Vektorer.

I dette lille notatet skal jeg gi en kortfattet oversikt over grunnleggende vektorregning. Mye av dette er forhåpentlig kjent fra før, men det skader sikkert ikke med en kort repetisjon.

1. Definisjoner.

Mange av de størrelsene vi benytter i matematikk, er fullstendig definert bare med et *tall*, eventuelt med en *måleenhet* i tillegg. Slike størrelser kaller vi gjerne ***skalare størrelser***. I fysikk viser det seg imidlertid at vi også må kjenne en *retning*. Slike størrelser som består av tallverdi (gjerne med måleenhet i tillegg) og retning, kaller vi ***vektorer***. For eksempel er *krefter* og *hastigheter* vektorer. I tillegg til tallet som angir hvor stor kraften eller hastigheten er, må vi også vite *retningen* for at kraften eller hastigheten skal være fullstendig definert.

Når vi bruker bokstaver for å angi en vektor, skriver vi bokstavene med **uthevet skrift** eller med en pil over: $\mathbf{v}$ eller $\vec{v}$ er vanlige måter å angi en vektor. Noen ganger brukes begge deler: $\vec{\mathbf{v}}$. Når vi skriver for hand, bruker vi helst pil over eller en strek under bokstaven: $\vec{v}$ eller $\underline{v}$. I dette notatet skal jeg stort sett benytte **uthevet skrift**: **v**.

Noen ganger er vi kun interessert i *størrelsen* (*lengden*) av en vektor, uten å bry oss om retningen. Vi bruker da skrivemåten $\|\mathbf{v}\|$, $|\mathbf{v}|$ eller bare v for å angi størrelsen av **v**.

Vi definerer ***likhet*** slik: To vektorer **u** og **v** er like hvis og bare hvis begge vektorene har samme størrelse og samme retning.

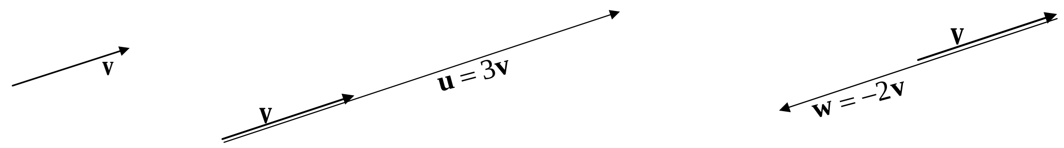
2. Multiplikasjon av vektor med skalar.

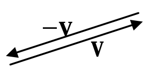
La **v** være en vektor, mens t er en skalar (et vanlig tall). Da definerer vi:

Dersom $t > 0$, er $\mathbf{u} = t \cdot \mathbf{v}$ en ny vektor der $|\mathbf{u}| = t \cdot |\mathbf{v}|$, og som har *samme* retning som **v**.

Dersom $t < 0$, er $\mathbf{u} = t \cdot \mathbf{v}$ en ny vektor der $|\mathbf{u}| = t \cdot |\mathbf{v}|$, og som har *motsatt* retning av **v**.

Vektorer illustreres gjerne med en vanlig pil, der pilens lengde og retning angir vektorens størrelse og retning. Nedenfor ser du en vektor **v** samt vektorene $\mathbf{u} = 3\mathbf{v}$ og $\mathbf{w} = -2\mathbf{v}$

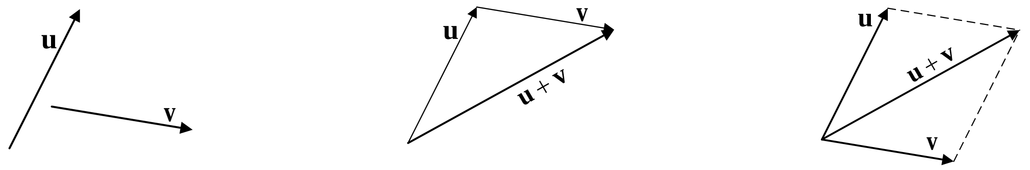




Legg spesielt merke til at $-\mathbf{v}$ er en vektor som er like stor som **v**, men som har motsatt retning av **v**.

3. Addisjon og subtraksjon av vektorer.

Figuren nedenfor viser hvordan vi ***adderer*** to vektorer **u** og **v**:



Til venstre ser du de to vektorene **u** og **v** som skal adderes.

I midten ser du den ene måten å gå fram på: Vi lar **v** starte der **u** slutter. Vektorsummen $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ blir da en vektor som går fra starten på **u** til slutten av **v**.

