# 9. Fluidmekanikk.

Hittil har vi holdt oss til *faste stoffer*, der partiklene ikke kan bevege seg i forhold til hverandre. Vi har riktignok innsett at legemer har en viss elastisitet. Vi skal nå gi slipp på denne forutsetningen, og tillate at partiklene beveger seg i forhold til hverandre. De stoffene vi da får, kalles ***fluider***. Vi skiller mellom to hovedtyper:

- ***Væsker***, der avstandene mellom partiklene er tilnærmet konstant. Et væskelegeme opptar tilnærmet samme volum uansett hvilke ytre påvirkninger det utsettes for.
- ***Gasser***, der avstandene mellom partiklene varierer mye. Volumet til et gasslegeme avhenger sterkt av ytre påvirkninger som trykk og temperatur.

Selv væsker har tilnærmet fast volum uavhengig av ytre påvirkninger mens gasser opptar alt tilgjengelig volum, har væsker og gasser såpass mange felles egenskaper at det er hensikts-messig å behandle dem under ett. Vi kaller dem ***fluider***.

## *9.1. Noen innledende definisjoner.*

### 9.1.1. Trykk.

Vi har tidligere definert trykk som

$$p = \frac{F_\perp}{A}$$

der $F_\perp$ er kraften om virker vinkelrett på ei flate med areal *A*. Vi husker også at standard-enheten for trykk er ***Pascal*** (Pa). $1\text{Pa} = 1\,\text{N}/\text{m}^2$ , men at mange andre trykkenheter er i bruk

- *Atmosfære* (atm) der $1\text{atm} = 1.013 \cdot 10^5\,\text{Pa}$ .
- *Bar* og *millibar*, der $1\text{ bar} = 1.000 \cdot 10^5\,\text{Pa}$ , 1 millibar = $10^{-3}$ bar.
- *Psi* (Pound per Square Inch) der 1 psi = 6896Pa.

Vi husker også at når vi måler trykk i en beholder er det vanlig å angi hvor mye større trykket er i beholderen enn lufttrykket utenfor. Denne differansen kalles ***overtrykk***. Det totale trykket i beholderen kalles ***absolutt trykk***.

### 9.1.2. Tetthet.

Vi definerer ***tettheten*** (egentlig ***massetettheten***) $\rho$ til et legeme som forholdet mellom legemets masse *m* og dets volum *V*:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Denne definisjonen forutsetter at tettheten er like stor over alt i legemet. Dersom dette ikke er tilfelle, må vi se på massen *dm* til et lite volumelement *dV*, og definerer massetettheten i dette punktet som:

$$\rho = \frac{dm}{dV}.$$

Massetetthet måles i $\text{kg/m}^3$.

Faste stoffer og væsker har tilnærmet samme massetetthet uansett hvilke ytre påvirkninger de utsettes for. Vi sier at massetettheten er en *materialkonstant*, og at stoffet er *inkompressibelt*. Også gasser kan under visse betingelser oppfattes som inkompressible.

Tettheten til gasser avhenger av gassens trykk og temperatur. Det er derfor vanlig å oppgi tettheten til gasser ved faste referansetilstander. En vanlig referansetilstand kalles *STP* (Standard Temperature and Pressure). Dessverre er det flere forskjellige definisjoner av STP i bruk. Det vanligste er en temperatur på $0\,^\circ\text{C}$ og et trykk på 1.00 atm, eller alternativt et trykk på 100 kPa.

**Oppgaver: 9.1.1, 9.1.2.**

## *9.2. Fluid-statikk.*

### 9.2.1. Generelle prinsipper.

Vi skal nå se på fluider i ro. Hvis vi går helt ned på molekyl-nivået, vil et fluid aldri være i ro fordi molekylene beveger seg i forhold til hverandre. At et fluid er "i ro", betyr derfor at *gjennomsnitts-hastighet* for alle molekylene er lik null.

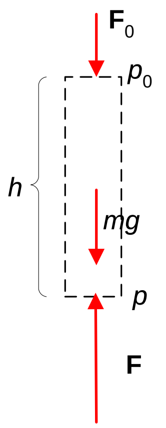
Det viser seg å være hensiktsmessig å benytte en enkel modell av et fluid i ro. Vi tenker oss at fluidet består av mange små volumelementer, som alle er i ro. Dette innebærer at disse volum-elementene verken kan akselerere eller rotere, slik at vektorsummen av krefter og av kraft-momenter som virker på volumelementene må være lik null.

