}+5}{25x^{2}}=\underline{\underline{\frac{5xe^{5x}-e^{5x}+1}{5x^{2}}}}$$

e2) Ser at dersom vi setter inn $x=0$ i uttrykket for $\frac{df}{dx}$, får vi $\frac{0-1+1}{0}=\frac{0}{0}$.

Bruker derfor L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{df}{dx}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 1\cdot e^{5x}+5x\cdot 5e^{5x}-5e^{5x}+0}{5\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{25xe^{5x}}{10x}=\lim_{x\to 0}\frac{5e^{5x}}{2}=\frac{5\cdot 1}{2}=\underline{\underline{\frac{5}{2}}}.$$

Oppgave 12

a) Setter radien i *vann*-kjeglen lik *r*. Da er vann-volumet

$$V=\tfrac{1}{3}\pi r^{2}y.$$

Setter inn at

$$r=\tfrac{1}{2}y$$

og får

$$V=\tfrac{1}{3}\pi r^{2}y=\tfrac{1}{3}\pi\left(\tfrac{1}{2}y\right)^{2}\cdot y=\underline{\underline{\tfrac{1}{12}\pi y^{3}}}.$$

b) Av oppgaveteksten ser vi at $\frac{dV}{dt}=0.20\ \mathrm{m}^{3}\,/\,\text{minutt}$. "Hvor raskt vannet stiger" må da oppfattes som $\frac{dy}{dt}$. Derivasjon av formelen for *V* gir nå

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=\tfrac{1}{12}\pi\cdot 3y^{2}\cdot\frac{dy}{dt}=\underline{\tfrac{1}{4}\pi y^{2}\cdot\frac{dy}{dt}}\quad\Leftrightarrow\quad \underline{\frac{dy}{dt}=\frac{4}{\pi y^{2}}\cdot\frac{dV}{dt}}.$$

Alternativ: Når høyden øker med en størrelse Δy, må volumet øke med

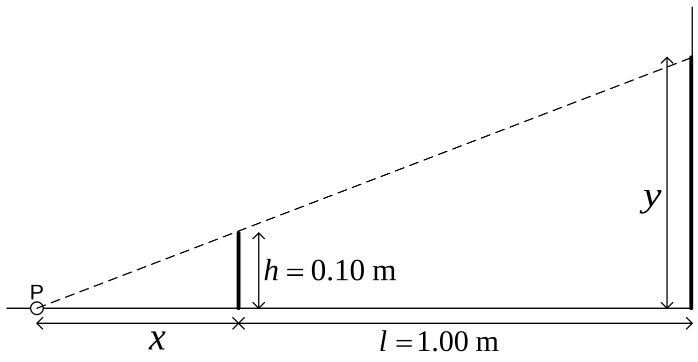
$$\Delta V=\pi r^{2}\cdot\Delta y=\pi\left(\tfrac{1}{2}y\right)^{2}\cdot\Delta y=\tfrac{1}{4}\pi y^{2}\cdot\Delta y.$$

Når vi deler på et kort tidsintervall Δt og deretter lar $\Delta t\to 0$, får vi formelen ovenfor.

Nå gjenstår det bare å sette inn de kjente størrelsene:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{4}{\pi y^2}\cdot\frac{dV}{dt}=\frac{4}{\pi\cdot(1.50\text{ m})^2}\cdot\left(0.20\text{ m}^3\text{ / minutt}\right)\approx\underline{\underline{0.113\text{ m/minutt}}}\,.$$

Oppgave 13



At lyskilden P beveger seg med en fart på 0.10 m/s mot skjermen må innebære at

$$\frac{dx}{dt}=-0.10\text{ m/s}$$

der minustegnet skyldes at x avtar.

Vi skal finne $\frac{dy}{dt}$. Vi setter derfor opp en sammenheng mellom x og y:

$$\frac{y}{x+l}=\frac{h}{x}\quad\Leftrightarrow\quad y=h\cdot\frac{x+l}{x}=\underline{h\left(1+l\cdot x^{-1}\right)}\,.$$

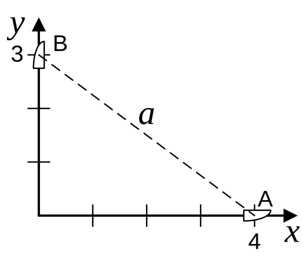
Deriverer med hensyn på tiden t:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=h\left(l\cdot\left(-x^{-2}\right)\right)\cdot\frac{dx}{dt}=\underline{-\frac{h\cdot l}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt}}\,.$$

Setter inn oppgitte størrelser:

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{h\cdot l}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt}=-\frac{(0.10\text{ m})\cdot(1.00\text{ m})}{(0.50\text{ m})^2}\cdot\left(-0.10\text{ m/s}\right)=\underline{\underline{0.04\text{ m/s}}}\,.$$

Oppgave 14



Av figuren ser vi at

$$a^2=x^2+y^2\,.$$

Vi skal finne $\frac{da}{dt}$. Dette kan gjøres på flere måter, men det enkleste er kanskje å derivere likningen ovenfor implisitt med hensyn på tiden t:

$$2a\cdot\frac{da}{dt}=2x\cdot\frac{dx}{dt}+2y\cdot\frac{dy}{dt}\quad\Leftrightarrow\quad \underline{\frac{da}{dt}=\frac{1}{a}\left(x\cdot\frac{dx}{dt}+y\cdot\frac{dy}{dt}\right)}.$$

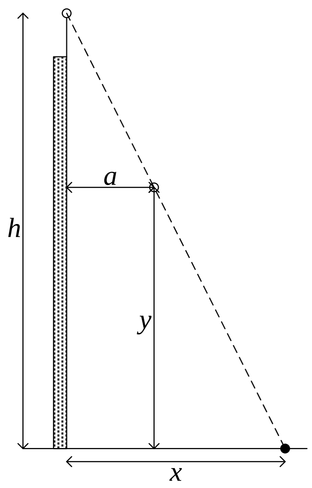
Videre ser vi at når $x=4$ og $y=3$ blir

$$a=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

slik at

$$\frac{da}{dt}=\frac{1}{a}\left(x\cdot\frac{dx}{dt}+y\cdot\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{5}(4\cdot 10+3\cdot 15)=\underline{\underline{17}}.$$

Oppgave 15



a) Av figuren ser vi at

$$\frac{h}{x}=\frac{y}{x-a}\quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x\cdot y=h(x-a)}}.$$

b) Vi kan fortsette på flere måter (og få tilsynelatende ulike svar). Jeg velger å løse ut *y* og deretter derivere med hensyn på tiden *t:*

$$y=h\cdot\frac{x-a}{x}=\underline{h\left(1-a\cdot x^{-1}\right)}.$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=h\left(-a\cdot\left(-x^{-2}\right)\right)\cdot\frac{dx}{dt}=\underline{\frac{a\cdot h}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{dx}{dt}=\underline{\underline{\frac{x^2}{a\cdot h}\cdot\frac{dy}{dt}}}$$

Alternativ: Vi kan derivere likningen $x\cdot y=h(x-a)$ implisitt med hensyn på tiden *t*:

$$\frac{dx}{dt}\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dt}=h\cdot\frac{dx}{dt}\quad\Leftrightarrow\quad x\cdot\frac{dy}{dt}=(h-y)\frac{dx}{dt}\quad\Leftrightarrow\quad \frac{dx}{dt}=\underline{\underline{\frac{x}{h-y}\cdot\frac{dy}{dt}}}.$$

Vi kan vise at disse to svarene er like ved å se av figuren at

$$\frac{h}{x}=\frac{h-y}{a}\quad\Leftrightarrow\quad h-y=\frac{h\cdot a}{x}.$$

Da blir

$$\frac{x}{h-y}=\frac{x}{\frac{h\cdot a}{x}}=\frac{x^2}{h\cdot a}$$

slik at svarene er like.

4. Tillegg.

4.1. Utledning av de generelle derivasjonsreglene.

I del 1.2 satte jeg opp de generelle derivasjonsreglene. Nå skal jeg bevise dem ut fra definisjonen på derivert, som er slik:

Når $y=f(x)$, er

$$y'=f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Regel 1: $y=f(x)=c\cdot u(x)$.

Da er

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x+\Delta x)-c\cdot u(x)}{\Delta x}$$

$$=c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=\underline{\underline{c\cdot\frac{du(x)}{dx}}}=\underline{\underline{c\cdot u'(x)}}$$

Regel 2: $y=f(x)=u(x)+v(x)$.

Da er

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)\big)-\big(u(x)+v(x)\big)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x+\Delta x)-u(x)\big)+\big(v(x+\Delta x)-v(x)\big)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=\underline{\underline{\frac{du(x)}{dx}+\frac{dv(x)}{dx}}}=\underline{\underline{u'(x)+v'(x)}}$$

Regel 3: $y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$.

Da er

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\big)-\big(u(x)\cdot v(x)\big)}{\Delta x}$$

$$\overset{(1)}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\big)-\big(u(x+\Delta x)\cdot v(x)\big)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x+\Delta x)\cdot v(x)\big)-\big(u(x)\cdot v(x)\big)}{\Delta x}$$

$$\overset{(2)}{=}\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)$$

$$\overset{(3)}{=}\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)$$

$$=\underline{\underline{u(x)\cdot\frac{dv(x)}{dx}+\frac{du(x)}{dx}\cdot v(x)}}=\underline{\underline{u(x)\cdot v'(x)+u'(x)\cdot v(x)}}$$

Forklaringer:

- I overgang (1) trekker jeg fra og legger til
$$\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$
samtidig som jeg splitter den lange brøken opp i to brøker, og tar grenseverdien for hver av brøkene for seg.
- I overgang (2) setter jeg felles faktor utenfor parentes i begge brøkene.
- I overgang (3) benytter regelen om at grenseverdien for et produkt er lik produktet av grenseverdiene.

For øvrig bruker jeg definisjonen av derivert flere steder.