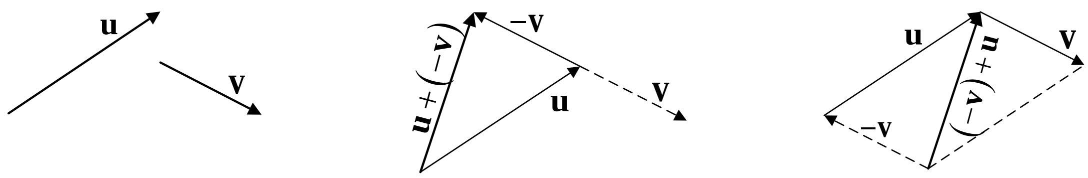
Til høyre ser du en annen måte å gå fram på: Vi lar **u** og **v** starte i samme punkt slik at de definerer et parallellogram. Da blir $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ en vektor som følger diagonalen fra vektorenes felles startpunkt.

Dersom vi skal addere tre eller flere vektorer, starter vi med å addere to av dem. Deretter legger vi til den tredje. Figuren nedenfor viser hvordan vi kan gå fram for å finne $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$:

Ved hjelp av slike figurer kan vi vise at regnereglene nedenfor må gjelde, der **u** og **v** er vektorer mens *s* og *t* er skalarer:

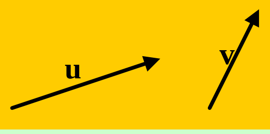
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$
$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$$
$$t\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=t\cdot\mathbf{u}+t\cdot\mathbf{v}$$
$$(s+t)\cdot\mathbf{u}=s\cdot\mathbf{u}+t\cdot\mathbf{u}$$

Subtraksjon av vektorer skjer enkelt ved å benytte at $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$. Figurene nedenfor viser hvordan det kan gjøres:



Vi starter som før med to vektorer **u** og **v**. Figuren i midten viser hvordan vi går fram når vi adderer **u** og $-\mathbf{v}$, mens figuren til høyre viser hvordan vi benytter den andre diagonalen i parallellogrammet som **u** og **v** utspenner til å finne $(-\mathbf{v})+\mathbf{u}$.

Eksempel 3.1: Nedenfor til venstre ser du to vektorer **u** og **v**. Finn:

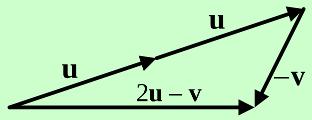


a) $2\mathbf{u}-\mathbf{v}$

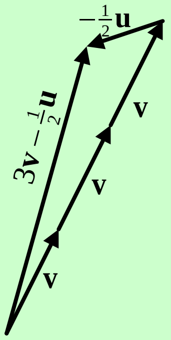
b) $3\mathbf{v}-\frac{1}{2}\mathbf{u}$

Løsning:

a)

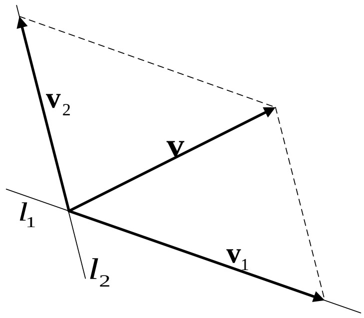


b)



Oppgave 3.1.

4. Dekomponering av vektorer.

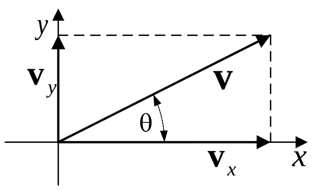


La oss starte med et plant (to-dimensjonalt) koordinatsystem. I dette koordinatsystemet fastlegger vi to retninger, for eksempel ved å tegne to ikke-parallelle linjer l_1 og l_2. Å *dekomponere* en vektor **v** i disse to retningene består da i å finne to nye vektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, en i hver av de to retningene, slik at $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$. Figuren til venstre viser hvordan vi kan gjøre dette. Vi parallellforskyver **v** slik at den begynner der linjene krysser hverandre. Så trekker vi paralleller med linjene l_1 og l_2 gjennom "spissen" av **v**. Dermed framkommer et parallellogram, og $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ går da langs sidene i dette parallellogrammet.

I et tre-dimensjonalt koordinatsystem går vi fram på samme måten: Vi fastlegger tre retninger ved å trekke tre ikke-parallelle linjer. Deretter bestemmer vi tre vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$, en i hver av de tre retningene, slik at $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$.

Oppgave 4.1.