Denne modellen av et fluid i ro gir oss direkte en av de viktigste egenskapene for et fluid:

***I ethvert punkt i et fluid i ro er trykket like stort i alle retninger.***

Denne påstanden begrunnes (litt ufullstendig) i et tillegg.

### 9.2.2. Hydrostatisk trykk.




Nå som vi vet at trykket er like stort i alle retninger, er tiden inne til å beregne størrelsen av dette trykket. Vi tenker oss at vi avgrenser en fluid-søyle med tverrsnittsareal $A$ som vist på figuren til venstre. Dersom trykket øverst er $p_0$, virker det en kraft $F_0 = p_0 \cdot A$ nedover mot søylas toppflate. På tilsvarende måte virker det en kraft $F = p \cdot A$ oppover mot søylas bunnflate, der $p$ er trykket i søylas nedre ende. Dersom tettheten $\rho$ er konstant, er søylas tyngde

$$G = m \cdot g = (\rho V) \cdot g = (\rho A h) \cdot g \, .$$

Siden søyla står i ro, må vi ha at

$$F - F_0 - G = 0 \quad \Leftrightarrow \quad pA = p_0 A + \rho A h g$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{p = p_0 + \rho h g}}$$

Vi har altså vist at:

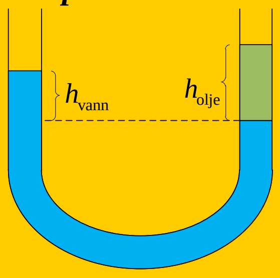
Dersom massetettheten $\rho$ i et fluid er konstant, er

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

der $g$ er tyngdens akselerasjon og $h$ er høydeforskjellen mellom de to punktene.

Vi legger merke til at når vi har en væske med konstant massetetthet $\rho$, avhenger trykket kun av dybden $h$ under overflaten forutsatt at overflatetrykket $p_0$ er likt over alt. Dette gjelder uansett hvilken form beholderen har.

***Eksempel 9.2.1.***




Et u-formet, åpent rør er delvis fylt med vann. Olje, som ikke blander seg med vann og som har lavere massetetthet enn vann, helles i rørets høyre åpning slik figuren til venstre viser. Finn massetettheten $\rho_{olje}$ for olja uttrykt ved massetettheten $\rho_{vann}$ for vann og høydene $h_{olje}$ og $h_{vann}$.

*Løsning*: Vi kan trygt forutsette at massetettheten i olja er konstant, og at det samme gjelder for vannet. Trykket er like stort i begge greinene av røret i det stiplede nivået. Antar vi at trykket i dette nivået er *p*, og at lufttrykket $p_0$ er like stort over begge åpningene i røret, er

$$p = p_0 + \rho_{vann} g h_{vann}$$

$$p = p_0 + \rho_{olje} g h_{olje}$$

Kombinerer vi disse likningene, får vi sammenhengen

$$p_0 + \rho_{olje} g h_{olje} = p_0 + \rho_{vann} g h_{vann} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{olje} g h_{olje} = \rho_{vann} g h_{vann} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\rho_{olje} = \rho_{vann} \cdot \frac{h_{vann}}{h_{olje}}}}.$$

**Oppgaver:** 9.2.1, 9.2.2, 9.2.3.

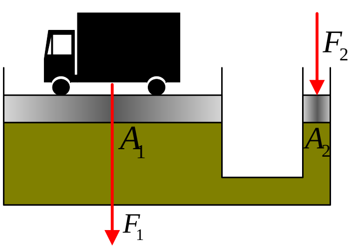
## 9.2.3. Pascals prinsipp.

Et viktig prinsipp for fluider ble oppdaget i 1653 av Blaise Pascal:

**Pascals prinsipp:** Endrer vi trykket på et sted i et innelukket statisk fluid, forplanter den samme trykkendringen seg til alle andre punkter i fluidet.

Dette prinsippet utnyttes i dag i hydrauliske maskiner.

