Integrasjon.

1. De grunnleggende definisjonene.

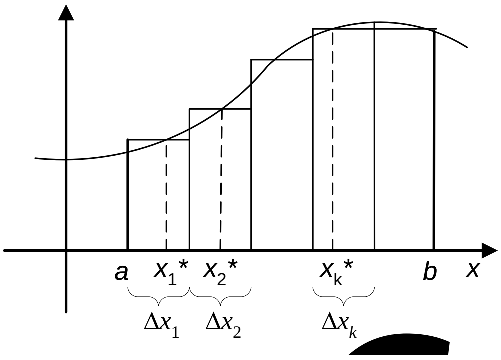
La oss starte med følgende problem:

> Gitt en kontinuerlig funksjon $y = f(x)$ der $f(x) \geq 0$ for $x \in [a, b]$.
> Beregn arealet *A* som er avgrenset av grafen til *f*, *x*-aksen, og de to vertikale linjene $x = a$ og $x = b$.

Vi kan finne en *tilnærmet* verdi for arealet *A* ved følgende prosedyre (se figuren til høyre):
Del opp *x*-aksen i *n* korte stykker med lengder

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_k,\ \ldots,\ \Delta x_n .$$

La x_k^* være en *vilkårlig* *x*-verdi i Δx_k.
Konstruer *n* rektangler der rektangel *k* har grunnlinje Δx_k og høyde $f(x_k *)$.



Arealet av dette rektangelet er $f(x_k *) \cdot \Delta x_k$.
Summen av arealene av alle de *n* rektanglene er da tilnærmet lik arealet *A*:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \cdot \Delta x_k .$$

Det er innlysende at jo smalere rektanglene er, jo bedre er tilnærmelsen. Det er nå rimelig å anta at dersom vi lar $n \to \infty$ samtidig som *alle* strekningene Δx_k går mot null, vil summen ovenfor konvergere mot *A*. Mer inngående undersøkelser (som er alt for omfattende til at vi skal gjennomføre dem) viser at vår antakelse er korrekt. Denne grensen for summen kalles ***integralet av f fra a til b***, og skrives

$$\int_a^b f(x)\,dx .$$

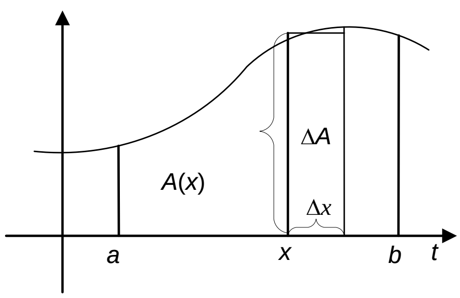
Vi har altså at

Integralet av f fra a til b er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k *) \cdot \Delta x_k .$$

Foreløpig har vi bare *definert* hva vi mener med et integral. Men hvordan *beregner* vi et integral?

Nok en gang skal vi vende tilbake til arealet som vi definerte i innledningen. Men nå skal vi la *t* være fri variabel, og vil skal la $A(x)$ være arealet som avgrenses av *t*-aksen, grafen til *f*, og de to rette linjene $t = a$ og $t = x$ der $x > a$. Se figuren til høyre.



Vi lar nå *x* øke med en *liten* størrelse Δx. Da vil arealet øke med en *liten* størrelse

$$\Delta A \approx f(x)\cdot\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x).$$

Hvis vi nå lar $\Delta x \to 0$, skjer to ting. Først benytter vi definisjonen av derivert til å sette at

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA(x)}{dx}.$$

Dernest er det rimelig å anta at når $\Delta x \to 0$, kan $\approx$ erstattes av =. Også her viser en nærmere undersøkelse at denne antakelsen er korrekt. Følgelig har vi at

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA(x)}{dx} = f(x).$$

Vi har altså vist den fundamentale sammenhengen:

Når $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, er $\dfrac{dA(x)}{dx} = f(x)$.