Regel 4: $y = f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Da er

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}\cdot\frac{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

$$\overset{(1)}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

$$\overset{(2)}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\cdot\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)-u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\left(v(x)\right)^2}\cdot\left(\frac{du(x)}{dx}\cdot v(x)-u(x)\cdot\frac{dv(x)}{dx}\right)}} = \underline{\underline{\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}}}$$

Forklaringer:

- I overgang (1) trekker jeg fra og legger til $u(x)\cdot v(x)$ i telleren.
- I overgang (2) setter jeg $v(x+\Delta x)\cdot v(x)$ som felles nevnerfaktor utenfor parentes.
Samtidig splitter jeg opp brøken i to, og setter felles faktor utenfor parentes i hver av de to brøkene.
- Til slutt lar jeg $\Delta x \to 0$, og benytter da definisjonen av den deriverte.

4.2. Derivasjon av potensfunksjoner.

Vi skal nå utlede derivasjonsregelen for potensfunksjonen
$$y = f(x) = x^n.$$
I hovednotatet har vi allerede vist at
$$y = f(x) = x \quad\Rightarrow\quad y' = 1.$$
Vi kan derivere $y = f(x) = x^2$ ved å bruke definisjonen på derivert slik:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \underline{\underline{2x}}$$

På samme måte kan vi gå fram for å derivere $y = x^3$, $y = x^4$ osv. Men du innser sikkert at regnearbeidet etter hvert blir ganske omfattende, og det blir vanskelig å finne en generell formel for derivasjon av $y = x^n$.

La oss heller prøve å oppfatte x^2 som $x \cdot x$ og bruke derivasjonsregelen for et produkt. Da får vi:

$$y = f(x) = x^2 = x \cdot x \quad \Rightarrow \quad y' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = \underline{2x}.$$

På samme måte deriverer jeg

$$y = f(x) = x^3 = x^2 \cdot x.$$

Jeg får

$$y' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = \underline{3x^2}.$$

Her begynner det å danne seg et mønster. Det ser ut som om

$$y = f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1}.$$

Denne regelen gjelder i alle fall for $n = 1,\ 2,$ og 3. Jeg bruker et induksjons-resonnement til å vise at den gjelder generelt, og *antar* at regelen gjelder for $n = k$. Når jeg setter $n = k+1$ får jeg:

$$y = f(x) = x^{k+1} = x^k \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad y' = \left(k \cdot x^{k-1}\right) \cdot x + x^k \cdot 1 = k \cdot x^{k-1+1} + x^k = k \cdot x^k + x^k = \underline{(k+1)x^k}$$

Og det er jo samme formel som jeg får dersom jeg erstatter *n* med $k+1$ i uttrykket

$$y = f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1}.$$

Altså er påstanden bevist, forutsatt at *n* er et helt, positivt tall.

Et alternativt bevis forutsetter bruk av logaritmisk derivasjon. Det beviset er kanskje enklere (forutsatt at du behersker logaritmisk derivasjon), og gjelder for *alle* verdier av *n*. Det viser altså at regelen ikke er begrenset til heltallige, positive verdier av *n*.

4.3. Derivasjon av sinus- og cosinus-funksjonene.

Jeg skal starte med derivasjonsformelen for

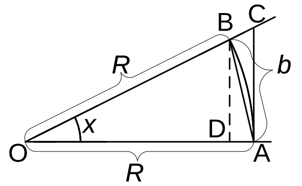
$$y = f(x) = \sin x.$$

Jeg trenger da to hjelpesetninger, der jeg forutsetter at vinkelen *v* er gitt i radianer:

Setning 1: $\lim_{v \to 0} \frac{\sin v}{v} = 1.$

Setning 2: $\lim_{v \to 0} \frac{1 - \cos v}{v} = 0.$

Bevis for **Setning 1**:



På figuren til venstre ser du at:

Arealet av trekant OAC er $F_{\triangle\text{OAC}} = \frac{1}{2}\cdot\text{OA}\cdot\text{AC} = \frac{1}{2}R\cdot R\tan x$

Arealet av trekant OAB er $F_{\triangle\text{OAB}} = \frac{1}{2}\cdot\text{OA}\cdot\text{BD} = \frac{1}{2}R\cdot R\sin x$

Arealet av sirkelsektor OAB er $F_{\sphericalangle\text{OAB}} = \frac{b}{2\pi R}\cdot\pi R^2 = \frac{1}{2}b\cdot R$

Det er innlysende at

$$F_{\triangle\text{OAB}} < F_{\sphericalangle\text{OAB}} < F_{\triangle\text{OAC}} \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}R^2\sin x < \tfrac{1}{2}b\cdot R < \tfrac{1}{2}R^2\tan x \quad\Leftrightarrow\quad \sin < \tfrac{b}{R} < \tan x.$$

Men siden x er gitt i radianer, er $x = \frac{b}{R}$. Videre er $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Dermed blir

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad\Leftrightarrow\quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad\Leftrightarrow\quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Men vi vet at $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x) = 1$. Dermed har vi vist at $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$.

Setning 2 utledes nå på grunnlag av Setning 1:

$$\lim_{v\to 0}\frac{1-\cos v}{v} = \lim_{v\to 0}\frac{1-\cos v}{v}\cdot\frac{1+\cos v}{1+\cos v} = \lim_{v\to 0}\frac{1-\cos^2 v}{v(1+\cos v)} = \lim_{v\to 0}\frac{\sin^2 v}{v(1+\cos v)}$$

$$= \lim_{v\to 0}\frac{\sin v}{v}\cdot\frac{\sin v}{1+\cos v} = \lim_{v\to 0}\frac{\sin v}{v}\cdot\lim_{v\to 0}\frac{\sin v}{1+\cos v} = 1\cdot\frac{0}{1+1} = \underline{0}$$

Nå er jeg klar til å utlede derivasjonsformelen for

$$y = f(x) = \sin x.$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sin x\cdot\cos(\Delta x) + \cos x\cdot\sin(\Delta x)) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cdot(\cos(\Delta x) - 1) + \cos x\cdot\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)$$

$$= -\sin x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x} + \cos x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= -\sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \underline{\underline{\cos x}}$$

Derivasjonsformelen for $\cos x$ kan utledes på samme måten (prøv selv!), eller vi kan benytte at

$$\cos x = \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

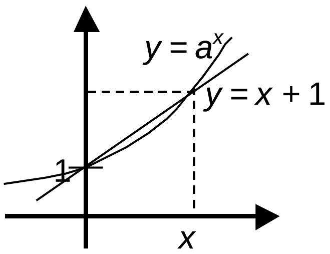
og

$$\sin x = -\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Ved hjelp av kjerneregelen får vi at:

$$y = f(x) = \cos x = \sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin u \quad\Rightarrow\quad y' = \cos u\cdot u' = \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot 1 = \underline{\underline{-\sin x}}.$$

4.4. Derivasjon av eksponentialfunksjonen.



Figuren til venstre viser grafene til de to funksjonene

$$y = g(x) = x + 1$$

og

$$y = f(x) = a^x .$$

De skjærer hverandre i $x = 0$ fordi $f(0) = g(0) = 1$.
De skjærer også hverandre i et punkt P der

$$a^x = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = (x+1)^{\frac{1}{x}} .$$

Vi vil nå bestemme *a* slik at de to skjæringspunktene faller sammen. Vi skal da la P ”gli” langs grafen inntil P får koordinatene $(0,1)$, d.v.s. at vi lar $x \to 0$. Denne spesielle verdien av *a* er det vi kaller *e*. Vi har altså at

$$\underline{e = \lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}} .$$

Hvis vi erstatter *x* med $\frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{1}{x}$, får vi en annen form som kanskje er mer kjent:

$$\underline{\underline{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n}} .$$

Vi plasserer oss nå et annet sted på grafen til $y = f(x) = e^x$. Den deriverte her er

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} .$$

Men for alle verdier av *a* og *x* har vi at grafene skjærer hverandre når

$$a^x = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^x - 1 = x$$

Vi erstatter *x* med Δ*x*, og får

$$a^{\Delta x} - 1 = \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1 .$$

Men når $\Delta x \to 0$, vil $a \to e$. Altså er

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

slik at

$$y' = e^x \cdot 1 = \underline{\underline{e^x}} .$$

4.5. Utledning av L'Hôpitals regel.

Vi skal nå gi et uformelt bevis for setningen nedenfor:

La *f* og *g* være to funksjoner som begge er deriverbare når $x \to a$, og som begge går mot ±∞ når $x \to a$. Da er

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Et formelt bevis er kronglete. Men hvis vi koster en del formelle betenkeligheter under teppet, kan en bevis-skisse se slik ut:

Hvis $f(x) \to \pm\infty$ når $x \to a$, må $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$. Og hvis $g(x) \to \pm\infty$ når $x \to a$, må $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$. Da kan vi omforme slik at vi kan bruke den "vanlige" L'Hôpitals regel som gjelder når $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\left(\left(g(x)\right)^{-1}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\left(f(x)\right)^{-1}\right)} = \lim_{x\to a}\frac{-\left(g(x)\right)^{-2}\cdot g'(x)}{-\left(f(x)\right)^{-2}\cdot f'(x)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\left(g(x)\right)^{-2}}{\left(f(x)\right)^{-2}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\left(f(x)\right)^{2}}{\left(g(x)\right)^{2}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

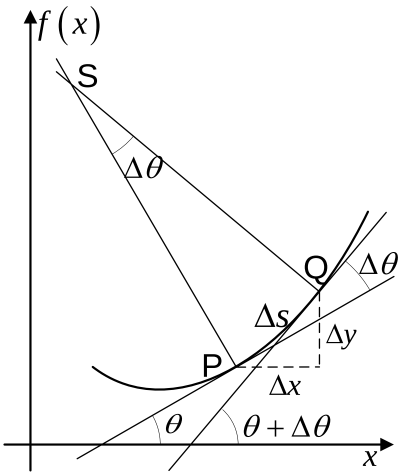
$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} = \left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

Men nå er $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ blitt faktor på begge sider av likhetstegnet. Vi forutsetter nå at denne grenseverdien eksisterer og er forskjellig fra null. Da kan vi forkorte den bort, og står igjen med

$$1 = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{g'(x)}{f'(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Og det var det vi skulle vise.