Figuren nedenfor til venstre viser en prinsippskisse for en hydraulisk presse.

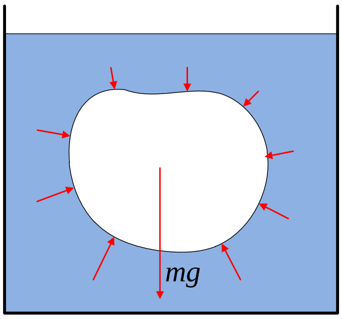



Et lite stempel med tverrsnittsareal $A_2$ trykker på en væske (f.eks. olje) med kraften $F_2 = p \cdot A_2$. Et større stempel med tverrsnittsareal $A_1$ trykker på væska med kraften $F_1 = p \cdot A_1$. Siden trykket er det samme under begge stemplene, blir

$$p = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Vi ser at en liten kraft $F_2$ kan løfte en bil som har stor tyngde $F_1$ bare forholdet mellom arealene av stemplene er stort nok.

## 9.2.4. Oppdrift.




***Oppdrift*** er et fenomen vi alle kjenner til: Et legeme i vann virker lettere enn det gjør i luft. Når legemet har mindre massetetthet enn vann, flyter det. I motsatt fall synker det.

Oppdriften er en kraft som virker på et legeme i et fluid, og som skyldes trykkforskjellene rundt omkring på legemets overflate. Vi kan godt si at oppdriften er den totale trykkraften som virker på legemet.

Anta at vårt nedsenkede legeme fjernes, og erstattes av et fluid-legeme som har nøyaktig samme størrelse og form som det legemet som opprinnelig var der. Det må derfor påvirkes av nøyaktig de samme trykk-kreftene. Men fluid-legemet ligger i ro. Da må summen av trykk-kreftene være motsatt like stor som legemets tyngde. Denne summen av trykk-kreftene er nettopp lik oppdriften.

Fluid-legemet roterer heller ikke. Siden legemets tyngde går gjennom tyngdepunktet uansett hvordan legemet er plassert, må også oppdriften gå gjennom fluid-legemets tyngdepunkt. Ellers ville fluid-legemet rotert.

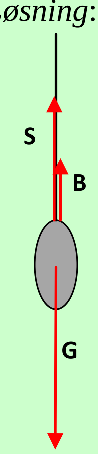
Vi summerer opp dette resonnementet som ***Arkimedes lov:***

Når et legeme er helt eller delvis nedsenket i et fluid, så påvirkes legemet av en kraft fra fluidet som peker rett oppover og som er like stor som tyngden til det fortrengte fluidet. Kraften angriper i tyngdepunktet til det fortrengte fluidet.

Tyngdepunktet til det fortrengte fluidet kalles gjerne ***oppdrifts-senteret*** (Center of Buoyancy, CB).

***Eksempel 9.2.2:*** En jernkule med massen $15.0\,\text{kg}$ festes til et tau og senkes ned i ferskvann med konstant fart. Hvor stor er kraften i tauet? Tettheten til jern er $7.8\cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$.

*Løsning*:




Når kula er under vann, påvirkes den av tre krefter: Tyngden **G**, oppdriften **B** og snordraget **S** slik figuren nedenfor til venstre viser.
Vi finner først volumet til jernkula, som også er volumet til den fortrengte vannmengden:

$$\rho_{\text{Fe}} = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{m}{\rho_{\text{Fe}}} = \frac{15.0\,\text{kg}}{7.8\cdot 10^3\ \text{kg}/\text{m}^3} = \underline{1.92\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}\,.$$

Oppdriften er lik tyngden til det fortrengte vannet:

$$B = m\cdot g = \left(\rho_{\text{vann}}\cdot V\right) g = 1.00\cdot 10^3\ \text{kg}/\text{m}^3\cdot 1.92\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3\cdot 9.81\,\text{m}/\text{s}^2 = \underline{18.8\,\text{N}}$$