5. Enhetsvektorer.



Vi skal nå plassere en vektor **v** i et *rettvinklet* koordinatsystem. I starten skal vi begrense oss til et todimensjonalt koordinatsystem. Da kan **v** dekomponeres i to andre vektorer, en vektor $\mathbf{v}_x$ parallell med *x*-aksen og en vektor $\mathbf{v}_y$ parallell med *y*-aksen. Vi har da at $\mathbf{v}=\mathbf{v}_x+\mathbf{v}_y$. Se figuren til venstre.

$\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$	$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$
$v_x = \lvert\mathbf{v}\rvert\cos\theta < 0$	$v_x = \lvert\mathbf{v}\rvert\cos\theta > 0$
$v_y = \lvert\mathbf{v}\rvert\sin\theta > 0$	$v_y = \lvert\mathbf{v}\rvert\sin\theta > 0$
$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$
$v_x = \lvert\mathbf{v}\rvert\cos\theta < 0$	$v_x = \lvert\mathbf{v}\rvert\cos\theta > 0$
$v_y = \lvert\mathbf{v}\rvert\sin\theta < 0$	$v_y = \lvert\mathbf{v}\rvert\sin\theta < 0$

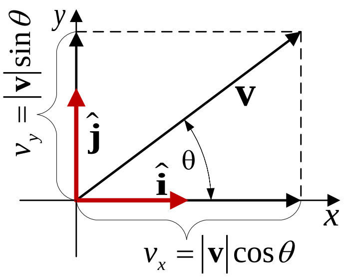
Nå viser det seg å være hensiktsmessig å endre litt på denne tolkingen. Istedenfor å benytte to *vektorer* $\mathbf{v}_x$ og $\mathbf{v}_y$, innfører vi to *skalare komponenter* v_x og v_y slik:

$$v_x = \lvert\mathbf{v}\rvert \cdot \cos\theta, \qquad v_y = \lvert\mathbf{v}\rvert \cdot \sin\theta .$$

Her er θ vinkelen mellom positiv *x*-akse og **v**.

Legg spesielt merke til at disse definisjonene fører til at v_x og v_y får korrekte fortegn. Se figuren til venstre, og husk fortegnet til $\cos\theta$ og $\sin\theta$ når θ ligger i de angitte intervallene.

Nå er det hensiktsmessig å definere to ***enhetsvektorer*** $\hat{\mathbf{i}}$ og $\hat{\mathbf{j}}$ slik:



$$\lvert\hat{\mathbf{i}}\rvert = \lvert\hat{\mathbf{j}}\rvert = 1 .$$

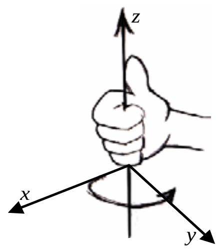
$\hat{\mathbf{i}}$ har retning langs positiv *x*-akse.

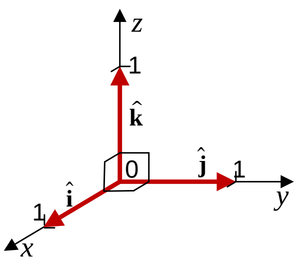
$\hat{\mathbf{j}}$ har retning langs positiv *y*-akse.

Da kan en vektor **v** skrives slik:

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} .$$

Se figuren til venstre.





I et tredimensjonalt koordinatsystem har vi en *z*-retning vinkelrett på *x*- og *y*-aksene, slik at *xyz* danner et ***høyrehåndssystem***. Dette kan defineres slik: Grip om *z*-aksen slik at tommelen peker i positiv *z*-retning. Da vil de fire andre fingrene peke *fra* positiv *x mot* positiv *y* slik figuren til venstre viser.

Så innfører vi en enhetsvektor $\hat{\mathbf{k}}$ i *z*-retningen. Et tredimensjonalt koordinatsystem med enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ inntegnet er vist i midten ovenfor.

I et slikt koordinatsystem kan en vektor **v** skrives

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}} .$$

Her er v_z komponenten av **v** langs *z*-aksen. Vi sier at **v** er skrevet på ***komponentform***.

Slik dekomponering er svært nyttig i mange sammenhenger, for eksempel når vi skal addere eller subtrahere vektorer slik eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 5.1: Vi har gitt vektorene

$$\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

og

$$\mathbf{v} = -\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}} .$$

Finn $2\mathbf{u}-\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}+3\mathbf{v}$.

