Oppgave 9.1:

Tettheten til metallstykket er $\rho = \dfrac{m}{V}$. Finner først massen m:

Når legemet er i luft, har vi at

$$F_1 - mg = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{F_1}{g} = \frac{11.31\,\text{N}}{9.81\,\text{m/s}^2} = \underline{1.15\,\text{kg}}\,.$$

Deretter finner jeg volumet V av legemet, som er lik volumet av den fortrengte vannmengden. Når legemet er i vann, har vi en oppdriftskraft B slik at

$$F_2 + B = mg\,.$$

Men B er lik tyngden til den fortrengte vannmengden, slik at

$$B = m_\text{v} g = \left(\rho_\text{v} V\right) g\,.$$

Da blir

$$F_2 + \rho_\text{v} V g = F_1 \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{F_1 - F_2}{\rho_\text{v} g} = \frac{11.31\,\text{N} - 8.83\,\text{N}}{1.000 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3 \cdot 9.81\,\text{m/s}^2} = \underline{2.52 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3}\,.$$

Da blir massetettheten av vårt legeme

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1.15\,\text{kg}}{2.52 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3} = \underline{\underline{4.56 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3}}\,.$$

Oppgave 9.2:

Kaller arealet av stavenes tverrsnitt F. Lengdene av stavene er $l_\text{A} = 0.20\,\text{m}$ og $l_\text{B} = 1.80\,\text{m}$. Stavens masse er da

$$m_\text{stav} = \rho_\text{A} V_\text{A} + \rho_\text{B} V_\text{B} = \rho_\text{A}\left(F l_\text{A}\right) + \rho_\text{B}\left(F l_\text{B}\right) = F\left(\rho_\text{A} l_\text{A} + \rho_\text{B} l_\text{B}\right).$$

Lengden av den delen av A som er nedsenket i væsken er $l_\text{X} = 1.40\,\text{m}$. Massen av fortrengt væskemengde er da

$$m_\text{væske} = \rho_\text{X} V_\text{X} = \rho_\text{X}\left(F\left(l_\text{A} + l_\text{X}\right)\right).$$

Arkimedes' lov kombinert med Newtons 2. lov gir nå (siden staven står i ro i væsken)

$$m_\text{væske} g - m_\text{stav} g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_\text{væske} = m_\text{stav}$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho_\text{X}\left(\cancel{F}\left(l_\text{A} + l_\text{X}\right)\right) = \cancel{F}\left(\rho_\text{A} l_\text{A} + \rho_\text{B} l_\text{B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho_\text{X} = \frac{\rho_\text{A} l_\text{A} + \rho_\text{B} l_\text{B}}{l_\text{A} + l_\text{X}} = \frac{4.30 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3 \cdot 0.20\,\text{m} + 0.75 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3 \cdot 1.80\,\text{m}}{0.20\,\text{m} + 1.40\,\text{m}}$$

$$= \underline{\underline{1.38 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3}}$$

Oppgave 9.3:

Treklossens volum er

$$V_\text{kloss} = 0.072 \cdot 0.072 \cdot 0.060\,\text{m}^3 = \underline{0.311 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}\,.$$

Volumet til den delen av klossen som er under vann, blir

$$V_\text{vann} = \pi R^2\left(h_2 - h_1\right) = \pi\left(\tfrac{0.14\,\text{m}}{2}\right)^2\left(0.116 - 0.100\right)\text{m} = \underline{0.246 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}\,.$$