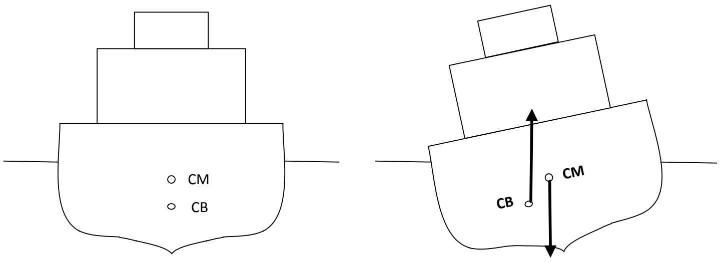
Newtons 2. lov gir oss da:

$$S + B - G = 0$$

$$S = G - B = mg - B = 15.0\text{kg}\cdot 9.81\,\text{m}/\text{s}^2 - 18.8\text{N} = \underline{\underline{128.4\text{N}}}\,.$$

**Oppgaver: 9.2.4.**

Det er viktig å være oppmerksom på at oppdriften angriper i tyngdepunktet til det fortrengte fluidet. Figurene nedenfor viser hvordan dette bidrar til stabiliteten for et skip:




På disse figurene er CM massesenteret til skipet, mens CB er oppdrifts-senteret. Dersom oppdrifts-senteret ligger over massesenteret, vil skipet alltid være i stabil likevekt. Men dersom oppdrifts-senteret ligger *under* skipets massesenter (se figuren over), kan det se ut som om skipet vil gå rundt ved den minste forstyrrelse. Så galt er det heldigvis ikke. Så lenge skipet ligger helt vannrett, gir ikke oppdriften noe kraftmoment om massesenteret. Men så snart skipet krenger, vil oppdrifts-senteret flytte seg fordi formen på den fortrengte vann-mengden endres. Dermed får oppdriften et kraftmoment som bidrar til å dreie skipet tilbake til sin opprinnelige stilling.

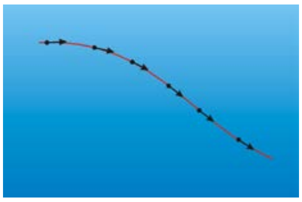
# *9.3. Fluiddynamikk.*

## 9.3.1. Innledning.

I fluid*statikken* forutsatte vi at fluidet var i ro. Vi skal nå se på fluider i bevegelse. Vi skal også se på legemer som beveger seg gjennom fluider i ro.

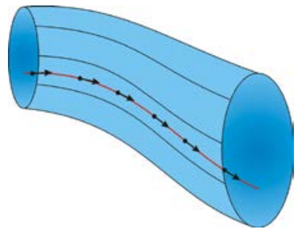
Generelt er bevegelsen til et fluid svært komplisert, men noen situasjoner kan beskrives ved relativt enkle modeller. Disse modellene forutsetter som regel at vi har et ***idealfluid***, som må tilfredsstille disse betingelsene:

- Fluidet er *inkompressibelt*, d.v.s. at det har konstant massetetthet. Væsker er praktisk talt inkompressible. En gass kan også sees på som inkompressibel når trykket i den er tilnærmet konstant.
- Fluidet har ingen friksjon. Dette innebærer at fluidpartiklene kan bevege seg uten friksjon i forhold til hverandre (ingen *indre friksjon*). Det innebærer også at det ikke er friksjon mellom fluidet og veggene i rør eller liknende som fluidet strømmer gjennom. Vi skal til slutt i dette kapitlet se hva som skjer dersom vi tar hensyn til friksjon.



Ved et vilkårlig tidspunkt kan vi danne oss et bilde av en fluidstrøm ved hjelp av strømlinjer. En ***strømlinje*** er en tenkt kurve i fluidet som er slik at enhver fluidpartikkel på denne kurven beveger seg langs den slik figuren til venstre viser.

Generelt vil strømlinjene i et fluid forandre seg etter hvert som tiden går. I de tilfellene der strømlinjene ikke endrer seg med tiden, sier vi at strømmen er ***stasjonær***. I en stasjonær fluidstrøm er strømlinjene det samme som fluidpartiklenes baner.



En bunt av strømlinjer i en *stasjonær* fluidstrøm kaller vi et ***strømrør***. Siden strømmen er stasjonær, kan fluidpartikler utenfor strømrøret aldri komme inn i det, og fluidpartikler som er i strømrøret kan aldri forlate det.

Dersom en fluidstrøm består av lag som beveger seg ved siden av hverandre med tilnærmet like stor fart og uten at partiklene fra ulike lag blander seg med hverandre, sier vi at strømmen er ***laminær***. I motsatt fall sier vi at strømmen er ***turbulent***.