Løsning:

$$2\mathbf{u}-\mathbf{v} = 2\left(2\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\right)-\left(-\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}\right) = 4\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}} = \underline{\underline{5\hat{\mathbf{i}}-5\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}}}.$$

$$\mathbf{u}+3\mathbf{v} = \left(2\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\right)+3\left(-\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}\right) = 2\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}-3\hat{\mathbf{i}}+9\hat{\mathbf{j}}-6\hat{\mathbf{k}} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{i}}+8\hat{\mathbf{j}}-5\hat{\mathbf{k}}}}.$$

`Oppgave 5.1, 5.2.`

Dersom det ikke kan føre til misforståelser, kan vi unnlate å skrive enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$. Da skriver vi bare ned komponentene v_x, v_y og v_z *i riktig rekkefølge* slik:

$$\mathbf{v} = \left[v_x, v_y, v_z\right] \text{ eller uten bruk av komma: } \mathbf{v} = \left[v_x\ v_y\ v_z\right].$$

Vi kan også skrive vektoren på *kolonneform:*

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}.$$

Hittil har vi forutsatt at enhetsvektorene går langs *x*- *y*- eller *z*-aksen. Men det er slett ikke nødvendig. Vi kan ha enhetsvektorer som peker i hvilken som helst retning. Dersom $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{v}$ er en enhetsvektor som peker i samme retning som vektoren **v**, har vi at $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{v}$. Dermed har vi en grei måte å finne en enhetsvektor i samme retning som **v**:

En enhetsvektor i samme retning som **v** er gitt ved

$$\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

6. Skalarproduktet.

Vi definerer ***skalarproduktet*** av to vektorer slik:

Skalarproduktet av de to vektorene **u** og **v** er

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\theta$$

der θ er vinkelen mellom **u** og **v**.

Vi kan med en gang merke oss noen viktige konsekvenser av denne definisjonen:

- Siden både $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ og $\cos\theta$ er *skalarer* (vanlige tall), blir også $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ en skalar, ikke en vektor.
- Skalarproduktet er ***kommutativt***, d.v.s. at $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$.

- Dersom **u** og **v** står vinkelrett på hverandre, er $\theta = \frac{1}{2}\pi$ slik at $\cos\theta = 0$. Dette fører til at dersom verken **u** eller **v** har lengde lik null, må vi ha at:
  $$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}\perp\mathbf{v}.$$
- $$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos 0 = |\mathbf{v}|^2\cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}.$$

La oss se hva som skjer dersom vi beregner skalarprodukt av enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$ fordi både $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ har lengde lik 1.

$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = 0$ fordi $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ står vinkelrett på hverandre.

Dette gir oss en enkel regneregel for skalarprodukt når vektorene er skrevet på komponent-form:

Dersom $\mathbf{u} = u_x\hat{\mathbf{i}} + u_y\hat{\mathbf{j}} + u_z\hat{\mathbf{k}}$ og $\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$, er

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_x\cdot v_x + u_y\cdot v_y + u_z\cdot v_z.$$

For oversiktens skyld skal jeg nøye meg med å bevise dette for todimensjonale vektorer:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \left(u_x\hat{\mathbf{i}} + u_y\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}\right) = u_x v_x \underbrace{\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}}}_{=1} + u_x v_y \underbrace{\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}}}_{=0} + u_y v_x \underbrace{\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{i}}}_{=0} + u_y v_y \underbrace{\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}}}_{=1} = u_x v_x + u_y v_y.$$

Beviset for tredimensjonale vektorer er helt likedan, bare med mer skriving.

Nå er det lett å finne lengden av en vektor på komponentform:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}}.$$

Eksempel 6.1: Vi har gitt vektorene

$$\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = -\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}.$$

Finn $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, og vinkelen θ mellom **u** og **v**.

Løsning:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 + 1\cdot(-2) = \underline{\underline{-7}}.$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}.$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \frac{-7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} \approx \underline{-0.7638} \quad \Leftrightarrow \quad \theta \approx \underline{\underline{139.8^\circ}}.$$

Oppgave 6.1.

Eksempel 6.2: Bestem t slik at vektorene

$$\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \text{ og } \mathbf{v} = -\hat{\mathbf{i}} + t \cdot \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$$

står vinkelrett på hverandre.

Løsning: Når to vektorer står vinkelrett på hverandre, er skalarproduktet lik null:

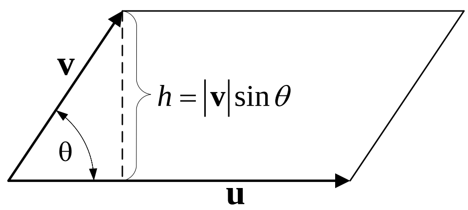
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot t + 1 \cdot (-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4 - t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = -4}}.$$

Oppgave 6.2, 6.3.

Til slutt skal jeg uten bevis føre opp disse setningene:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$
$$t \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$$

7. Vektorproduktet.



La **u** og **v** være to vektorer. Av figuren til venstre ser du sikkert at arealet av det parallellogrammet som vektorene utspenner, er

$$A = |\mathbf{u}| \cdot h = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin\theta$$

der θ er vinkelen mellom vektorene.