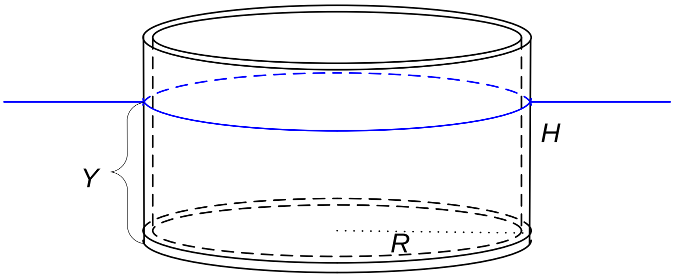
Dette er også volumet til den vannmengden som klossen fortrenger. Siden oppdriften er (motsatt) like stor som tyngden av klossen, har vi at

$$m_{\text{vann}}g = m_{\text{kloss}}g \quad \Leftrightarrow \quad m_{\text{vann}} = m_{\text{kloss}} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{\text{vann}} \cdot V_{\text{vann}} = \rho_{\text{kloss}} \cdot V_{\text{kloss}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho_{\text{kloss}} = \rho_{\text{vann}} \cdot \frac{V_{\text{vann}}}{V_{\text{kloss}}} = 1.000 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \cdot \frac{0.246 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3}{0.311 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3} = \underline{\underline{791\text{kg/m}^3}}$$

Oppgave 9.4:

a)



Anta at fatet stikker en dybde y ned i vannet når det flyter i ro. Da er fatets tyngde like stor som oppdriften, som er

$$B = m_V g = (V_V \rho_V) g = \pi R^2 y \cdot \rho_V \cdot g$$

der m_V og V_V er masse og volum til fortrengt vannmengde. Kaller massene til henholdsvis sideflater og bunn for m_S og m_B. Da blir

$$(m_S + m_B) g = \pi R^2 y \cdot \rho_V \cdot g$$

$$\rho \cdot \pi R^2 + \rho \cdot 2\pi R H = \pi R^2 y \cdot \rho_V$$

$$\rho (R + 2H) = R y \rho_V$$

$$y = \underline{\underline{\frac{\rho}{\rho_V} \frac{R + 2H}{R}}}$$

b) For at fatet skal flyte, må

$$y < H \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_V} \frac{R + 2H}{R} < H \quad \Leftrightarrow \quad R + 2H < HR \cdot \frac{\rho_V}{\rho}$$

$$R < HR\frac{\rho_V}{\rho} - 2H = H\left(R\frac{\rho_V}{\rho} - 2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{H > \frac{R}{R\frac{\rho_V}{\rho} - 2}}}$$

Oppgave 9.5:

Når legemet så vidt flyter, er tyngden av legemet like stor som tyngden av den fortrengte vannmengden. Bruker indeksene $_M$, $_T$ og $_V$ for å markere metall, tre og vann, og får:

$$m_M g + m_T g = m_V g\ .$$

Forkorter bort g, og benytter at $\rho = \dfrac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho V$:

$$\rho_M V_M + \rho_T V_T = \rho_V V_V$$

$$\rho_M (A \cdot h_M) + \rho_T (A \cdot h_T) = \rho_V (A \cdot h_V)$$

Men når legemet så vidt flyter, er

$$h_V = h_T + h_M\ .$$

Etter å ha forkortet bort A, får vi

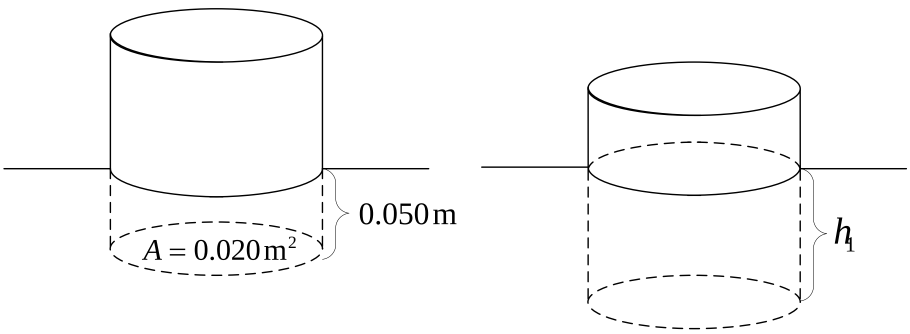
$$\rho_M h_M + \rho_T h_T = \rho_V (h_M + h_T) = \rho_V h_M + \rho_V h_T$$
$$h_M (\rho_M - \rho_V) = h_T (\rho_V - \rho_T)$$
$$h_T = h_M \frac{\rho_M - \rho_V}{\rho_V - \rho_T} = 0.010\,\text{m} \cdot \frac{7400\,\text{kg/m}^3 - 1000\,\text{kg/m}^3}{1000\,\text{kg/m}^3 - 735\,\text{kg/m}^3} = \underline{\underline{0.24\,\text{m}}}$$