## 9.3.2. Kontinuitetslikningen.

La oss starte med et par definisjoner:

Dersom et volum $dV$ av et fluid passerer forbi et tverrsnitt av et rør i løpet av et tidsintervall $dt$, er ***volumstrømmen*** forbi tverrsnittet gitt ved

$$Q_{\mathrm{V}} = \frac{dV}{dt}.$$

Volumstrøm måles i $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$.

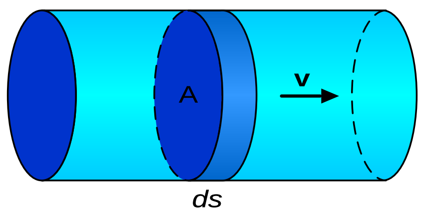
Dersom en masse $dm$ av et fluid passerer forbi et tverrsnitt av et rør i løpet av et tidsintervall $dt$, er ***massestrømmen*** forbi tverrsnittet gitt ved

$$Q_{\mathrm{m}} = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot Q_{\mathrm{V}}.$$

Massestrøm måles i kg/s.

Den siste likheten i ramma ovenfor følger av at $m = \rho V$. Siden massetettheten $\rho$ ikke varierer med tiden $t$, blir

$$Q_{\mathrm{m}} = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho \cdot Q_{\mathrm{V}}.$$




La oss se nærmere på de fluidpartiklene som strømmer i et rør. En partikkel som har fart $v$ vil i et kort tidsintervall $dt$ tilbakelegge en strekning

$$ds = v \cdot dt.$$

Dersom røret har tverrsnittsareal $A$, vil et volum

$$dV = A \cdot ds = A \cdot v\,dt$$

passere vårt tverrsnitt. Da blir volumstrømmen

$$Q_{\mathrm{V}} = \frac{dV}{dt} = \frac{A \cdot v\,dt}{dt} = A \cdot v.$$

I en stasjonær fluidstrøm kan vi ikke ha opphopning av masse. Derfor må massestrømmen være like stor i alle tverrsnitt av strømmen. Dersom farten til partiklene er $v_1$ i et tverrsnitt som har areal $A_1$, og farten er $v_2$ i et tverrsnitt som har areal $A_2$, blir

$$Q_{\mathrm{m}1} = Q_{\mathrm{m}2} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 Q_{\mathrm{V}1} = \rho_2 Q_{\mathrm{V}2} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2.$$

Dersom vi har et inkompressibelt fluid, er $\rho_1 = \rho_2$ slik at $A_1 v_1 = A_2 v_2$.

Vi oppsummerer:

***Kontinuitetslikningen:***
For et kompressibelt fluid er $Q_m = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$.
For et inkompressibelt fluid er $Q_V = A_1 v_1 = A_2 v_2$.

***Eksempel 9.3.1:*** Olje med massetettheten $850\,\mathrm{kg/m^3}$ pumpes gjennom et sylindrisk rør med diameteren $8.0\,\mathrm{cm}$. Volumstrømmen er $9.50\,\mathrm{dm^3/s}$. Anta at oljen er inkompressibel.

a) Hvor stor fart har oljen gjennom røret, og hvor stor er massestrømmen i røret?
b) Anta at rørets diameter reduseres til $4.0\,\mathrm{cm}$. Hvor stor fart har oljen gjennom røret nå?

*Løsning*:

a) Vi ser på hele røret som et strømrør som har radius $r_1 = \frac{1}{2}\cdot 0.08\,\mathrm{m} = 0.04\,\mathrm{m}$. Strømrøret får da et tverrsnittsareal

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi \cdot (0.04\mathrm{m})^2 = 5.02\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 .$$

Da er

$$Q_V = A_1 \cdot v_1 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = \frac{Q_V}{A_1} = \frac{9.50\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}}{5.02\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2}} = \underline{\underline{1.89\,\mathrm{m/s}}} .$$

Massestrømmen er gitt ved:

$$Q_m = \rho \cdot Q_V = 850\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 9.50\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s} = \underline{\underline{8.1\,\mathrm{kg/s}}} .$$

b) Etter innsnevringen er $r_2 = \frac{1}{2}\cdot 0.04\,\mathrm{m} = 0.02\,\mathrm{m}$. Da blir