4.6. Utledning av formelen for krumningsradius.



Vi definerte krumningssenteret S som skjæringspunktet mellom normalen til tangenten i P, og normalen til tangenten i Q, når $Q \to P$. Se figuren til venstre, der situasjonen er avbildet før vil lar $Q \to P$.
Vinkelen mellom PS og QS skal vi kalle $\Delta\theta$.
Lengden av buen PQ skal vi kalle Δs.
Dersom Δs er en del av en sirkel, har vi at

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{PS} \quad\Leftrightarrow\quad PS = \frac{\Delta s}{\Delta\theta}$$

når $\Delta\theta$ måles i radianer.

Når vi lar Q gli mot P vil $\Delta\theta \to 0$. Da får vi krumnings-radien ρ slik:

$$\rho = \lim_{\Delta\theta\to 0} PS = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{ds}{d\theta}.$$

Anta at tangenten i P danner vinkelen θ med x-aksen. Da er

$$y' = \tan\theta$$

når vi bruker verdien for y' i punktet P.

Tangenten i Q danner vinkelen $\theta + \Delta\theta$ med x-aksen, der vinkelen $\Delta\theta$ er den samme som vinkelen mellom PS og QS (det er derfor vi i utgangspunktet kalte denne vinkelen for $\Delta\theta$).

Så setter vi i gang med litt formeltriksing. Vi starter med å skrive

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dx}} .$$

Først må vi finne $\frac{ds}{dx}$. Av figuren ser vi at når P og Q ligger svært nær hverandre, blir Δs tilnærmet en rett linje. Da er

$$\Delta s^2 \approx \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta s^2}{\Delta x^2} \approx 1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} .$$

Så lar vi $P \to Q$ slik at $\Delta\theta \to 0$. Da vil også $\Delta x \to 0$, slik at

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \underline{\sqrt{1 + (y')^2}} .$$

Så må vi finne $\frac{d\theta}{dx}$. Vi deriverer da likningen

$$y' = \tan\theta$$

med hensyn på x og bruker kjerneregelen, og får

$$y'' = \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} .$$

Så benytter vi at

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} .$$

Dermed har vi at

$$y'' = \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \left(1 + \tan^2\theta\right) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \left(1 + (y')^2\right) \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1 + (y')^2}} .$$

Altså er

$$\rho = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dx}} = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot \frac{1}{\frac{y''}{1 + (y')^2}} = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot \frac{1 + (y')^2}{y''} = \underline{\underline{\frac{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}}} .$$

Nå vet vi at dersom grafen er konveks (innhul side opp), er $y'' > 0$. Da ser vi at $\rho > 0$ når krumningssirkelen ligger på oversiden av grafen. Dersom grafen er konkav (innhul side ned), er $y'' < 0$. Da ser vi at $\rho < 0$ når krumningssirkelen ligger på undersiden av grafen.

Dersom vi ønsker at krumningsradien alltid skal være et positivt tall, må vi sette inn absolutt-verditegn i formelen.

5. Småoppgaver i teksten.

Her er de små oppgavene som det henvises til i teksten. Du finner løsningsforslag ved å klikke på oppgavenummeret.

5.1. Oppgaver.

Oppgave 1.3.1
Deriver disse funksjonene:

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x - 5$

b) $f(x) = x^2(x^2 + x - 3)$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 3}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Oppgave 1.3.2
Deriver disse funksjonene:

a) $f(x) = \sqrt{x^3}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = (2\sqrt{x} - 1)^2$

Oppgave 1.3.3
Deriver disse funksjonene:

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$

b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \tan x$, og skriv svaret på *en* brøkstrek.

Oppgave 1.3.4
Deriver disse funksjonene:

a) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

b) $f(x) = (2x - 3) \cdot \ln(x^2)$

c) $f(x) = x \cdot \ln(\sqrt{x})$

Oppgave 1.4.1

Finn første- og andrederiverte til disse funksjonene:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

b) $f(x) = e^x \cdot \sin x$

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x + 1}$

d) $f(x) = x \cdot \tan x$

Oppgave 1.5.1

Bruk kjerneregelen til å derivere disse funksjonene:

a) $f(x) = (2x - 1)^3$

b) $f(x) = (x^2 - x)^2$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

d) $f(x) = e^{-x^2}$

e) $f(x) = \cos^3(2x)$

f) $f(x) = \sqrt{4 + \sin^2 x}$

Oppgave 1.5.2

Deriver disse funksjonene:

a) $f(x) = \sin(3x)$

b) $f(x) = e^{-2x}$

c) $f(x) = e^{-x} \cdot \cos(2x)$

d) $f(x) = x \cdot \ln(4x)$

Oppgave 1.6.1

Deriver funksjonen

$$y = f(x) = \arccos x$$

når du vet at

$$\frac{d}{dy}(\cos y) = -\sin y \;\text{ og }\; 0 \le y \le \pi .$$

Oppgave 1.6.2

Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}, \; D_f = \langle 1, \rightarrow \rangle .$$

a) Vis at f har en invers funksjon f^{-1}, og bestem definisjonsmengden til f^{-1}.

b) Finn $\frac{d}{dx} f^{-1}(0)$, og illustrer situasjonen grafisk.

Oppgave 1.7.1

Finn $y' = \frac{dy}{dx}$ ved å derivere implisitt:

a) $x^2 y - y^2 = 1$.

b) $x \cdot \sin y = 4$.

c) $y \cdot \ln x - x^2 \cdot \ln y = 1$.

d) $e^{x \cdot y} = x$.

Oppgave 1.7.2

Finn $y' = \frac{dy}{dx}$ og $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ ved å derivere implisitt:

a) $x^2 - y^2 = 4$.

b) $x \cdot \ln y = y$.

Oppgave 1.8.1

Finn $y' = \frac{dy}{dx}$ ved hjelp av logaritmisk derivasjon:

a) $y = (\tan x)^x$

b) $y = \left(\ln \sqrt{x}\right)^x$

c) $y = x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot \cos^3 x$

Oppgave 2.1.1

a) Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Bestem eventuelle ekstremalpunkter med tilhørende ekstremalverdier. Finn også mulige vendepunkter, og tegn en skisse av grafen på grunnlag av disse beregningene.

b) Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

Bestem eventuelle ekstremalpunkter med tilhørende ekstremalverdier. Finn $\lim_{x \to \infty} f(x)$ og $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, og tegn grafen til funksjonen.

Oppgave 2.1.2

a) Et rektangel har sidekanter langs positive *x*- og *y*-akser, har sitt ene hjørne i origo og sitt motstående hjørne på grafen til funksjonen

$$y = f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x \geq 0.$$

Finn det største arealet dette rektangelet kan få.

b) Finn det punktet (x, y) på grafen til funksjonen

$$y = f(x) = x^2,\ x \geq 0,$$

som ligger nærmest punktet $\left(0, \tfrac{9}{2}\right)$.

Hvor stor er denne minste avstanden?

Hint: Avstanden mellom to punkt (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Oppgave 2.2.1

En kostnadsfunksjon er gitt ved

$$K(x) = 50000 + 400x - 2x^2 + \tfrac{1}{300}x^3$$

der *x* er produsert og solgt mengde. Produktet selges for 900 kr pr enhet.

a) Bestem *x* slik at profitten blir størst mulig.

b) La nå prisen være *p* (istedenfor 900 kr) pr enhet. Bestem *p* slik at maksimal profitt inntreffer når det produseres og selges 450 enheter.

Oppgave 2.2.2

Anta at kostnadsfunksjonen er

$$K(x) = K_0 + K_1 x - K_2 x^2 + K_3 x^3$$

mens inntektsfunksjonen er

$$I(x) = p \cdot x.$$

a) Vis at dersom $p > K_1$, er $\pi'(x) = 0$ når $x = \dfrac{K_2 + \sqrt{K_2^2 + 3K_3(p - K_1)}}{3K_3}$.

b) Vis at profittfunksjonen er konkav rundt denne *x*-verdien.

Oppgave 2.2.3

a) Vis at dersom omsetningen *x* avhenger av prisen *p* som

$$x(p) = A \cdot e^{-a \cdot p},$$

blir inntekten størst når $p = \tfrac{1}{a}$.

b) Et buss-selskap tar i dag 20 kroner for en billett, og frakter da 20 000 passasjerer pr dag. Selskapets styre ønsker å øke inntektene, og foreslår å øke billettprisen til 22 kroner. Markedssjefen innvender at antall passasjerer da vil gå ned til 18 000 pr dag.

Hvilken billettpris vil ifølge disse opplysningene gi størst inntekt når vi antar at sammenhengen mellom pris *p* og antall passasjerer *x* er som gitt i del a) av oppgaven?

Oppgave 2.3.1

a) Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 5}\,.$$

Bruk tilvekstformelen til å finne en tilnærmet verdi av økingen av y når x øker fra 2.00 til 2.03.

b) Vi har gitt funksjonen

$$y = f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Bruk tilvekstformelen til å finne en tilnærmet verdi av økingen av y når x øker fra $\frac{\pi}{6}$ til $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60}$.

Oppgave 2.4.1

Bruk L'Hôpitals regel til å bestemme disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x \cdot \ln x}{x^2 - 1}$.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(2x-1)}{x^2 - 1}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(2x) - \cos x}{x^2}$.

Oppgave 2.4.2

Bruk L'Hôpitals regel til å bestemme disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\ln(x^2 - 1)}$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x \cdot \ln x}{x^2}$.

Oppgave 2.4.3

Bruk L'Hôpitals regel til å bestemme disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)\right)$.

Oppgave 2.4.4

Bruk L'Hôpitals regel til å bestemme disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$.