Oppgave 9.6:
De to forsøkene gir oss disse likningene, der *m* er metallstykkets masse, *V* dets volum og *k* den ukjente fjærkonstanten:

1) Når x_1 er forlengelsen, gir Newtons 2. lov at
$$mg - kx_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{mg}{x_1}.$$
2) Av opplysningene har vi at metallstykkets volum blir
$$V = \pi r^2 h = \pi \left(\tfrac{0.06\,\text{m}}{2}\right)^2 \cdot 0.02\,\text{m} = \underline{5.65 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^3}.$$
Når x_2 er forlengelsen og ρ_V er vannets tetthet, gir Newtons 2. lov samt Arkimedes' lov at
$$mg - kx_2 - \rho_V V g = 0.$$

Setter inn uttrykket for *k*, og får
$$m\cancel{g} - \left(\frac{m\cancel{g}}{x_1}\right) x_2 - \rho_V V \cancel{g} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) = \rho_V V$$
$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{\rho_V V}{1 - \frac{x_2}{x_1}} = \frac{1.00 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3 \cdot 5.65 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^3}{1 - \frac{0.032\,\text{m}}{0.039\,\text{m}}} = \underline{0.315\,\text{kg}}$$
Da blir tettheten
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0.315\,\text{kg}}{5.65 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^3} = \underline{\underline{5.58 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3}}.$$

Oppgave 9.7:



a) Når beholderen stikker en dybde *h* ned i vannet, er volumet av fortrengt vannmengde
$$V = A \cdot h = (0.0200\,\text{m}^2) \cdot (0.050\,\text{m}) = \underline{1.00 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}.$$
Bruker Newtons 2. lov, og setter at oppdriften er motsatt like stor som beholderens tyngde:
$$\rho_v \cdot V \cdot g - mg = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho_v \cdot V = (1000\,\text{kg/m}^3) \cdot 1.00 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^{-3} = \underline{\underline{1.00\,\text{kg}}}.$$

b) Bruker tilsvarende resonnement som ovenfor. Når beholderen stikker en dybde h_1 ned i vannet, er volumet av både olje og fortrengt vann

$V_1 = A \cdot h_1$.

Da blir Newtons 2. lov:

$$\rho_v \cdot V_1 \cdot g - mg - \rho_O \cdot V_1 \cdot g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\rho_v - \rho_O)V_1 = m \quad \Leftrightarrow \quad V_1 = A \cdot h_1 = \frac{m}{\rho_v - \rho_O}.$$

$$h_1 = \frac{m}{A(\rho_v - \rho_O)} = \frac{1.00\,\text{kg}}{(0.0200\,\text{m}^2)(1000 - 750)\,\text{kg/m}^3} = \underline{\underline{0.20\,\text{m}}}.$$

Oppgave 9.8:

Tauet har volum

$$V_{\text{tau}} = A \cdot l = 5.0 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot 20\,\text{m} = \underline{0.010\,\text{m}^3}.$$

Da er tauets masse

$$m_{\text{tau}} = \rho_{\text{tau}} \cdot V_{\text{tau}} = \left(1.5 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3\right) \cdot \left(0.010\,\text{m}^3\right) = \underline{15.0\,\text{kg}}.$$