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi \cdot (0.02\mathrm{m})^2 = 1.26\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 .$$

Farten til oljen er nå:

$$v_2 = \frac{Q_V}{A_2} = \frac{9.50\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}}{1.26\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2}} = \underline{\underline{7.54\,\mathrm{m/s}}} .$$

Dette kunne vi også funnet av kontinuitetslikningen, der vi benytter at $r_2 = \frac{1}{2} r_1$. Da blir

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi \left(\tfrac{1}{2} r_1\right)^2 = \tfrac{1}{4}\pi r_1^2 = \tfrac{1}{4} A_1 ,$$

slik at

$$A_2 v_2 = A_1 v_1 \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{A_1}{\frac{1}{4} A_1} v_1 = 4 v_1 = 4\cdot 1.89\,\mathrm{m/s} = \underline{\underline{7.56\,\mathrm{m/s}}} .$$

**Oppgave:** 9.3.1.

### 9.3.3. Bernoullis likning.

Ifølge kontinuitetslikningene kan farten variere langs partikkelbanene i fluidet, slik at farten er størst der tverrsnittsarealet er minst. Når farten endres, må fluidpartiklene akselerere. Da må partiklene påvirkes av krefter. Disse kreftene kan dels skyldes trykkforskjeller, dels tyngdekraft. Vi skal nå utlede en viktig sammenheng mellom trykk, fart og høyde for en strøm av et *ideelt*, *inkompressibelt* fluid. Setningen kalles ***Bernoullis likning:***

Et fluid i et strømrør har trykk *p*, tetthet $\rho$, fart *v* og høyde *h*. La indeksene $_1$ og $_2$ angi to punkter i strømrøret. Da er

$$p_1 + \rho g h_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

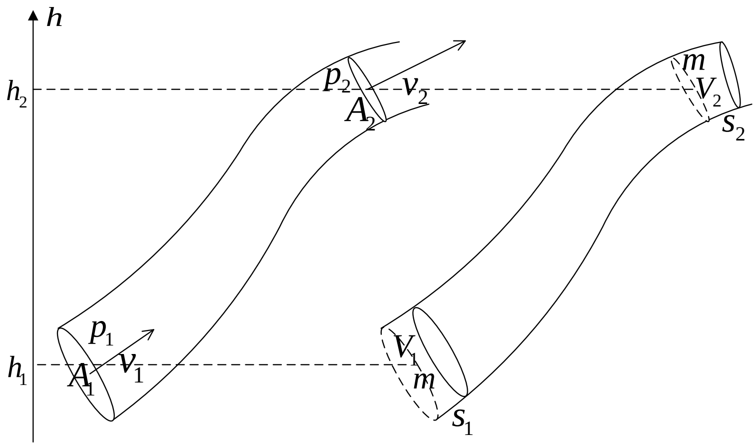
eller

$$p + \rho g h + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = \text{konstant}\ .$$

**NB:** *Slik Bernoullis likning er utformet i ramma ovenfor, gjelder den kun for stasjonær strøm i et inkompressibelt fluid uten indre friksjon (uten viskositet).* Vi skal senere vise hvordan vi kan modifisere Bernoullis likning slik at vi tar hensyn til indre friksjon.

Bernoullis likning kan utledes på flere måter, og gis ulike tolkinger. En populær tolking går ut på å se den som en *trykk-likning*. Da oppfattes $p + \rho g y$ som et *statisk trykk*, mens $\tfrac{1}{2}\rho v^2$ er *dynamisk trykk*. Likningen sier da at summen av statisk og dynamisk trykk er konstant.

