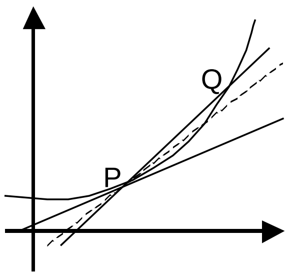
Derivasjon.

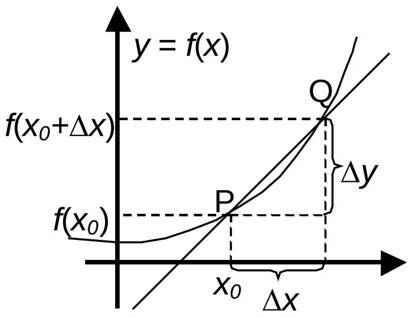
1. Definisjon av derivert.

Vi har stor nytte av å vite *hvor raskt* en funksjon vokser eller avtar. Mer presist: Vi ønsker å bestemme *stigningstallet til tangenten til funksjonsgrafen*.



Figuren til venstre viser hvordan vi kan gå fram for å bestemme stigningstallet til denne tangenten i et punkt P. Vi velger et annet punkt Q et lite stykke fra P, trekker ei rett linje gjennom P og Q, og bestemmer stigningstallet for denne rette linja. Så lar vi Q gå mot P langs funksjonsgrafen. Idet Q faller sammen med P blir linja PQ tangent til grafen. Grenseverdien for stigningstallet til linja PQ blir da stigningstallet til tangenten i P.

Denne framgangsmåten forutsetter at grafen til funksjonen er "glatt" i området rundt P. Mer presist formulert: Vi forutsetter at grenseverdien for stigningstallet til linja PQ eksisterer når Q går mot P.



Nå er tiden inne til å uttrykke seg mer matematisk. Figuren til venstre illustrerer hva vi mener med "stigningstallet til linja PQ". Vi har at:

Punktet P har koordinatene $\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$.

Punktet Q har koordinatene $\left(x_0+\Delta x,\ f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$.

Stigningstallet til linja PQ blir da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

slik at stigningstallet til tangenten i P blir

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Denne grenseverdien kaller vi ***den deriverte av f i x_0***, og skriver den som $\frac{df(x_0)}{dx}$ eller enklere som $f'\left(x_0\right)$. Vi oppsummerer:

La *f* være en funksjon som er definert i et område rundt $x=x_0$.
Hvis grenseverdien

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

eksisterer, sier vi at *f* er ***deriverbar*** i x_0 og skriver

$$f'\left(x_0\right)=\frac{df\left(x_0\right)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Vanligvis finner vi en formel for den deriverte som er uavhengig av punktet x_0. Da skriver vi bare

$$f'(x) \text{ eller } \frac{df(x)}{dx}.$$

Litt formalisme om terminologien: Vi skriver gjerne $y = f(x)$. Da kan den deriverte skrives $\frac{dy}{dx}$. Her er egentlig kombinasjonen $\frac{d}{dx}$ et *derivasjonssymbol* som forteller at *y* skal deriveres med hensyn på *x*. Men det kan være hensiktsmessig å oppfatte $\frac{dy}{dx}$ som en brøk med en *liten* størrelse *dy* som teller og en *liten* størrelse *dx* som nevner. Formelt er dette helt feil, men det fungerer bra i praksis. Slik uformell "ingeniør-matematikk" vil du støte på mange ganger i dette kurset.

I praksis er det sjelden at vi finner den deriverte direkte ut fra definisjonen. Vi bruker heller et sett *generelle derivasjonsregler* kombinert med derivasjonsformler for spesielle funksjons-typer. Dessuten har vi et knippe *derivasjonsteknikker* som er helt uunnværlige når vi skal derivere mer kompliserte funksjoner.

2. Grunnleggende derivasjonsregler.

Vi skal nå se på de grunnleggende derivasjonsreglene. For oversiktens skyld vil jeg konsentrere meg om selve reglene med noen eksempler, og ta lett på utledningene av reglene.

Jeg skal ta utgangspunkt i skrivemåten $y = f(x)$, og skal benytte y' og $f'(x)$ som symbol for den deriverte istedenfor den mer kompliserte (men mer korrekte) skrivemåten $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{df(x)}{dx}$.

2.1. Generelle derivasjonsregler.

På grunnlag av definisjonen av derivasjon kan vi utlede reglene nedenfor:

La *u* og *v* være to funksjoner som er deriverbare i *x*.
La *c* være en konstant.
Da gjelder:

1) $y = c \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot u'(x)$

2) $y = u(x) + v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x) + v'(x)$

3) $y = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

4) $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

Utledningene finner du helt til slutt i dette kapitlet.