Arkimedes lov gir nå at

$$\left(m + m_{\text{tau}}\right)\cancel{g} - \left(V_{\text{tau}} + \pi R^2 H\right)\rho_{\text{vann}} \cdot \cancel{g} = 0$$

$$\pi R^2 H = \frac{m + m_{\text{tau}}}{\rho_{\text{vann}}} - V_{\text{tau}} = \frac{25\,\text{kg} + 15\,\text{kg}}{1.00 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3} - 0.010\,\text{m}^3 = \underline{0.03\,\text{m}^3}$$

$$H = \frac{0.03\,\text{m}^3}{\pi R^2} = \frac{0.03\,\text{m}^3}{\pi \cdot (0.20\,\text{m})^2} = \underline{\underline{0.24\,\text{m}}}.$$

Oppgave 9.9:

a) Benytter Bernoullis likning, med indeks $_O$ ved dammens overflate. Legger nullnivå ved utløpet, slik at overflaten av dammen kommer i en høyde $h_O = 120\,\text{m} + 30\,\text{m} = 150\,\text{m}$ over utløpet.

$$\underbrace{p_B}_{=p_0} + \rho g \underbrace{h_B}_{=0} + \tfrac{1}{2}\rho v_B{}^2 = \underbrace{p_O}_{=p_0} + \rho g h_O + \tfrac{1}{2}\rho \underbrace{v_O{}^2}_{=0}$$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_B{}^2 = \rho g h_O \quad \Leftrightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh_O} = \sqrt{2 \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 150\,\text{m}} = \underline{\underline{54.2\,\text{m/s}}}.$$

b) Benytter kontinuitetslikningen fra A til B:

$$\left(\pi R_A{}^2\right)v_A = \left(\pi R_B{}^2\right)v_B \quad \Leftrightarrow \quad v_A = \frac{R_B{}^2}{R_A{}^2}v_B = \frac{\left(\frac{0.12\,\text{m}}{2}\right)^2}{\left(\frac{0.20\,\text{m}}{2}\right)^2} \cdot 54.2\,\text{m/s} = \underline{\underline{19.5\,\text{m/s}}}.$$

Må igjen benytte Bernoullis likning, men nå fra dammens overflate til innløpet A. Legger da nullnivå i A:

$$p_A + \rho g \underbrace{h_A}_{=0} + \tfrac{1}{2}\rho v_A{}^2 = \underbrace{p_O}_{=p_0} + \rho g \underbrace{h_O}_{=30\,\text{m}} + \tfrac{1}{2}\rho \underbrace{v_O{}^2}_{=0}$$

$$p_A = p_O + \rho g h_O - \tfrac{1}{2}\rho v_A{}^2 = \left(1.013 \cdot 10^5 + 1.00 \cdot 10^3 \cdot 9.81 \cdot 30 - \tfrac{1}{2} \cdot 1.00 \cdot 10^3 \cdot 19.5^2\right)\text{Pa}$$

$$= \underline{\underline{2.05 \cdot 10^5\,\text{Pa}}}$$

Oppgave 9.10:

a) Etter oppvarmingen er trykket i den avstengte lufta

$$p = p_0 + \rho g h = 1.01 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} + 13.6 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0.04\,\mathrm{m} = \underline{1.06 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}\,.$$

Volumet blir

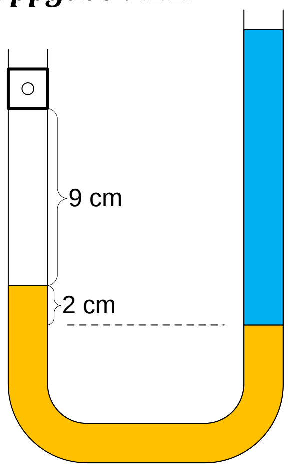
$$V = V_0 + A \cdot \tfrac{h}{2} = 0.30 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3} + 10 \cdot \left(10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2 \cdot \frac{0.04\,\mathrm{m}}{2} = \underline{0.32 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}}\,.$$

Tilstandslikningen gir nå

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad T = T_0 \frac{pV}{p_0 V_0} = (273+7)\,\mathrm{K} \cdot \frac{1.06 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 0.32 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}}{1.01 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 0.30 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}} = \underline{\underline{313\,\mathrm{K}}} = \underline{\underline{40^0\mathrm{C}}}\,.$$