Med andre ord: for å finne arealet, trenger vi ”bare” å finne en eller annen funksjon $A(x)$ som er slik at

$$\frac{dA(x)}{dx} = f(x).$$

Men det er en liten komplikasjon: Du kan legge til en vilkårlig konstant til $A(x)$, og få den samme funksjonen *f* fordi konstanten faller bort ved derivasjonen. Dette problemet løses ved å innføre en *vilkårlig* funksjon $F(x)$ som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Da er

$$A(x) = F(x) + C.$$

Men av figuren er det opplagt at når $x = a$ blir arealet lik null, slik at

$$A(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(a) + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -F(a).$$

Dermed har vi at

$$A(x) = F(x) - F(a).$$

Nå lar vi øvre grense være *b* istedenfor *x*, og gjeninnfører *x* som fri variabel. Da har vi at:

Gitt en funksjon *f* der $f(x) \geq 0$ når $x \in [a,b]$.
Det arealet som avgrenses av grafen til *f*, *x*-aksen, og de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$, er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

der *F* er en vilkårlig funksjon som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Nå viser det seg at vi har bruk for slike beregninger til mye annet enn den arealberegningen som vi innledet med. Vi definerer derfor:

Gitt en funksjon $y = f(x)$.
Det ***ubestemte integralet*** av *f* er

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

der $F(x)$ er en vilkårlig funksjon som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Det ***bestemte integralet*** av *f* er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

***Eksempel 1.1*: ** Bestem arealet som avgrenses av *x*-aksen, grafen til $y = f(x) = x$, og linjene $x = 2$ og $x = 4$.

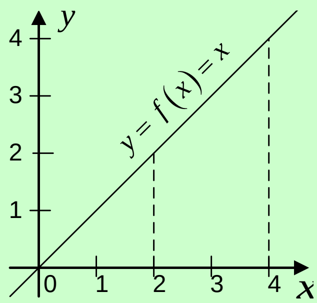
Løsning: Vi må først finne en funksjon $F(x)$ som er slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = x.$$

Vi ser at enhver funksjon av typen

$$F(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + C$$

der *C* er en konstant tilfredsstiller dette kravet.
Da er arealet bestemt ved



$$A = \int_2^4 x\,dx = F(4) - F(2) = \left(\tfrac{1}{2}\cdot 4^2 + C\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 2^2 + C\right) = 8 - 2 = \underline{\underline{6}}.$$

2. Grunnleggende integrasjonsregler.

På grunnlag av definisjonene ovenfor kan vi sette opp mange integrasjonsregler. La oss ta dem i systematisk rekkefølge.

2.1. Generelle regler for bestemte integral.

Av definisjonen på bestemt integral som grense for en sum virker reglene nedenfor ganske innlysende:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{når } a < c < b.$$

2.2. Generelle regler for ubestemte integral.

Den teknikken vi benytter for å beregne et ubestemt integral, kan brukes til å vise at reglene nedenfor gjelder:

La *c* være en konstant, mens *f* og *g* er to funksjoner. Da gjelder:

$$\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx$$

$$\int\big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

2.3. Integrasjon av enkle funksjoner.

Siden $\int f(x)\,dx = F(x)$ der $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$, kan vi bruke kjente derivasjonsregler til å sette opp disse integrasjonsreglene:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad \text{når } n \neq -1.$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,.$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C\,.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C\,.$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C\,.$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C\,.$$

Den første av disse reglene gjelder for *alle* verdier av *n* unntatt for $n=-1$. Eksempel b) og c) nedenfor viser to viktige anvendelser av denne regelen.