Vi skal nå tilordne dette arealet en enhetsvektor $\hat{\mathbf{n}}$ vinklerett på flata som utspennes av **u** og **v**, slik at **u**, **v** og $\hat{\mathbf{n}}$ danner et høyrehåndssystem. På figuren vil da $\hat{\mathbf{n}}$ peke *ut av* papirplanet. Den vektoren som har størrelse A og retning $\hat{\mathbf{n}}$ skal vi kalle ***vektorproduktet*** eller ***kryss-produktet*** av **u** og **v**. Vi definerer altså:

Vektorproduktet (***kryssproduktet***) av de to vektorene **u** og **v** er

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin\theta \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

der θ er vinkelen mellom **u** og **v**, og $\hat{\mathbf{n}}$ er en enhetsvektor slik at **u**, **v** og $\hat{\mathbf{n}}$ danner et høyrehåndssystem.

Vi kan med en gang merke oss noen viktige konsekvenser av denne definisjonen:

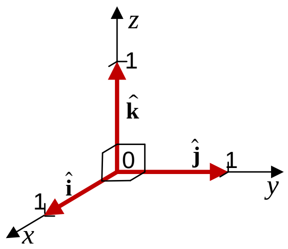
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ blir en *vektor* som står vinkelrett på både **u** og **v**.
- Vektorproduktet er *ikke* kommutativt. Tvert imot har vi at

  $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

  fordi $\hat{\mathbf{n}}$ skifter retning når **u** og **v** bytter plass.

- Dersom **u** og **v** er parallelle, er $\theta = 0$ slik at $\sin\theta = 0$. Dette fører til at dersom verken **u** eller **v** har lengde lik null, må vi ha at:
  $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

La oss se hva som skjer dersom vi beregner vektorprodukt av enhetsvektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:



$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = \vec{0}.$$
$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}.$$
$$\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}.$$

Disse sammenhengene kan du selv kontrollere ved hjelp av figuren til venstre og høyrehåndsregelen!

Væpnet med disse sammenhengene kan vi nå sette opp vektorproduktet på komponentform:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \left(u_x\hat{\mathbf{i}} + u_y\hat{\mathbf{j}} + u_z\hat{\mathbf{k}}\right)\times\left(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}\right)\\
&= u_x\left(v_x\underbrace{\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}}}_{=\vec{0}} + v_y\underbrace{\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}}_{=\hat{\mathbf{k}}} + v_z\underbrace{\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}}}_{=-\hat{\mathbf{j}}}\right) + u_y\left(v_x\underbrace{\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}}_{=-\hat{\mathbf{k}}} + v_y\underbrace{\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}}}_{=\vec{0}} + v_z\underbrace{\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}}}_{=\hat{\mathbf{i}}}\right)\\
&\quad + u_z\left(v_x\underbrace{\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}}_{=\hat{\mathbf{j}}} + v_y\underbrace{\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}}}_{=-\hat{\mathbf{i}}} + v_z\underbrace{\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}}}_{=\vec{0}}\right)\\
&= \underline{\left(u_yv_z - u_zv_y\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(u_xv_z - u_zv_x\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(u_xv_y - u_yv_x\right)\hat{\mathbf{k}}}
\end{aligned}$$

Dette uttrykket er ikke lett å huske. Men dersom du kan beregne determinanter, kan du slippe å huske det. Uttrykket kan nemlig skrives på determinantform slik det er gjort nedenfor:

Dersom $\mathbf{u} = u_x\hat{\mathbf{i}} + u_y\hat{\mathbf{j}} + u_z\hat{\mathbf{k}}$ og $\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$, er

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(u_yv_z - u_zv_y\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(u_xv_z - u_zv_x\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(u_xv_y - u_yv_x\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Eksempel 7.1: Vi har gitt vektorene

$$\mathbf{u} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \text{ og } \mathbf{v} = -\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}.$$

Finn $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Løsning:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \left((-1)(-2) - 1\cdot 3\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(2\cdot(-2) - 1\cdot(-1)\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(2\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)\right)\hat{\mathbf{k}} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}}}$$

Oppgave 7.1, 7.2.

Det fins en mengde setninger for vektorprodukt, og for kombinasjoner av skalarprodukt og vektorprodukt. Jeg skal nøye meg med disse:

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$$
$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\times\mathbf{u}=\mathbf{v}\times\mathbf{u}+\mathbf{w}\times\mathbf{u}$$