Oppgave 9.11:



Når kvikksølvet stiger 1.0 cm i den ene greina, må det synke 1.0 cm i den andre. Høydeforskjellen mellom de to greinene er derfor 2.0 cm. Når tverrsnittsarealet av røret er *A*, blir trykket *p* i lufta over kvikksølvet gitt ved

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0$$

$$p = p_0 \cdot \frac{A \cdot 0.10\,\mathrm{m}}{A \cdot 0.09\,\mathrm{m}} = \frac{10}{9} \cdot 1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = \underline{1.126 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}$$

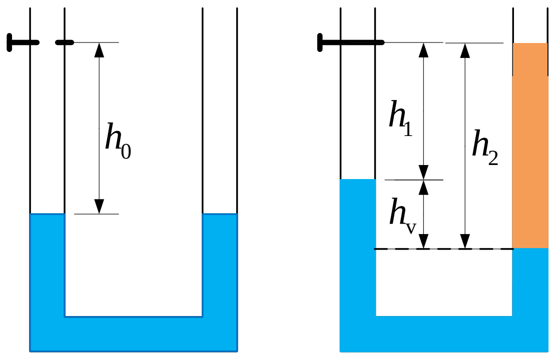
Trykket i grenseflaten mellom vann og kvikksølv er da

$$\begin{aligned} p_1 &= p + \rho_{Hg} g \cdot (0.02\,\mathrm{m}) \\ &= 1.126 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} + \left(13.6 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right) \cdot \left(9.81\,\mathrm{m/s^2}\right) \cdot (0.02\,\mathrm{m}) \\ &= \underline{1.153\,\mathrm{Pa}} \end{aligned}$$

Høyden *h* av vannsøylen finnes da av

$$p_1 = p_0 + \rho_{\mathrm{vann}} g h_{\mathrm{vann}} \quad \Leftrightarrow \quad h_{\mathrm{vann}} = \frac{p_1 - p_0}{\rho_{\mathrm{vann}} g} = \frac{1.153 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} - 1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}{1.00 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{\underline{1.43\,\mathrm{m}}}\,.$$

Oppgave 9.12:



Når $h_1 = \frac{4}{5} h_0$, har vannet steget en strekning $\frac{1}{5} h_0$ i røret til venstre. Siden rørets tverrsnitt er konstant, må det ha sunket en strekning $\frac{1}{5} h_0$ i røret til høyre. Da blir

$$h_v = \tfrac{1}{5} h_0 + \tfrac{1}{5} h_0 = \underline{\underline{\tfrac{2}{5} h_0}}\,.$$

Siden lufta kan betraktes som en ideell gass med konstant temperatur, er

$$p_0V_0 = p_1V_1 \quad\Leftrightarrow\quad p_0\left(Ah_0\right) = p_1\left(Ah_1\right) \quad\Leftrightarrow\quad p_1 = p_0 \cdot \frac{h_0}{h_1} = p_0 \cdot \frac{h_0}{\frac{4}{5}h_0} = \underline{\tfrac{5}{4}p_0}$$

der A er rørets konstante tverrsnittsareal. I nivået for grenseflata mellom vann og olje blir

$$p_0 + \rho_X gh_2 = p_1 + \rho_V gh_V \quad\Leftrightarrow\quad p_0 + \rho_X gh_2 = \tfrac{5}{4}p_0 + \rho_V g \cdot \tfrac{2}{5}h_0$$

$$\Leftrightarrow\quad \rho_X gh_2 = \tfrac{5}{4}p_0 - p_0 + \tfrac{2}{5}\rho_V gh_0 = \tfrac{1}{4}p_0 + \tfrac{2}{5}\rho_V gh_0$$

$$\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{\rho_X = \tfrac{1}{4}\frac{p_0}{gh_2} + \tfrac{2}{5}\rho_V\frac{h_0}{h_2}}}$$

