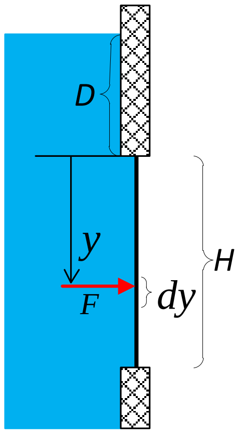
Trykk-krefter mot flate i et fluid.



Vi skal nå se på de trykk-kreftene som virker mot ei rektangulær, plan flate med lengde *L* og høyde *H* som står loddrett i et fluid. Vi skal begrense oss til ei væske med konstant tetthet. En av sidekantene med lengde *L* er horisontal i en dybde *D* under væskas overflate. Vi legger inn en *y*-akse med origo i flatas overkant og positiv retning nedover.

Vi antar at lufttrykket p_0 er like stort utenfor flata som over væske-overflata, slik at vi ikke trenger å ta p_0 med i regnskapet. Netto-trykket i dybden *D* under overflaten blir da

$$p_D = \rho g D,$$

og trykket en strekning *y* under flatas øvre kant blir

$$p = p_D + \rho g y .$$

Vi avgrenser nå ei smal, horisontal stripe med høyde *dy* og lengde *L*. Trykk-kraften mot denne stripa blir

$$dF = p \cdot dA = \left(p_D + \rho g y\right) \cdot \left(L\,dy\right).$$

Den samlede kraften mot hele plata blir

$$F = \int_{y=0}^{y=H} dF = \int_0^H \left(p_D + \rho g y\right) \cdot L\,dy = p_D L\left[y\right]_0^H + \rho g L\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^H = p_D LH + \tfrac{1}{2}\rho g L H^2$$

$$= LH\left(p_D + \tfrac{1}{2}\rho g H\right) = A\left(\rho g D + \tfrac{1}{2}\rho g H\right) = \underline{\underline{A \cdot \rho g \cdot \left(D + \tfrac{1}{2}H\right)}}$$

Her har jeg satt inn at arealet av flata er $A = L \cdot H$.

Vi merker oss at $\rho g\left(D + \tfrac{1}{2}H\right)$ er trykket midt på flata, slik at kraften mot flata er lik trykket midt på flata multiplisert med flatas areal.

Så skal vi se på det kraftmomentet som trykk-kreftene setter opp mot flata. Vi skal legge momentakse langs flatas øvre kant. Det medfører at kraften i en avstand *y* fra momentaksen er

$$dF = p \cdot dA = \left(p_D + \rho g y\right) \cdot \left(L\,dy\right)$$

og får et kraftmoment

$$d\tau = y \cdot dF = y \cdot \left(p_D + \rho g y\right) \cdot \left(L\,dy\right).$$

Samlet kraftmoment for trykk-kreftene om denne aksen blir da

$$\tau = \int_{y=0}^{y=H} d\tau = \int_0^H y \cdot \left(p_D + \rho g y\right) \cdot L\,dy = p_D L\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^H + \rho g L\left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_0^H$$

$$= \tfrac{1}{2}p_D L H^2 + \tfrac{1}{3}\rho g L H^3 = LH^2\left(\tfrac{1}{2}p_D + \tfrac{1}{3}\rho g H\right) = A \cdot H\left(\tfrac{1}{2}\rho g D + \tfrac{1}{3}\rho g H\right)$$

$$= \underline{\underline{A \cdot \rho g H\left(\tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{3}H\right)}}$$

Vi skal nå tenke oss at den trykk-kraften vi fant ovenfor virker i en avstand *X* fra moment-aksen slik at kraften setter opp samme moment om denne aksen som trykk-kreftene gjør. Da må vi ha at

$$\tau = F\cdot X \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{\tau}{F} = \frac{A\cdot\rho g H\left(\frac{1}{2}D+\frac{1}{3}H\right)}{A\cdot\rho g\cdot\left(D+\frac{1}{2}H\right)} = \underline{\underline{H\cdot\frac{\frac{1}{2}D+\frac{1}{3}H}{D+\frac{1}{2}H}}}.$$

Her kan vi merke oss at dersom $D=0$ slik at øvre kant av flata er i væskas overflate, blir $X=\frac{2}{3}H$. Og hvis $D \gg H$ slik at flata er dypt nedsenket, blir $X\approx\frac{1}{2}H$.

Eksempel 1: Ei damluke har lengde $L=1.50\,\mathrm{m}$ og høyde $H=1.20\,\mathrm{m}$. Luka plasseres slik at øvre kant står $D=2.40\,\mathrm{m}$ under vannflata ved normal vannstand. Luka monteres slik at den kan dreies om en horisontal akse.

a) Hvor langt fra lukas øvre kant skal denne aksen plasseres for at trykk-kreftene ikke skal sette opp noe kraftmoment om denne aksen?

b) Etter en tørr sommer står vannflata bare 0.40 m over lukas øvre kant. Hvor stort kraft-moment får trykk-kreftene nå om denne aksen?

Løsning:

a) Avstanden fra øvre kant er

$$X = H\cdot\frac{\frac{1}{2}D+\frac{1}{3}H}{D+\frac{1}{2}H} = 1.20\,\mathrm{m}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 2.40\,\mathrm{m}+\frac{1}{3}\cdot 1.20\,\mathrm{m}}{2.40\,\mathrm{m}+\frac{1}{2}\cdot 1.20\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{0.64\,\mathrm{m}}}.$$

b) Når vannflata bare står $D_1=0.40\,\mathrm{m}$ over lukas øvre kant, vil trykk-kreftene få størrelse

$$F_1 = A\cdot\rho g\cdot\left(D+\frac{1}{2}H\right)$$

$$= 1.50\cdot 1.20\,\mathrm{m}^2\cdot 1.00\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m}^3\cdot 9.81\,\mathrm{m/s}^2\left(0.40+\frac{1}{2}\cdot 1.20\right)\mathrm{m} = \underline{17\,658\,\mathrm{N}}$$

Disse trykk-kreftene tenkes erstattet av en kraft med samme størrelse som angriper i en avstand X_1 fra lukas øvre kant, der

$$X_1 = H\cdot\frac{\frac{1}{2}D_1+\frac{1}{3}H}{D_1+\frac{1}{2}H} = 1.20\,\mathrm{m}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.40\,\mathrm{m}+\frac{1}{3}\cdot 1.20\,\mathrm{m}}{0.40\,\mathrm{m}+\frac{1}{2}\cdot 1.20\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{0.72\,\mathrm{m}}}.$$

Avstanden fra kraftens angrepspunkt til aksen er derfor

$$\Delta X = 0.72\,\mathrm{m} - 0.64\,\mathrm{m} = 0.08\,\mathrm{m},$$

slik at kraftmomentet blir

$$F_1\cdot\Delta X = 17\,658\,\mathrm{N}\cdot 0.08\,\mathrm{m} \approx \underline{\underline{1410\,\mathrm{Nm}}}.$$