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{2x}{1-x} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Oppgave 2.4.5

Bruk L'Hôpitals regel til å bestemme disse grenseverdiene:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\left(\sin x\right)^x\right)$.

b) $\lim_{x\to 0}\left(\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

c) $\lim_{x\to 1^+}\left(\left(\ln x\right)^{x-1}\right)$.

d) $\lim_{x\to 0^+}\left(\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)^x\right)$.

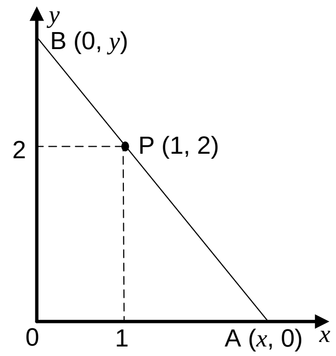
Oppgave 2.5.1

Bruk Newtons metode til å løse disse likningene:

a) $e^x = 2\cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

b) $x + \tan x = 2$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Oppgave 2.6.1



Ei rett linje går gjennom det faste punktet $P(1,2)$. Linja skjærer x-aksen i punktet $A(x,0)$ og y-aksen i punktet $B(0,y)$. Punktet A beveger seg med konstant fart på 0.1 enheter pr sekund i positiv retning langs x-aksen.

a) Hvor fort beveger punktet B seg idet A passerer punktet $(2,0)$?

b) Hvor er A og B i det øyeblikk da begge punktene beveger seg like fort?

Oppgave 2.8.1

Beregn krumningsradien til funksjonene nedenfor, og illustrer løsningen med en figur:

a) $y = f(x) = \sin x$ i punktet $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

b) $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ i punktet $(1,1)$.

5.2. Løsning på småoppgaver.

Oppgave 1.3.1

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x - 5$

$$f'(x) = 2\cdot 3x^2 - 2x - 4 - 0 = \underline{\underline{6x^2 - 2x - 4}}$$

b) $f(x) = x^2\left(x^2 + x - 3\right) = x^4 + x^3 - 3x^2$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 3\cdot 2x = \underline{\underline{4x^3 + 3x^2 - 6x}}$$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x+3}$

$$f'(x) = \frac{(2 \cdot 2x - 0)(x+3) - (2x^2 - 1) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{4x(x+3) - (2x^2 - 1)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 12x - 2x^2 + 1}{(x+3)^2} = \underline{\underline{\frac{2x^2 + 12x + 1}{(x+3)^2}}}$$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2 \cdot 2x - 0)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x^2 - 1)(2x + 0)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 + 4x^3 + 4x - 2x^4 - 4x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \underline{\underline{\frac{x^4 + 3x^2 + 6x}{(x^2 + 1)^2}}}$$

Oppgave 1.3.2

a) $f(x) = \sqrt{x^3} = (x^3)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

$$f'(x) = \tfrac{3}{2} x^{\frac{3}{2} - 1} = \tfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}\sqrt{x}}}$$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - (\sqrt{x})^{-1} = x^{\frac{1}{2}} - (x^{\frac{1}{2}})^{-1} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} - \left(-\tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2} - 1}\right) = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2x\sqrt{x}}(x+1)}}$$

Vi kan også bruke derivasjonsregelen for en brøk, der vi på forhånd har funnet ut at $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (se Eksempel 2.2a). Da får vi:

$$f'(x) = \frac{(1-0) \cdot \sqrt{x} - (x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}}{x\sqrt{x}} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{1}{2}}{x\sqrt{x}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}}}$$

c) $f(x) = (2\sqrt{x} - 1)^2 = (2\sqrt{x})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{x} + 1 = 4x - 4x^{\frac{1}{2}} + 1$

$$f'(x) = 4 \cdot 1 - 4 \cdot \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} + 0 = 4 - 2x^{-\frac{1}{2}} = 4 - 2 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{4 - \frac{2}{\sqrt{x}}}}.$$

Oppgave 1.3.3

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$

$$f'(x) = 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) = \underline{\underline{2x\cos x - x^2 \sin x}}$$

b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

$$f'(x) = \frac{(-\sin x)\cdot x - (\cos x)\cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{\frac{-x\cdot \sin x - \cos x}{x^2}}}$$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \tan x$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \tan x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos x}{2\sqrt{x}\cdot \cos^2 x} + \frac{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{\sin x \cdot \cos x + 2x}{2\sqrt{x}\cdot \cos^2 x}}}.$$

Oppgave 1.3.4

a) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \underline{\underline{\left(2x + x^2\right)e^x}}$$

b) $f(x) = (2x-3)\cdot \ln\left(x^2\right) = (2x-3)\cdot(2\ln x) = (4x-6)\cdot \ln x$

$$f'(x) = (4\cdot 1 + 0)\cdot \ln x + (4x-6)\cdot \tfrac{1}{x} = \underline{\underline{4\ln x + 4 - \tfrac{6}{x}}}$$

c) $f(x) = x \cdot \ln\left(\sqrt{x}\right) = x \cdot \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = x \cdot \left(\tfrac{1}{2}\ln x\right) = \tfrac{1}{2}(x \cdot \ln x)$

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \tfrac{1}{x}\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}(\ln x + 1)}}$$

Oppgave 1.4.1

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - \left(x^2-1\right)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x+2)^2} = \underline{\frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}}$$

Når jeg skal derivere dette uttrykket på nytt, må jeg derivere nevneren

$$v(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 2x + 4.$$

$$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x+1)(2x+4)}{\left((x+2)^2\right)^2}$$

$$=\frac{(2x+4)\left((x+2)^2-(x^2+4x+1)\right)}{(x+2)^4}=\frac{2(x+2)(x^2+4x+4-x^2-4x-1)}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{2\cdot 3}{(x+2)^3}=\underline{\underline{\frac{6}{(x+2)^3}}}$$

b) $f(x)=e^x\cdot\sin x$

$$f'(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x=\underline{e^x(\sin x+\cos x)}$$

$$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=\underline{\underline{2e^x\cos x}}$$

c) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x+1)-(\ln x)\cdot(1+0)}{(x+1)^2}=\underline{\frac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}}$$

Når jeg skal derivere dette uttrykket på nytt, må jeg derivere nevneren

$$v(x)=(x+1)^2=x^2+2x+1\quad\Rightarrow\quad v'(x)=2x+2\,.$$

Jeg må også benytte at

$$\tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{x}\right)=\tfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}=-\tfrac{1}{x^2}\,.$$

Da blir

$$f''(x)=\frac{\left(0-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)(x+1)^2-\left(1+\frac{1}{x}-\ln x\right)(2x+2)}{\left((x+1)^2\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{x^2}\cancel{(1+x)}\,(x+1)^2-\left(1+\frac{1}{x}-\ln x\right)\cdot 2\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}3}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{x^2}\left(x^2+2x+1\right)-2\left(1+\frac{1}{x}-\ln x\right)}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{-1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-2-\frac{2}{x}+2\ln x}{(x+1)^3}\cdot\frac{x^2}{x^2}=\underline{\underline{\frac{2x^2\ln x-3x^2-4x-1}{x^2(x+1)^3}}}$$

d) $f(x)=x\cdot\tan x$

$$f'(x)=1\cdot\tan x+x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\underline{\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1\cdot\cos^2 x - x\cdot(-2\sin x\cdot\cos x)}{(\cos^2 x)^2}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cancel{\cos x}\,(\cos x + 2x\cdot\sin x)}{\cos^{\cancel{4}\,3} x}$$

$$= \frac{\cos x + (\cos x + 2x\sin x)}{\cos^3 x} = \underline{\underline{\frac{2(\cos x + x\sin x)}{\cos^3 x}}}$$

Oppgave 1.5.1

a) $f(x) = (2x-1)^3 = u^3$ der $u = 2x-1$.

$f'(x) = 3u^2\cdot u' = 3(2x-1)^2\cdot(2\cdot 1 - 0) = \underline{\underline{6(2x-1)^2}}$

b) $f(x) = (x^2-x)^2 = u^2$ der $u = x^2 - x$.

$f'(x) = 2u\cdot u' = \underline{\underline{2(x^2-x)\cdot(2x-1)}}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+4} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ der $u = x^2+4$.

$f'(x) = \tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot u' = \tfrac{1}{\cancel{2}}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(\cancel{2}x+0) = x\cdot\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}}$

d) $f(x) = e^{-x^2} = e^u$ der $u = -x^2$.

$f'(x) = e^u\cdot u' = e^{-x^2}\cdot(-2x) = \underline{\underline{-2x\cdot e^{-x^2}}}$

e) $f(x) = \cos^3(2x) = u^3$ der $u = \cos(2x) = \cos v$ der $v = 2x$.

$f'(x) = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = 3u^2\cdot(-\sin v)\cdot 2 = \underline{\underline{-6\cdot\cos^2(2x)\cdot\sin(2x)}}$

f) $f(x) = \sqrt{4+\sin^2 x} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ der $u = 4+\sin^2 x = 4+v^2$ der $v = \sin x$.

$f'(x) = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cancel{2}}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot(0+\cancel{2}v)\cdot\cos x = u^{-\frac{1}{2}}\cdot v\cdot\cos x$

$= \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\cdot v\cdot\cos x = \underline{\underline{\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{4+\sin^2 x}}}}$

Oppgave 1.5.2

Bruker "spesialreglene", og får:

a) $f(x) = \sin(3x) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \underline{\underline{3\cos(3x)}}$

b) $f(x) = e^{-2x} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \underline{\underline{-2e^{-2x}}}$

c) $f(x) = e^{-x}\cdot\cos(2x)$

$\Leftrightarrow\quad f'(x) = -e^{-x}\cdot\cos(2x) + e^{-x}\cdot(-2\sin(2x)) = \underline{\underline{-e^{-x}(\cos(2x)+2\sin(2x))}}$

d) $f(x) = x\cdot\ln(4x) \quad\Leftrightarrow\quad f'(x) = 1\cdot\ln(4x) + x\cdot\frac{1}{x} = \underline{\underline{\ln(4x)+1}}$

Oppgave 1.6.1

Benytter at

$$y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y\,.$$

Da blir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{\sin^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \underline{\underline{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}}\,.$$

Oppgave 1.6.2

$$y = f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}\,,\ D_f = \langle 1, \rightarrow \rangle\,.$$

a)

$$y' = f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2-4)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2+4}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x^2-2x+1)+3}{(x-1)^2} = \underline{\frac{(x-1)^2+3}{(x-1)^2}}$$

Siden kvadrattall aldri kan bli negative, ser vi at $y' > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Dessuten ser vi at *f* er kontinuerlig når $x \in \langle 1, \rightarrow \rangle$. Da er *f* voksende i hele sitt definisjonsområde, slik at *f* har en invers funksjon f^{-1}.