2.2. Derivasjon av spesielle funksjoner.

Reglene foran er generelle regler som alltid gjelder. Men vi trenger også formler for derivasjon av spesielle funksjonstyper. Vi skal ta disse funksjonstypene etter tur.

2.2.1. Potensfunksjoner.

En *potensfunksjon* er en funksjon av typen

$$y = f(x) = c \cdot x^n$$

der c er en konstant. Den enkleste potensfunksjonen får vi ved å sette $n = 0$. Da blir

$$y = f(x) = c = \text{konstant}\,.$$

En konstant funksjon har pr definisjon stigningstall lik null. Da er også den deriverte lik null. Altså:

$$y = f(x) = c = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad y' = 0\,.$$

Så setter vi $n = 1$ og lar $c = 1$, slik at vi ser på funksjonen

$$y = f(x) = x\,.$$

Dette er ei rett linje med stigningstall lik 1. Da er også den deriverte lik 1. Dette kan vi også se av definisjonen på derivasjon:

$$y' = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \underline{1}\,.$$

Vi har altså overbevist oss om at:

$$y = f(x) = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1$$

Disse reglene er spesialtilfeller av en generell regel, som er vist i slutten av kapitlet:

$$y = f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1} \ \text{ for } \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

Sammen med de generelle regnereglene er vi nå i stand til å derivere både polynomfunksjoner og rasjonale funksjoner.

Eksempel 2.1**:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$

b) $y = f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 4)$

c) $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x + 2}$

Løsning:

a) $y' = 2 \cdot 3x^2 - 2x + 0 = \underline{\underline{6x^2 - 2x}}\,.$

b) Dette problemet kan angripes på to måter:

1) Jeg kan multiplisere ut og derivere etterpå. Da får jeg:

$$y = f(x) = \left(x^3 - 1\right)\left(x^2 + 4\right) = x^5 + 4x^3 - x^2 - 4$$

$$\Rightarrow \quad y' = 5x^4 + 4 \cdot 3x^2 - 2x - 0 = \underline{\underline{5x^4 + 12x^2 - 2x}}$$

2) Jeg kan bruke regelen for derivasjon av et produkt. Da får jeg:

$$y' = \left(3x^2 - 0\right)\left(x^2 + 4\right) + \left(x^3 - 1\right)\left(2x + 0\right) = 3x^4 + 12x^2 + 2x^4 - 2x$$

$$= \underline{\underline{5x^4 + 12x^2 - 2x}} .$$

c) $$y' = \frac{(2x - 3 + 0)(x + 2) - \left(x^2 - 3x + 1\right)(1 + 0)}{(x + 2)^2}$$

$$= \frac{\left(2x^2 + 4x - 3x - 6\right) - \left(x^2 - 3x + 1\right)}{(x + 2)^2} = \underline{\underline{\frac{x^2 + 4x - 7}{(x + 2)^2}}}$$

Oppgave 2.1.

Vi har hittil forutsatt at n er et helt, positivt tall. Men vi kan vise at formelen gjelder for alle $n \in \mathbb{R}$. Dette er en svært nyttig utvidelse av bruksområdet for formelen.

Vi summerer opp:

$$y = f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1} \text{ for alle } n \in \mathbb{R}.$$

***Eksempel 2.2*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = \sqrt{x}$

b) $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Løsning:

a) $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}}.$

b) Jeg kan bruke regelen for derivasjon av en brøk. Det er imidlertid lettere å gjøre slik:

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad y' = (-2) \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = \underline{\underline{\frac{-2}{x^3}}}.$$

Oppgave 2.2.

2.2.2. Trigonometriske funksjoner.

Ramma nedenfor oppsummerer derivasjonsreglene for de trigonometriske funksjonene:

$$y = f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x\,.$$
$$y = f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x\,.$$
$$y = f(x) = \tan x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Vi skal ikke bevise de to første reglene. Den siste er vist i eksemplet nedenfor:

Eksempel 2.3: Utled derivasjonsregelen for $\tan x$ på grunnlag av derivasjonsreglene for $\sin x$ og $\cos x$.

Løsning: $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{u^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}}\,.$$

`Oppgave 2.3.`

2.2.3. Eksponential- og logaritmefunksjoner.

Grunntallet *e* i eksponentialfunksjonen

$$y = f(x) = e^x$$

er valgt spesielt slik at stigningstallet til tangenten skal være lik funksjonsverdien i tangerings-punktet. Dette gir en svært enkel derivasjonsregel:

$$y = f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x$$

Den tilsvarende derivasjonsregelen for naturlige logaritmer er også enkel:

$$y = f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$$

Vi skal ikke bevise denne regelen.