***Eksempel 2.1*:** Beregn integralene nedenfor:

a) $\int_0^3 \left(x^2-2x+2\right)dx$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

c) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

d) $\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\,dx$

Løsning:

a) $$\int_0^3 \left(x^2-2x+2\right)dx = \int_0^3 x^2 dx - 2\int_0^3 x\,dx + 2\int_0^3 1\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^3 - 2\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^3 + 2\left[x\right]_0^3$$
$$= \tfrac{1}{3}\left(3^3-0^3\right) - 2\cdot\tfrac{1}{2}\left(3^2-0^2\right) + 2\left(3-0\right) = 9-9+6 = \underline{\underline{6}}$$

b) $$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \int_1^2 x^{-2}dx = \left[\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right]_1^2 = \left[\frac{1}{-1}x^{-1}\right]_1^2 = -1\left(2^{-1}-1^{-1}\right) = -1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

c) $$\int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\left(4^3\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1^3\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(8-1\right) = \underline{\underline{\frac{14}{3}}}$$

d) $$\int_1^2 \frac{\left(x+1\right)^2}{x}dx = \int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x}dx = \int_1^2\left(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^2 x\,dx + \int_1^2 2dx + \int_1^2 \frac{1}{x}dx$$
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 + \left[2x\right]_1^2 + \left[\ln x\right]_1^2 = \tfrac{1}{2}\left(2^2-1^2\right) + 2\left(2-1\right) + \left(\ln 2 - \ln 1\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot 3 + 2\cdot 1 + \ln 2 - 0 = \underline{\underline{\tfrac{7}{2}+\ln 2}}$$

Oppgave 2.1.

3. Substitusjon.

I utgangspunktet er dette kjerneregelen anvendt på integraler. Hovedpoenget er at vi ser etter en kjerne $u\left(x\right)$ som er slik at integranden blir en funksjon av *u* etter at *dx* er erstattet med *du*. Denne erstatningen gjøres vanligvis ved å sette

$$u'\left(x\right) = \frac{du}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{u'\left(x\right)}du\ .$$

Hvis vi nå får et uttrykk som kan integreres, er vi (nesten) i mål.

***Eksempel 3.1*:** Beregn integralene nedenfor:

a) $\int 2\sin\left(2x\right)dx$

b) $\int x\cdot e^{-x^2}dx$

c) $\int \frac{x}{x^2-1}dx$

d) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

e) $\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx$

f) $\int \frac{1}{x^2+4}dx$

Løsning:

a) Vi ser at når vi deriverer $2x$ får vi 2. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{2}du\,.$$

Integralet kan nå skrives

$$\int 2\sin(2x)\,dx = \int \cancel{2}\sin u \cdot \tfrac{1}{\cancel{2}}du = -\cos u + C = \underline{\underline{-\cos(2x) + C}}\,.$$

b) Vi ser at når vi deriverer $-x^2$ får vi $-2x$, og x-en har vi bruk for. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{du}{dx} = -2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{-2x}du\,.$$

Integralet kan nå skrives

$$\int x \cdot e^{-x^2}dx = \int \cancel{x} \cdot e^u\left(-\tfrac{1}{2\cancel{x}}du\right) = -\tfrac{1}{2}\int e^u du = -\tfrac{1}{2}\cdot e^u + C = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + C}}\,.$$

c) Vi ser at når vi deriverer $x^2 - 1$ får vi $2x$, og x-en har vi bruk for. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{2x}du\,.$$

Integralet kan nå skrives

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \int \frac{\cancel{x}}{u}\cdot\frac{1}{2\cancel{x}}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\cdot\ln|u| + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C}}\,.$$

d) Vi ser at når vi deriverer $x^2 + 1$ får vi $2x$, og x-en har vi bruk for. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{2x}du\,.$$

Integralet kan nå skrives

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \cancel{x}\cdot\sqrt{u}\cdot\tfrac{1}{2\cancel{x}}du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tfrac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} + C = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + C}}$$

e) Her merker vi oss at når vi deriverer $\sin x$ får vi $\cos x$ som inngår i integranden. Vi prøver derfor kjernen

$$u(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{du}{dx} = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{\cos x}du\,.$$