Definisjonsmengde til f^{-1} er lik verdimengden til *f*. Ser at

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4}{x-1} = -\infty$$

fordi telleren går mot -3 samtidig som nevneren går mot 0^+. Ser også at

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x-1}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0}{0-0} = +\infty\,.$$

For å få rett fortegn, må vi ta hensyn til at når $x > 1$ er $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$, slik at nevneren da er positiv. Dermed har vi at $D_{f^{-1}} = V_f = \mathbb{R}$.

b) Den inverse funksjonen er $x = f^{-1}(y)$, slik at

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{(x-1)^2+3}{(x-1)^2}} = \underline{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+3}}\,.$$

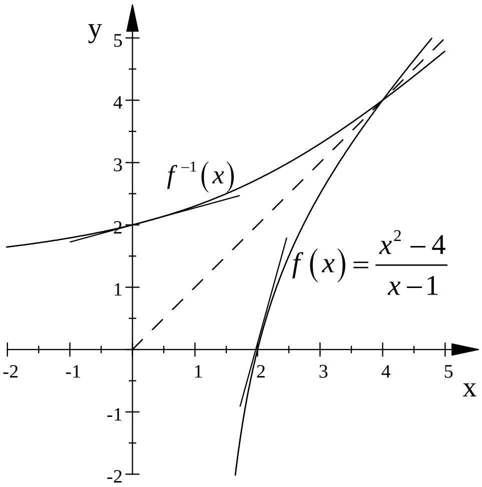
Her bør vi egentlig finne x uttrykt ved y av funksjonsuttrykket $y = \dfrac{x^2-4}{x-1}$, sette inn i uttrykket for $\frac{df^{-1}(y)}{dy}$, og bytte om x og y slik at vi får $\frac{df^{-1}(x)}{dx}$. Heldigvis slipper vi det, fordi vi ser at når $x = 2$ er

$$y = f(2) = \tfrac{2^2-4}{2-1} = 0$$

slik at

$$\frac{df^{-1}(0)}{dx} = \frac{(2-1)^2}{(2-1)^2+3} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

Situasjonen er illustrert på figuren til høyre.



Oppgave 1.7.1

a) $x^2y - y^2 = 1$.

Deriverer implisitt med hensyn på x:

$$\left(2x\cdot y + x^2\cdot y'\right) - 2y\cdot y' = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x^2-2y\right)\cdot y' = -2xy \quad\Leftrightarrow\quad y' = \underline{\underline{\frac{2xy}{2y-x^2}}}$$

b) $x\cdot\sin y = 4$.

Deriverer implisitt med hensyn på x:

$$1\cdot\sin y + x\cdot\left(\cos y\cdot y'\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y' = \frac{-\sin y}{x\cdot\cos y} = \underline{\underline{-\frac{\tan y}{x}}}.$$

c) $y\cdot\ln x - x^2\cdot\ln y = 1$.

Deriverer implisitt med hensyn på x:

$$\left(y'\cdot\ln x + y\cdot\frac{1}{x}\right) - \left(2x\cdot\ln y + x^2\cdot\left(\frac{1}{y}\cdot y'\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad y'\cdot\left(\ln x - \frac{x^2}{y}\right) = -\frac{y}{x} + 2x\cdot\ln y$$

$$\Leftrightarrow\quad y' = \underline{\underline{\frac{2x\cdot\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x^2}{y}}}}$$

d) $e^{x\cdot y} = x$. Innfører $u = x\cdot y$, og får $e^u = x$.

Deriverer implisitt med hensyn på x:

$$e^u\cdot\tfrac{du}{dx} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x\cdot y}\cdot\left(1\cdot y + x\cdot y'\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad y + x\cdot y' = \frac{1}{e^{x\cdot y}}$$

$$\Leftrightarrow\quad x\cdot y' = \frac{1}{e^{x\cdot y}} - y \quad\Leftrightarrow\quad y' = \underline{\underline{\frac{1}{x\cdot e^{x\cdot y}} - \frac{y}{x}}}$$

Oppgave 1.7.2

a) $x^2 - y^2 = 4$.

Deriverer implisitt med hensyn på x:

$$2x - 2y \cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot y' = x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y' = \frac{x}{y}}}.$$

Deriverer dette uttrykket på nytt:

$$y'' = \frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = \frac{y - x \cdot \frac{x}{y}}{y^2} \cdot \frac{y}{y} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \underline{\underline{\frac{-4}{y^3}}}.$$

b) $x \cdot \ln y = y$.

Deriverer implisitt med hensyn på *x*:

$$1 \cdot \ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = y' \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{y} - 1\right) y' = -\ln y \quad \Leftrightarrow \quad y' = \underline{\underline{\frac{\ln y}{1 - \frac{x}{y}}}} = \underline{\underline{\frac{y \cdot \ln y}{y - x}}}.$$

Beregningen av den andrederiverte kan forenkles noe ved å benytte en omforming til:

$$x \cdot \ln y = y \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \tfrac{y}{x}.$$

Settes dette inn i uttrykket for y', får vi

$$y' = \frac{y \cdot \ln y}{y - x} = \frac{y \cdot \frac{y}{x}}{y - x} = \underline{\underline{\frac{y^2}{x \cdot y - x^2}}}.$$

Nå kan dette uttrykket deriveres på nytt med hensyn på *x*.

$$y'' = \frac{(2y \cdot y')\left(x \cdot y - x^2\right) - y^2\left(1 \cdot y + x \cdot y' - 2x\right)}{\left(x \cdot y - x^2\right)^2}$$

$$= \frac{2xy^2 \cdot y' - 2x^2 y \cdot y' - y^3 - xy^2 \cdot y' + 2xy^2}{\left(x \cdot y - x^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(xy^2 - 2x^2 y\right) \cdot y' - y^3 + 2xy^2}{\left(x \cdot y - x^2\right)^2} = \frac{xy\left(y - 2x\right) \cdot y' - y^2\left(y - 2x\right)}{\left(x \cdot y - x^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(xy \cdot y' - y^2\right)\left(y - 2x\right)}{\left(x \cdot y - x^2\right)^2} = \frac{\left(xy \cdot \frac{y^2}{xy - x^2} - y^2\right)\left(y - 2x\right)}{\left(xy - x^2\right)^2} \cdot \frac{xy - x^2}{xy - x^2}$$

$$= \frac{y^2\left(xy - 1 \cdot \left(xy - x^2\right)\right)\left(y - 2x\right)}{\left(xy - x^2\right)^3} = \frac{y^2 \cdot x^2\left(y - 2x\right)}{x^3\left(y - x\right)^3} = \underline{\underline{\frac{y^2\left(y - 2x\right)}{x\left(y - x\right)^3}}}$$

Oppgave 1.8.1

a) $y = \left(\tan x\right)^x$

$$\ln y = \ln\left(\left(\tan x\right)^x\right) = x \cdot \ln\left(\tan x\right)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln\left(\tan x\right) + x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y' = y \cdot \left(\ln(\tan x) + x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) = (\tan x)^x \cdot \left(\ln(\tan x) + x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

$$= \underline{\underline{(\tan x)^x \cdot \ln(\tan x) + \frac{x \cdot (\tan x)^{x-1}}{\cos^2 x}}}$$

b) $y = \left(\ln\sqrt{x}\right)^x$.

Benytter først at

$$\ln\sqrt{x} = \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\ln x .$$

Da blir

$$y = \left(\ln\sqrt{x}\right)^x = \left(\tfrac{1}{2}\ln x\right)^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \ln\left(\tfrac{1}{2}\ln x\right)^x = x \cdot \ln\left(\tfrac{1}{2}\ln x\right)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln\left(\tfrac{1}{2}\ln x\right) + x \cdot \frac{1}{\tfrac{1}{2}\ln x} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \ln\left(\ln\sqrt{x}\right) + \frac{1}{\ln x}$$

$$y' = y \cdot \left(\ln\left(\tfrac{1}{2}\ln x\right) + \frac{1}{\ln x} \right) = \underline{\underline{\left(\ln\sqrt{x}\right)^x \left(\ln\left(\ln\sqrt{x}\right) + \frac{1}{\ln x} \right)}}$$

c) $y = x^2 \cdot \sqrt{x^2+4} \cdot \cos^3 x$

$$\ln y = \ln\left(x^2 \cdot \sqrt{x^2+4} \cdot \cos^3 x\right) = \ln x^2 + \ln\sqrt{x^2+4} + \ln\left(\cos^3 x\right)$$

$$= 2\ln x + \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + 3\ln(\cos x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot \frac{1}{x} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x + 3 \cdot \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \underline{\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2+4} - 3\tan x} .$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2+4} - 3\tan x \right) = \underline{\underline{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4} \cdot \cos^3 x \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2+4} - 3\tan x \right)}} .$$

Dette uttrykket kan omformes på mange måter.