***Eksempel 2.4*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = x \cdot \ln x$

b) $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

Løsning:

a) $y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \underline{\underline{\ln x + 1}}$.

b) $y' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \dfrac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \underline{\underline{\dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}}} = \underline{\underline{\dfrac{1 - \ln x^2}{x^3}}}$.

Oppgave 2.4.

3. Kjerneregelen.

Mange funksjoner er *sammensatte*, slik at de kan oppfattes som $y = f\left(u(x)\right)$. Et par eksempler:

$y = f(x) = e^{-2x} = e^u$ der $u = -2x$.

$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{u}$ der $u = x^2 + 1$.

$y = f(x) = \ln(x-1) = \ln u$ der $u = x - 1$.

Nå kommer vi til hovedpoenget:

Anta at en funksjon kan skrives på formen $y = f(x) = g\left(u(x)\right)$ der både *f*, *g* og *u* er deriverbare funksjoner.
Da er

$$y' = \frac{dg(u)}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx}.$$

Regelen ovenfor kalles ***kjerneregelen***, og er kanskje den derivasjonsteknikken du oftest benytter. Regelen formuleres ofte (litt slurvet) slik:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Denne formuleringen gjør at regelen blir lett å huske. Du skal bare "skyte inn" *du* i teller og nevner. Regelen blir også lett å utvide, som vi snart skal se.

***Eksempel 3.1*:** Deriver disse funksjonene:

a) $y = f(x) = e^{-2x}$

b) $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $y = f(x) = \ln(x-1)$

Løsning:

a) $y = e^{-2x} = e^u$ der $u(x) = -2x$.

Da blir

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot (-2) = \underline{\underline{-2e^{-2x}}}.$$

b) $y = \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ der $u(x) = x^2 + 1$.

Da blir

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \tfrac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2x + 0) = \tfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} \cdot x = \frac{x}{\sqrt{u}} = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}}.$$

c) $y = \ln(x-1) = \ln u$ der $u(x) = x - 1$.

Da blir

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (1 - 0) = \underline{\underline{\frac{1}{x-1}}}.$$

Oppgave 3.1.

Noen slike sammensatte funksjoner forekommer så ofte at du like godt kan lære deg de derivasjonsreglene som kjerneregelen gir:

Dersom a er en konstant, får vi:

$$y = f(x) = e^{a \cdot x} \quad \Rightarrow \quad y' = a \cdot e^{a \cdot x}$$

$$y = f(x) = \ln(a \cdot x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$y = f(x) = \sin(a \cdot x) \quad \Rightarrow \quad y' = a \cdot \cos(a \cdot x)$$

$$y = f(x) = \cos(a \cdot x) \quad \Rightarrow \quad y' = -a \cdot \sin(a \cdot x)$$

$$y = f(x) = \tan(a \cdot x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{a}{\cos^2(a \cdot x)}$$

$$y = f(x) = (u(x))^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot (u(x))^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = f(x) = \sqrt{u(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot \frac{du}{dx}$$

(som egentlig er et spesialtilfelle av formelen ovenfor med $n = \frac{1}{2}$).

Det er fin trening å utlede derivasjonsreglene ovenfor:

Eksempel 3.2: Utled reglene i ramma ovenfor.

Løsning: I de 5 første tilfellene innfører vi en kjerne

$$u = a \cdot x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = a\,.$$

Da får vi:

$$y = e^{a \cdot x} = e^{u} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{du}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^{u} \cdot a = \underline{\underline{a \cdot e^{a \cdot x}}}\,.$$

$$y = \ln(a \cdot x) = \ln u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot a = \frac{1}{a \cdot x} \cdot a = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}\,.$$

$$y = \sin(a \cdot x) = \sin u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot a = \underline{\underline{a \cdot \cos(a \cdot x)}}\,.$$

Reglene for $\cos(a \cdot x)$ og $\tan(a \cdot x)$ utledes på helt tilsvarende måte.
De to siste reglene er bare kjerneregelen brukt direkte.

Oppgave 3.2.

4. Utledning av noen derivasjonsregler.

4.1. De generelle derivasjonsreglene.

Foreløpig har vi bare satt opp de generelle derivasjonsreglene. Nå skal jeg bevise dem ut fra definisjonen på derivert, som er slik:

Når $y = f(x)$, er

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,.$$

Regel 1: $y = f(x) = c \cdot u(x)\,.$

Da er

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot u(x + \Delta x) - c \cdot u(x)}{\Delta x}$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \underline{\underline{c \cdot \frac{du(x)}{dx}}} = \underline{\underline{c \cdot u'(x)}}$$

Regel 2: $y = f(x) = u(x) + v(x)\,.$

Da er

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)\big)-\big(u(x)+v(x)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x+\Delta x)-u(x)\big)+\big(v(x+\Delta x)-v(x)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = \underline{\underline{\frac{du(x)}{dx}+\frac{dv(x)}{dx}}} = \underline{\underline{u'(x)+v'(x)}}
\end{aligned}
$$

Regel 3: $y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$.