Oppgave 9.13:

a) Når vi er en strekning h under vannflata, er trykket

$$p = p_0 + \rho gh\,.$$

Siden trykket inni boblen er lik trykket utenfor, og boblen inneholder en ideell gass med konstant temperatur, er

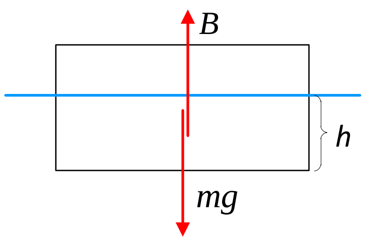
$$p \cdot V = p_0V_0 \quad\Leftrightarrow\quad V = \underline{\underline{\frac{p_0V_0}{p_0 + \rho gh}}}\,.$$

b) Siden vi kan neglisjere boblens masse, blir oppdriften hele tiden lik motstandskraften:

$$m_{\text{vann}}g = kv \quad\Leftrightarrow\quad \rho Vg = kv \quad\Leftrightarrow\quad v = \frac{\rho Vg}{k} = \underline{\underline{\frac{\rho g}{k} \cdot \frac{p_0V_0}{p_0 + \rho gh}}}\,.$$

Oppgave 9.14:

a)



Når klossen flyter i en væske, påvirkes den av tyngden mg som virker nedover, og oppdriften B som virker oppover. Ifølge Arkimedes lov er

$$B = m_v g = \left(\rho_v V\right)g = \rho_v Ahg$$

der m_v og ρ_v er massen og tettheten til væska. Siden legemet er i ro, må vi ha at

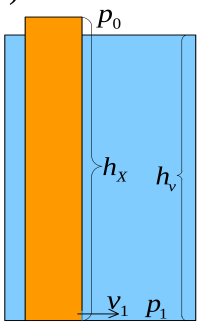
$$B - mg = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \rho_v Ahg = mg$$

som vi skulle vise.

b) La ρ_v være tettheten til vann, mens ρ_X er tettheten til den ukjente væska. Da kan vi sette

$$mg = \rho_v Ah_v g = \rho_X Ah_X g \quad\Leftrightarrow\quad \rho_X = \rho_v \cdot \frac{h_v}{h_X} = 1000\,\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{5.13\,\text{cm}}{4.60\,\text{cm}} = \underline{\underline{1.12 \cdot 10^3\,\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}\,.$$

c)



Vi antar betingelsene for å bruke Bernoullis likning er til stede. Bruker indeks 0 for toppen av tanken, og indeks 1 for bunnen av tanken. Da er

$$p_0 + \rho_X gh_0 + \tfrac{1}{2}\rho_X v_0^{\,2} = p_1 + \rho_X gh_1 + \tfrac{1}{2}\rho_X v_1^{\,2}\,.$$

Men siden hullet i bunnen av tanken er *lite*, kan vi gå ut fra at $v_1 >> v_0$ slik at leddet $\tfrac{1}{2}\rho_X v_0^{\,2}$ kan neglisjeres. Dessuten er $h_0 = h_X$ og $h_1 = 0$ når vi legger nullnivå på bunnen av bassenget. Videre er

$$p_1 = p_0 + \rho_v gh_v\,.$$

Setter alt dette inn i Bernoullis likning, og får

$$p_0 + \rho_X g h_X + 0 = \left(p_0 + \rho_v g h_v\right) + 0 + \tfrac{1}{2}\rho_X {v_1}^2$$

$$\rho_X g h_X = \rho_v g h_v + \tfrac{1}{2}\rho_X {v_1}^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\left(\rho_X h_X - \rho_v h_v\right) g}{\tfrac{1}{2}\rho_X}} = \sqrt{\frac{\left(1.12\cdot 10^3\,\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 2.00\,\text{m} - 1.00\cdot 10^3\,\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 1.80\,\text{m}\right)\cdot 9.81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}{\tfrac{1}{2}\cdot 1.12\cdot 10^3\,\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = \underline{\underline{2.78\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}}}\,.$$