Oppgave 2.1.1

a) $y = f(x) = x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2}$

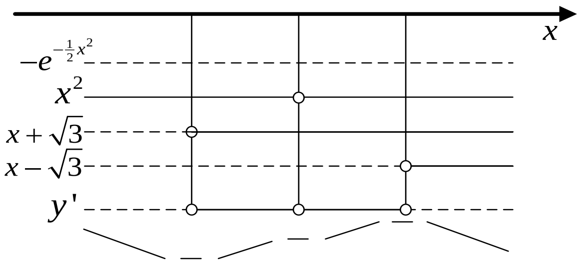
$$y' = 3x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + x^3 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(-\tfrac{1}{2} \cdot 2x\right) = \underline{e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(3x^2 - x^4\right)}$$

$$= -e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot x^2\left(x^2-3\right) = \underline{-e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot x^2\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)}$$

$$y'' = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(-\tfrac{1}{2} \cdot 2x\right) \cdot \left(3x^2 - x^4\right) + e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(6x - 4x^3\right) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(-3x^3 + x^5 + 6x - 4x^3\right)$$

$$= \underline{e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(x^5 - 7x^3 + 6x\right)} = \underline{e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot x \cdot \left(x^2-6\right)\left(x^2-1\right)}$$

Setter opp fortegnsskjema for y':



Ser av fortegnsskjemaet at vi har:

Lokalt minimum når $x = \underline{-\sqrt{3}}$. Da er $f\left(-\sqrt{3}\right) = \left(-\sqrt{3}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \underline{-3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}} \approx \underline{-1.16}$.

Lokalt maksimum når $x = \underline{\sqrt{3}}$. Da er $f\left(\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^2} = \underline{3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}} \approx \underline{1.16}$.

Kontrollerer ved å beregne fortegnet til y'' i ekstremalpunktene:

$x = \underline{-\sqrt{3}}$: $y'' = e^{-\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\right)^2} \cdot \left(-\sqrt{3}\right) \cdot \left(\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 6\right)\left(\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 1\right) = -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} \cdot (-3) \cdot 2 > 0$

slik at vi har lokalt minimum når $x = \underline{-\sqrt{3}}$.

$x = \underline{\sqrt{3}}$: $y'' = e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^2} \cdot \sqrt{3}\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 - 6\right)\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1\right) = \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}} \cdot (-3) \cdot 2 < 0$

slik at vi har lokalt maksimum når $x = \underline{\sqrt{3}}$.

Når $x > 0$, vil *y* hele tiden være positiv. Når $x > \sqrt{3}$, er *f* er avtakende. Da må funksjonen ligge mellom $f\left(\sqrt{3}\right)$ og 0. Et tilsvarende resonnement viser at når $x < -\sqrt{3}$, må funksjonen ligge mellom $f\left(-\sqrt{3}\right)$ og 0. Følgelig må de ekstremalpunktene vi har funnet være globale ekstremalpunkter.
Vi ser også at det ikke er noen ekstremalverdi for $x = 0$ selv om $y' = 0$ da.
Vi har vendepunkter når

$$y'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot x \cdot \left(x^2 - 6\right)\left(x^2 - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{0} \quad \vee \quad x = \underline{\pm\sqrt{6}} \quad \vee \quad x = \underline{\pm 1}.$$

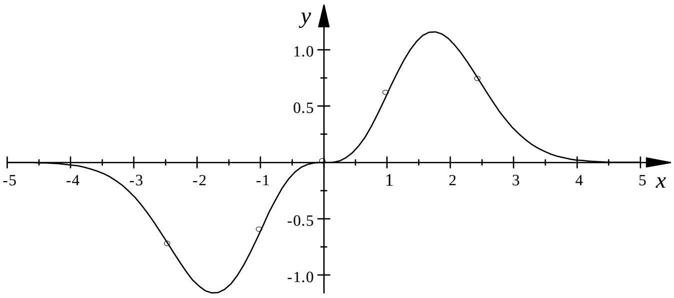
De tilhørende funksjonsverdiene blir:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = f(0) = \underline{0}$$

$$x = \pm\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad y = f\left(\pm\sqrt{6}\right) = \left(\pm\sqrt{6}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{6}\right)^2} = \underline{\pm 6\sqrt{6} \cdot e^{-3}} \approx \underline{\pm 0.73}$$

$$x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad y = f(\pm 1) = (\pm 1)^3 e^{-\frac{1}{2}(\pm 1)^2} = \underline{\pm e^{-\frac{1}{2}}} \approx \underline{\pm 0.61}.$$

Grafen til funksjonen er vist nedenfor med vendepunktene inntegnet.



b) $y = f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$.

Deriverer først nevneren for seg:

$$g(x) = \sqrt{x^2+3} = u^{\frac{1}{2}} \text{ der } u = x^2+3.$$

$$g'(x) = \tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot u' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot 2x = \underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}.$$

$$f'(x) = \frac{(1+0)\cdot\sqrt{x^2+3}-(x+3)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(x+3)\cdot x}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x^2+3-x^2-3x}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^{\frac{3}{2}}} = \underline{\frac{3-3x}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

Nevneren er alltid positiv. Da er *f* voksende når

$$f'(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3-3x>0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x<1}.$$

På tilsvarende måte ser vi at *f* er avtakende når $x>1$.

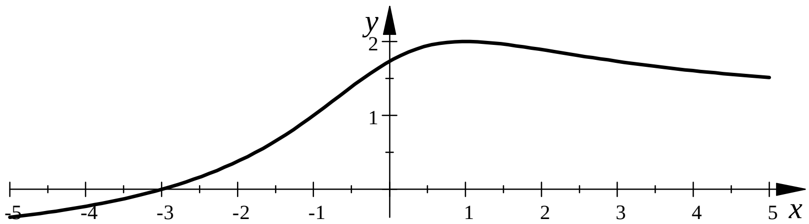
Da må *f* ha et maksimum når $\underline{\underline{x=1}}$. Da er $y_{\max} = f(1) = \dfrac{1+3}{\sqrt{1^2+3}} = \dfrac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0}} = \underline{\underline{1}}.$$

Vi ser at når $x\to-\infty$, er telleren negativ mens nevneren fortsatt er positiv. Vi setter derfor

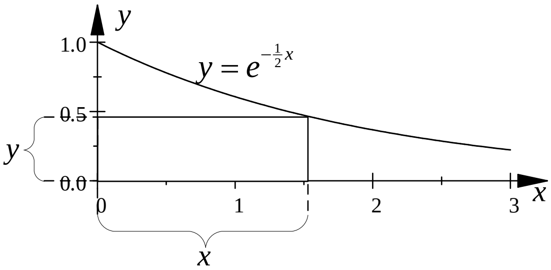
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{-x+3}{\sqrt{(-x)^2+3}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{-1+0}{\sqrt{1+0}} = \underline{\underline{-1}}.$$

Grafen til funksjonen er vist nedenfor.



Oppgave 2.1.2

a)



Arealet av rektangelet blir

$$F = x\cdot y = x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Deriverer for å finne største verdi av *F*:

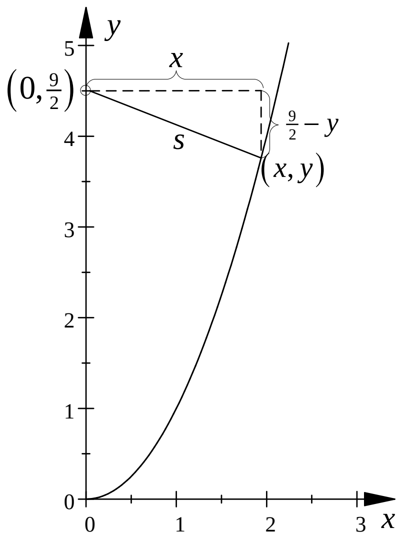
$$\frac{dF}{dx} = 1\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \underline{\left(1-\tfrac{1}{2}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}$$

Vi ser at $\dfrac{dF}{dx}=0$ når $1-\frac{1}{2}x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{2}$. Da er $y=f(2)=e^{-\frac{1}{2}\cdot 2}=\underline{e^{-1}}$, slik at det største arealet blir $F_{\max}=\underline{\underline{2e^{-1}}}$.

Vi kan være sikre på at dette er maksimumsverdi (og ikke minimum) fordi $\dfrac{dF}{dx}>0$ når $0\le x<2$, og $\dfrac{dF}{dx}<0$ når $x>2$.

b)



Avstanden s er gitt ved

$$s=\sqrt{x^2+\left(\tfrac{9}{2}-y\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(\tfrac{9}{2}-x^2\right)^2}$$

$$=\sqrt{x^2+\tfrac{81}{4}-9x^2+\left(x^2\right)^2}=\underline{\sqrt{x^4-8x^2+\tfrac{81}{4}}}$$

Deriverer får å finne minste verdi av s. Setter da

$s=\sqrt{u}$ der $u=x^4-8x^2+\frac{81}{4}$.

Da blir

$$\frac{ds}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2s}\cdot\left(4x^3-16x\right)=\frac{1}{2s}\cdot 4x\left(x^2-4\right)$$

$$=\underline{\frac{1}{s}\cdot 2x(x-2)(x+2)}$$

Her er åpenbart $s>0$. Har også forutsatt at $x\ge 0$. Da blir $\dfrac{ds}{dx}<0$ når $0<x<2$, og $\dfrac{ds}{dx}>0$ når $x>2$. Følgelig må s være minst når $x=\underline{\underline{2}}$. Da er $y=x^2=2^2=\underline{\underline{4}}$.