Integralet blir nå

$$\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx = \int u^2\cdot\cancel{\cos x}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos x}}du = \tfrac{1}{3}u^3 + C = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}\sin^3 x + C}}\,.$$

f) Dette minner litt om integrasjonsformelen som gir $\arctan x$:

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x) + C\,.$$

Men for å kunne bruke denne formelen, må vi skaffe oss et 1-tall som konstantledd i nevneren. Det gjør vi slik:

$$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)}dx = \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx\,.$$

Nå prøver vi

$$u(x)=\frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad u'(x)=\frac{du}{dx}=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad dx=2du\,.$$

Integralet blir nå

$$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \tfrac{1}{\cancel{4}}\int \frac{1}{1+u^2}\cdot \cancel{2}du = \tfrac{1}{2}\arctan u + C = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{x}{2}\right)+C}}.$$

Du kommer ofte bort i integraler av samme type som i Eksempel 3.1a) ovenfor. Det kan derfor være nyttig å løse dem en gang for alle. Da får vi reglene nedenfor, som du sikkert klarer å bevise selv ved å benytte samme framgangsmåte som i Eksempel 3.1a):

Når a er en konstant, blir

$$\int \sin(a\cdot x)\,dx = -\tfrac{1}{a}\cos(a\cdot x)+C$$

$$\int \cos(a\cdot x)\,dx = \tfrac{1}{a}\sin(a\cdot x)+C$$

$$\int e^{a\cdot x}dx = \tfrac{1}{a}e^{a\cdot x}+C$$

Oppgave 3.1.

Da vi løste integralene i Eksempel 3.1, erstattet vi kjernen u med den opprinnelige variabelen x i sluttsvaret. Men når vi skal beregne *bestemte* integral, er dette ikke nødvendig. Det er ofte enklere å endre *grensene* for integrasjonen samtidig som vi innfører den nye integrasjons-variabelen u. Eksemplene nedenfor viser hvordan vi går fram.

Eksempel 3.2: Beregn disse bestemte integralene:

a) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$ (se Eksempel 3.1d).

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\cos x\,dx$ (se Eksempel 3.1e).

Løsning:

a) Vi løste integralet ved å innføre kjernen

$$u(x)=x^2+1,$$

og fant at

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\,.$$

Istedenfor å gjeninnføre x i dette svaret før vi setter inn grensene, kan vi benytte at når $x=0$ er $u=0^2+1=1$, og når $x=2$ er $u=2^2+1=5$. Da blir

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_1^5 \sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{3}\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big]_1^5 = \tfrac{1}{3}\Big(5^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\Big) = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}\big(5\sqrt{5}-1\big)}}.$$

Dette et lettere enn å benytte at

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \Big[\tfrac{1}{3}\big(x^2+1\big)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2 = \tfrac{1}{3}\Big(\big(2^2+1\big)^{\frac{3}{2}} - \big(0^2+1\big)^{\frac{3}{2}}\Big) = \tfrac{1}{3}\Big(5^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\Big) = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}\big(5\sqrt{5}-1\big)}}.$$

b) Vi løste integralet ved å innføre kjernen

$$u(x) = \sin x,$$

og fant at

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \int u^2 du = \tfrac{1}{3}u^3 + C\,.$$

Istedenfor å gjeninnføre x i dette svaret før vi setter inn grensene, kan vi benytte at når $x = 0$ er $u = \sin 0 = 0$, og når $x = \frac{\pi}{2}$ er $u = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Da blir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \int_0^1 u^2 du = \Big[\tfrac{1}{3}u^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{3}\big(1^3 - 0^3\big) = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}\,.$$

Dette et lettere enn å benytte at

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \Big[\tfrac{1}{3}\sin^3 x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{3}\Big(\sin^3\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin^3(0)\Big) = \tfrac{1}{3}\big(1^3 - 0^3\big) = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}\,.$$

Oppgave 3.2.