Da er

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\big)-\big(u(x)\cdot v(x)\big)}{\Delta x} \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\big)-\big(u(x+\Delta x)\cdot v(x)\big)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x+\Delta x)\cdot v(x)\big)-\big(u(x)\cdot v(x)\big)}{\Delta x} \\
&\overset{(2)}{=} \lim_{\Delta x\to 0} u(x+\Delta x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x) \\
&\overset{(3)}{=} \lim_{\Delta x\to 0} u(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x) \\
&= \underline{\underline{u(x)\cdot\frac{dv(x)}{dx}+\frac{du(x)}{dx}\cdot v(x)}} = \underline{\underline{u(x)\cdot v'(x)+u'(x)\cdot v(x)}}
\end{aligned}
$$

Forklaringer:

- I overgang (1) trekker jeg fra og legger til
  $$\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$
  samtidig som jeg splitter den lange brøken opp i to brøker, og tar grenseverdien for hver av brøkene for seg.
- I overgang (2) setter jeg felles faktor utenfor parentes i begge brøkene.
- I overgang (3) benytter regelen om at grenseverdien for et produkt er lik produktet av grenseverdiene.

For øvrig bruker jeg definisjonen av derivert flere steder.

Regel 4: $y = f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Da er

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} \cdot \frac{v(x+\Delta x) \cdot v(x)}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot v(x+\Delta x) \cdot v(x)}$$

$$\overset{(1)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot v(x+\Delta x) \cdot v(x)}$$

$$\overset{(2)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)} \cdot \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\left(v(x)\right)^2} \cdot \left(\frac{du(x)}{dx} \cdot v(x) - u(x) \cdot \frac{dv(x)}{dx} \right)}} = \underline{\underline{\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}}}$$

Forklaringer:

- I overgang (1) trekker jeg fra og legger til $u(x) \cdot v(x)$ i telleren.
- I overgang (2) setter jeg $v(x+\Delta x) \cdot v(x)$ som felles nevnerfaktor utenfor parentes. Samtidig splitter jeg opp brøken i to, og setter felles faktor utenfor parentes i hver av de to brøkene.
- Til slutt lar jeg $\Delta x \to 0$, og benytter da definisjonen av den deriverte.

4.2. Derivasjon av potensfunksjoner.

Vi skal nå utlede derivasjonsregelen for potensfunksjonen

$$y = f(x) = x^n .$$

Vi har allerede vist at

$$y = f(x) = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1.$$

Vi kan derivere $y = f(x) = x^2$ ved å bruke definisjonen på derivert slik:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \underline{\underline{2x}}$$

På samme måte kan vi gå fram for å derivere $y = x^3$, $y = x^4$ osv. Men du innser sikkert at regnearbeidet etter hvert blir ganske omfattende, og det blir vanskelig å finne en generell formel for derivasjon av $y = x^n$.

La oss heller prøve å oppfatte x^2 som $x \cdot x$ og bruke derivasjonsregelen for et produkt. Da får vi:

$$y = f(x) = x^2 = x \cdot x \quad \Rightarrow \quad y' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = \underline{2x} .$$

På samme måte deriverer jeg

$$y = f(x) = x^3 = x^2 \cdot x .$$

Jeg får

$$y' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = \underline{3x^2}\ .$$

Her begynner det å danne seg et mønster. Det ser ut som om

$$y = f\left(x\right) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1}.$$

Denne regelen gjelder i alle fall for $n = 1,\ 2,$ og 3. Jeg bruker et induksjons-resonnement til å vise at den gjelder generelt, og *antar* at regelen gjelder for $n = k$. Når jeg setter $n = k + 1$ får jeg:

$$y = f\left(x\right) = x^{k+1} = x^k \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad y' = \left(k \cdot x^{k-1}\right) \cdot x + x^k \cdot 1 = k \cdot x^{k-1+1} + x^k = k \cdot x^k + x^k = \underline{\left(k+1\right) x^k}$$

Og det er jo samme formel som jeg får dersom jeg erstatter *n* med $k + 1$ i uttrykket

$$y = f\left(x\right) = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1}.$$

Altså er påstanden bevist, forutsatt at *n* er et helt, positivt tall.

Et alternativt bevis forutsetter bruk av logaritmisk derivasjon. Det beviset er kanskje enklere (forutsatt at du behersker logaritmisk derivasjon), og gjelder for *alle* verdier av *n*. Det viser altså at regelen ikke er begrenset til heltallige, positive verdier av *n*.