Den minste avstanden blir da

$$s_{\min}=\sqrt{2^2+\left(\tfrac{9}{2}-4\right)^2}=\sqrt{4+\tfrac{1}{4}}=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{17}}}.$$

Oppgave 2.2.1

a) Profittfunksjonen blir

$$\pi(x)=I(x)-K(x)=900x-\left(50\,000+400x-2x^2+\tfrac{1}{300}x^3\right)$$

$$=\underline{-50\,000+500x+2x^2-\tfrac{1}{300}x^3}$$

Størst profitt når

$$\pi'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 500+4x-\tfrac{1}{100}x^2=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{100}\right)\cdot 500}}{2\cdot\left(-\frac{1}{100}\right)}=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{-\frac{1}{50}}=(-50)(-4\pm 6)=\begin{cases}500\\-100\end{cases}$$

Den eneste brukbare løsningen er $x=\underline{\underline{500}}$. Vi kontrollerer at dette virkelig gir *maksimal* profitt og ikke *minimal*:

$$\pi''(x)=4-\tfrac{1}{50}x \quad \Rightarrow \quad \pi''(500)=4-\tfrac{1}{50}\cdot 500=-6.$$

Da er profittfunksjonen konkav rundt $x=500$, slik at denne verdien må gi maksimal profitt.

b) Når prisen er *p*, blir profittfunksjonen

$$\pi(x) = I(x) - K(x) = p \cdot x - \left(50\,000 + 400x - 2x^2 + \tfrac{1}{300}x^3\right)$$

$$= \underline{-50\,000 + (p-400)x + 2x^2 - \tfrac{1}{300}x^3}$$

$$\pi'(x) = (p-400) + 4x - \tfrac{1}{100}x^2 .$$

Dersom profitten skal være størst når $x = 450$, må

$$\pi'(450) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (p-400) + 4\cdot 450 - \tfrac{1}{100}\cdot 450^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p = 400 - 1800 + 2025 = \underline{\underline{625}}$$

Oppgave 2.2.2

a) Slik vi har satt opp kostnads- og inntektsfunksjonene, blir profittfunksjonen

$$\pi(x) = I(x) - K(x) = p\cdot x - \left(K_0 + K_1 x - K_2 x^2 + K_3 x^3\right)$$

$$= -K_0 + (p - K_1)x + K_2 x^2 - K_3 x^3$$

Størst profitt når

$$\pi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (p-K_1) + 2K_2 x - 3K_3 x^2 = 0$$

$$x = \frac{-2K_2 \pm \sqrt{(-2K_2)^2 - 4\cdot(-3K_3)\cdot(p-K_1)}}{2\cdot(-3K_3)} = \frac{-2K_2 \pm \sqrt{4K_2^{\;2} + 12K_3(p-K_1)}}{-6K_3}$$

$$= \frac{K_2 \mp \sqrt{K_2^{\;2} + 3K_3(p-K_1)}}{3K_3}$$

I alle praktiske situasjoner er $p > K_1$ (salgsprisen må være større enn produksjons-kostnadene før vi tar hensyn til spesielle effekter), slik at $\sqrt{K_2^{\;2} + K_3(p-K_1)} > K_2$. Da er det kun pluss-fortegnet foran rottegnet som kan gi positiv *x*-verdi.

$$\pi''(x) = 2K_2 - 6K_3 x .$$

Setter inn $x = x_1 = \dfrac{K_2 + \sqrt{K_2^{\;2} + 3K_3(p-K_1)}}{3K_3}$, og får

$$\pi''(x_1) = 2K_2 - 6K_3 \cdot \frac{K_2 + \sqrt{K_2^{\;2} + 3K_3(p-K_1)}}{3K_3} = 2K_2 - 2\left(K_2 + \sqrt{K_2^{\;2} + 3K_3(p-K_1)}\right)$$

$$= -2\sqrt{K_2^{\;2} + 3K_3(p-K_1)} < 0$$

som viser at profittfunksjonen må være konkav rundt den *x*-verdien der grensekostnad er lik grenseinntekt. Dermed har vi vist at denne *x*-verdien gir *størst* profitt.

Oppgave 2.2.3

a) $$x(p) = A\cdot e^{-a\cdot p} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(p)}{dp} = A\cdot(-a)e^{-a\cdot p} .$$

Da er inntekten størst når

$$\frac{p}{x(p)}\cdot\frac{dx(p)}{dp}=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{p}{A\cdot e^{-a\cdot p}}\cdot A\cdot(-a)e^{-a\cdot p}=-1 \quad\Leftrightarrow\quad -a\cdot p=-1 \quad\Leftrightarrow\quad p=\underline{\underline{\frac{1}{a}}}.$$

b) Vi vet at:

$$x(20)=20\,000=A\cdot e^{-20a}.$$

$$x(22)=18\,000=A\cdot e^{-22a}.$$

Deler disse to likningene på hverandre, og får

$$\frac{20\,000}{18\,000}=\frac{A\cdot e^{-20a}}{A\cdot e^{-22a}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{10}{9}=e^{-20a+22a}=e^{2a} \quad\Leftrightarrow\quad 2a=\ln\left(\tfrac{10}{9}\right) \quad\Leftrightarrow\quad a=\underline{\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{10}{9}\right)}.$$

Den prisen som gir størst inntekt, er da

$$p=\frac{1}{a}=\frac{1}{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{9}\right)}\approx\underline{\underline{19.0}}.$$

Istedenfor å øke billettprisen, bør altså selskapet senke den til 19 kroner.

Oppgave 2.3.1

a) $y=f(x)=\sqrt{x^2+5}=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$ der $u=x^2+5$.

Da er

$$f'(x)=\tfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot u'=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\cdot 2x=\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}}.$$

Tilvekstformelen gir

$$\Delta y\approx f'(x_0)\cdot\Delta x=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^{\;2}+5}}\cdot\Delta x=\frac{2.00}{\sqrt{2.00^2+5}}\cdot 0.03=\frac{2.00}{3.00}\cdot 0.03=\underline{\underline{0.02}}.$$

b) $y=f(x)=\dfrac{1}{\cos x}=(\cos x)^{-1}=u^{-1}$ der $u=\cos x$.

Da er

$$f'(x)=(-1)\cdot u^{-1-1}\cdot u'=\frac{-1}{u^2}\cdot(-\sin x)=\underline{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}.$$

Tilvekstformelen gir

$$\Delta y\approx f'(x_0)\cdot\Delta x=\frac{\sin x_0}{\cos^2 x_0}\cdot\Delta x=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\frac{\pi}{60}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}\cdot\frac{\pi}{60}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\cdot\frac{\pi}{60}=\underline{\underline{\frac{\pi}{90}}}.$$

Oppgave 2.4.1

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\ln x}{x^2-1}\left(=\frac{1\cdot\ln 1}{1^2-1}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{2x}=\frac{\ln 1+1}{2\cdot 1}=\frac{0+1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x-1)}{x^2-1}\left(=\frac{\ln(2\cdot 1-1)}{1^2-1}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2x-1}\cdot 2}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x(2x-1)}=\frac{1}{1\cdot(2\cdot 1-1)}=\underline{\underline{1}}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)-\cos x}{x^2}\left(=\dfrac{\cos 0-\cos 0}{0^2}=\dfrac{1-1}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(2x)\cdot 2-(-\sin x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)+\sin x}{2x}\left(=\frac{-2\sin 0+\sin 0}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(2x)\cdot 2+\cos x}{2}=\frac{-4\cdot\cos 0+\cos 0}{2}=\frac{-4+1}{2}=\underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

Oppgave 2.4.2

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(x^2-1)}\left(=\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x}\cdot\frac{x(x^2-1)}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}\right)=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x\cdot\ln x}{x^2}\left(=\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x\left(\ln x+x^{-1}\right)}{2x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\left(\ln x+x^{-1}\right)+e^x\left(\frac{1}{x}-x^{-2}\right)}{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{2}\to\infty$$

Denne grenseverdien eksisterer ikke.

Oppgave 2.4.3

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Dette er av typen ” $\infty\cdot\sin\left(\frac{1}{\infty}\right)=\infty\cdot\sin 0=\infty\cdot 0$ ”. Prøver derfor omformingen

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\left(=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-x^{-2}\right)}{-x^{-2}}=\lim_{x\to\infty}\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)=\cos 0=\underline{\underline{1}}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\right)$

Dette er av typen ” $\infty\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\infty\cdot 0$ ”. Prøver derfor omformingen

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\left(\tfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\left(=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{0}=\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2+1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+0}=\underline{\underline{1}}$$

Oppgave 2.4.4

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\frac{1}{\cos x}\right)$.

Direkte innsetting gir et uttrykk av formen ” $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{0}=\infty-\infty$ ”.

Benytter da at $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ og får

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - 1}{\cos x}\left(= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x - 0}{-\sin x} = \frac{0-0}{-1} = \underline{\underline{0}}$$

b) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x}{1-x} - \frac{1}{\ln x}\right)$.

Direkte innsetting gir et uttrykk av formen "$\frac{2}{1-1} - \frac{1}{\ln 1} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$".

Setter alt opp på en brøkstrek:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x}{1-x} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x\cdot\ln x - (1-x)}{(1-x)\cdot\ln x} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x\cdot\ln x + x - 1}{(1-x)\cdot\ln x}\left(= \frac{2\cdot 0 + 1 - 1}{0\cdot 0} = \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{2\cdot\ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} + 1 - 0}{(-1)\cdot\ln x + (1-x)\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2\ln x + 3}{-\ln x + \frac{1}{x} - 1} = \frac{2\cdot 0 + 3}{-0 + 1 - 1} = \frac{3}{0}$$

Denne grenseverdien eksisterer ikke.

Siden nevneren kan skrives $-\ln x + \frac{1-x}{x}$, ser vi at begge leddene er negative når $x \to 1^+$.

Da vil grenseverdien for hele uttrykket gå mot $-\infty$.

Oppgave 2.4.5

a) $\lim_{x\to 0}\left((\sin x)^x\right)$.

Dette er av formen "0^0". Da blir

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\ln(\sin x)^x\right) = \lim_{x\to 0}\left(x\cdot\ln(\sin x)\right) = \left(0\cdot\ln 0 = 0\cdot(-\infty)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{\tan x}\right)\left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2x}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right) = -\frac{0}{\frac{1}{\cos^2 0}} = -\frac{0}{1} = \underline{0}$$

Dermed blir

$$\lim_{x\to 0}\left((\sin x)^x\right) = e^L = e^0 = \underline{\underline{1}}.$$

b) $\lim_{x\to 0}\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

Dette er av formen "$1^{\frac{1}{0}} = 1^\infty$". Da blir

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)\left(= \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}\left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{2} = \frac{-\frac{1}{1^2}}{2} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

Dermed blir

$$\lim_{x\to 0^+}\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right) = e^L = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{2}}}}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\left(\ln x\right)^{x-1}\right)$.

Dette er av formen " 0^0 ". Da blir

$$L=\lim_{x\to 1^+}\left(\ln\left(\ln x\right)^{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\left(x-1\right)\cdot\ln\left(\ln x\right)\right)\left(=0\cdot\ln 0=0\cdot(-\infty)\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln\left(\ln x\right)}{\frac{1}{x-1}}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\left(x-1\right)^2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\left(x-1\right)^2}{x\cdot\ln x}\left(=\frac{-0}{1\cdot 0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-2\left(x-1\right)}{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-2\left(x-1\right)}{\ln x+1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{0}{0+1}=\underline{0}$$

Dermed blir

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\ln x\right)^{x-1}\right)=e^L=e^0=\underline{\underline{1}}.$$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left(\frac{1}{\tan x}\right)^x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left(\tan x\right)^{-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\tan x\right)^{-x}$.

Dette er av formen " 0^0 ". Da blir

$$L=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\left(\tan x\right)^{-x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(-x\cdot\ln\left(\tan x\right)\right)\left(=-0\cdot\ln 0=0\cdot\infty\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\ln\left(\tan x\right)}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\sin x\cdot\cos x}\left(=\frac{0}{0}\right)$$

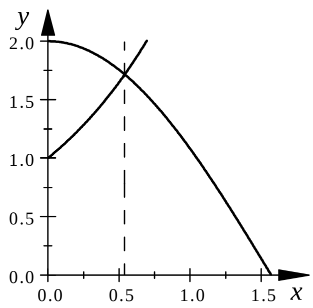
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\left(-\sin x\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{2\cdot 0}{1^2-0^2}=\underline{0}$$

Dermed blir

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\left(\frac{1}{\tan x}\right)^x\right)=e^L=e^0=\underline{\underline{1}}.$$

Oppgave 2.5.1

a)



$e^x=2\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

På figuren til venstre ser du grafene til $y=e^x$ og $y=2\cos x$. Jeg ser at jeg får en løsning nær $x=0.5$. Jeg benytter derfor startverdien $x_0=0.5$.

Så skriver jeg likningen på formen

$$f\left(x\right)=e^x-2\cos x=0.$$

Da blir

$$f'\left(x\right)=e^x-2\left(-\sin x\right)=e^x+2\sin x$$

slik at

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}=x_n-\frac{e^{x_n}-2\cos x_n}{e^{x_n}+2\sin x_n}.$$

Så setter jeg kalkulatoren i arbeid:

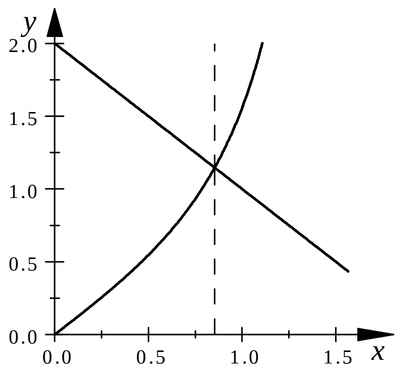
$$x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0} - 2\cos x_0}{e^{x_0} + 2\sin x_0} = 0.5 - \frac{e^{0.5} - 2\cos 0.5}{e^{0.5} + 2\sin 0.5} \approx \underline{0.5408}.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{e^{x_1} - 2\cos x_1}{e^{x_1} + 2\sin x_1} = 0.5408 - \frac{e^{0.5408} - 2\cos 0.5408}{e^{0.5408} + 2\sin 0.5408} \approx \underline{0.5398}.$$

$$x_3 = x_2 - \frac{e^{x_2} - 2\cos x_2}{e^{x_2} + 2\sin x_2} = 0.5398 - \frac{e^{0.5398} - 2\cos 0.5398}{e^{0.5398} + 2\sin 0.5398} \approx \underline{0.5398}.$$

Vi har funnet en stabil løsning: $x \approx \underline{\underline{0.5398}}$.

b)



$x + \tan x = 2,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

For å finne en gunstig startverdi, omformer jeg likningen til

$$\tan x = -x + 2$$

og tegner grafene til $y = \tan x$ og $y = -x + 2$ (se figuren til høyre). Da ser jeg at jeg får en løsning nær $x = 1$. Jeg benytter derfor startverdien $x_0 = 1$.

Så skriver jeg likningen på formen

$$f(x) = \tan x + x - 2 = 0.$$

Da blir

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 1$$

slik at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n + x_n - 2}{\frac{1}{\cos^2 x_n} + 1}.$$

Så setter jeg kalkulatoren i arbeid:

$$x_1 = x_0 - \frac{\tan x_0 + x_0 - 2}{\frac{1}{\cos^2 x_0} + 1} = 1.00 - \frac{\tan 1.00 + 1.00 - 2}{\frac{1}{\cos^2 1.00} + 1} \approx \underline{0.8740}.$$

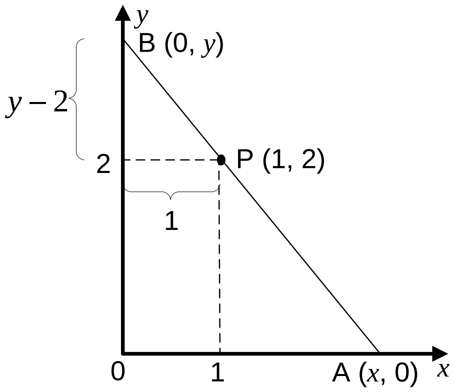
$$x_2 = x_1 - \frac{\tan x_1 + x_1 - 2}{\frac{1}{\cos^2 x_1} + 1} = 0.8740 - \frac{\tan 0.8740 + 0.8740 - 2}{\frac{1}{\cos^2 0.8740} + 1} \approx \underline{0.8539}.$$

$$x_3 = x_2 - \frac{\tan x_2 + x_2 - 2}{\frac{1}{\cos^2 x_2} + 1} = 0.8539 - \frac{\tan 0.8539 + 0.8539 - 2}{\frac{1}{\cos^2 0.8539} + 1} \approx \underline{0.8535}.$$

$$x_4 = x_3 - \frac{\tan x_3 + x_3 - 2}{\frac{1}{\cos^2 x_3} + 1} = 0.8535 - \frac{\tan 0.8535 + 0.8535 - 2}{\frac{1}{\cos^2 0.8535} + 1} \approx \underline{0.8535}.$$

Vi har funnet en stabil løsning: $x \approx \underline{\underline{0.8535}}$.

Oppgave 2.6.1



Vi må først finne en sammenheng mellom x og y. Av figuren ser vi at

$$\frac{y-2}{1}=\frac{y}{x} \quad\Leftrightarrow\quad x(y-2)=y \quad\Leftrightarrow\quad xy-2x=y$$

$$\Leftrightarrow\quad y(x-1)=2x \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{2x}{x-1}$$

Formuleringen ”A beveger seg med konstant fart på 0.1 enheter pr sekund i positiv retning langs x-aksen” innebærer at

$$\frac{dx}{dt}=0.1.$$

Farten til punktet B blir nå

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{2(x-1)-2x(1-0)}{(x-1)^2}\cdot(0.1)=\underline{\frac{-0.2}{(x-1)^2}}.$$

a) Når $x=2$, blir farten til punktet B

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-0.2}{(2-1)^2}=\underline{\underline{-0.2}},$$

d.v.s. at punktet B beveger seg nedover y-aksen med fart 0.2 enheter pr sekund.

b) At ”punktene beveger seg like fort” må tolkes som

$$\left|\frac{dy}{dt}\right|=0.1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{0.2}{(x-1)^2}=0.1 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2=2 \quad\Leftrightarrow\quad x-1=\sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{\underline{\sqrt{2}+1}}.$$

(den negative løsningen kan ikke brukes). Da blir

$$y=\frac{2x}{x-1}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)-1}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)=\underline{\underline{2+\sqrt{2}}}.$$

Oppgave 2.8.1

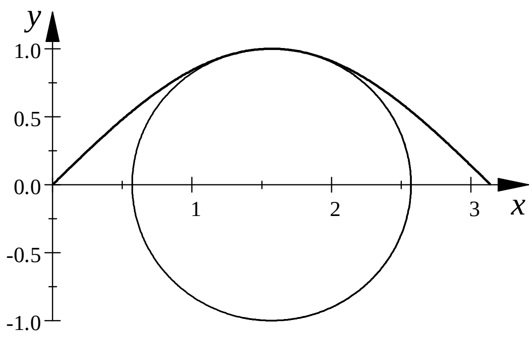
a) $y=f(x)=\sin x \quad\Rightarrow\quad y'=\cos x$

$\Rightarrow\quad y''=-\sin x$

I punktet $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ er $y'=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ og $y''=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, slik at

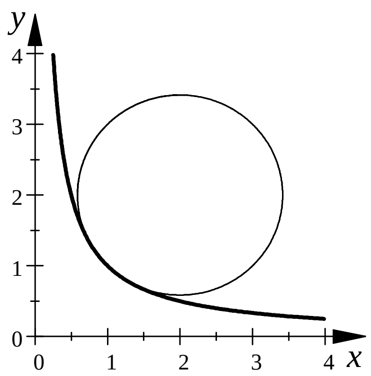
$$\rho=\left|\frac{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|=\left|\frac{\left(1+0^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-1}\right|=\underline{\underline{1}}.$$

Situasjonen er illustrert til høyre.



b) $y = f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad y' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \quad y'' = -(-2)x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$



I punktet $(1,1)$ blir $y' = -\dfrac{1}{1^2} = -1$ og $y'' = \dfrac{2}{1^3} = 2$,

slik at

$$\rho = \left| \frac{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right| = \left| \frac{\left(1 + (-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right| = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}\,.$$

Situasjonen er illustrert til høyre.