Vi skal imidlertid utlede Bernoullis likning ved hjelp av et energiresonnement, og benytte figuren nedenfor:




Figuren viser et utsnitt av et strømrør. Vi antar at et fluid-legeme flytter seg et *lite* stykke oppover røret. Dette er ekvivalent med at en *liten* masse *m* med volum $V_1 = A_1 \cdot s_1$ flyttes fra bunnen av strømrøret og opp til toppen, der volumet blir $V_2 = A_2 \cdot s_2$. Fluidets fart er $v_1$ ved bunnen av strømrøret, og $v_2$ ved toppen av strømrøret. Da kan vi sette opp denne energilikningen:

$$mgh_1 + \tfrac{1}{2}mv_1^2 + W = mgh_2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2\ .$$

Her er $W$ det arbeidet som utføres av andre krefter enn tyngden. De eneste kreftene som da virker er trykk-kreftene. Trykket $p_1$ nederst virker i fartsretningen, mens $p_2$ øverst virker mot fartsretningen. Siden

$$p = \frac{F}{A} \quad \Leftrightarrow \quad F = p \cdot A$$

blir

$$W = F_1 \cdot s_1 - F_2 \cdot s_2 = p_1 \cdot A_1 \cdot s_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot s_2 = p_1 \cdot V_1 - p_2 \cdot V_2 .$$

Dessuten innfører vi at

$$m = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

der $\rho$ er tettheten til fluidet. Da blir energilikningen

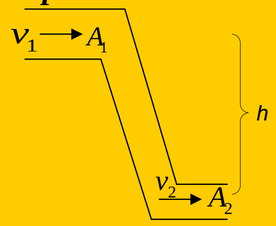
$$\rho_1 V_1 g h_1 + \tfrac{1}{2} \rho_1 V_1 v_1^{\ 2} + p_1 V_1 - p_2 V_2 = \rho_2 V_2 g h_2 + \tfrac{1}{2} \rho_2 V_2 v_2^{\ 2} .$$

Så forutsetter vi at fluidet er inkompressibelt. Da er $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Videre blir $V_1 = V_2 = V$, slik at volumet $V$ kan forkortes bort. Dermed står vi igjen med

$$\rho g h_1 + \tfrac{1}{2} \rho v_1^{\ 2} + p_1 - p_2 = \rho g h_2 + \tfrac{1}{2} \rho v_2^{\ 2}$$

som etter ordning blir Bernoulllis likning.

***Eksempel 9.3.2:***




I et rørsystem ligger punktet 1 en høyde $h$ over punktet 2. Tverrsnittsarealet av røret innsnevres slik at $A_2 = \frac{1}{2} A_1$.
Finn uttrykk for strømningshastighetene $v_1$ og $v_2$ når du vet at trykket er like stort i begge punktene. Anta at rørsystemet er helt fylt med en inkompressibel væske, og se bort fra friksjonsarbeid.

*Løsning:*
Tar utgangspunkt i Bernoullis likning:

$$p_1 + \rho g y_1 + \tfrac{1}{2} \rho v_1^{\ 2} = p_2 + \rho g y_2 + \tfrac{1}{2} \rho v_2^{\ 2} .$$

Av kontinuitetslikningen får vi

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{A_1}{\frac{1}{2} A_1} v_1 = 2 v_1 .$$

Benytter videre at $p_1 = p_2$, $y_1 = h$, $y_2 = 0$, og Bernoullis likning blir

$$\rho g h + \tfrac{1}{2} \rho v_1^{\ 2} = \tfrac{1}{2} \rho \left( 2 v_1 \right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 g h + v_1^{\ 2} = 4 v_1^{\ 2} \quad \Leftrightarrow \quad 3 v_1^{\ 2} = 2 g h \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{2}{3} g h}}} .$$

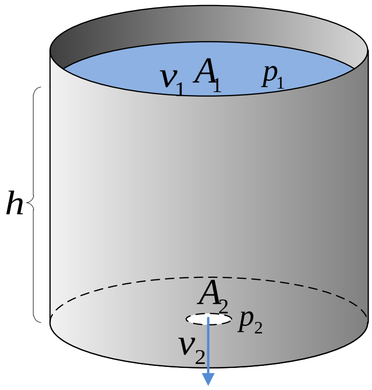
Da blir

$$v_2 = 2 v_1 = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3} g h}}} .$$

**Oppgave: 9.3.2, 9.3.3.**

## *9.3.4. Bruk av Bernoullis likning.

Bernoullis likning er utgangspunkt for mange andre likninger. Vi skal starte med ***Toricellis lov***, som egentlig ble satt opp lenge før Bernoullis likning.




Tanken på figuren til venstre har tverrsnittsareal $A_1$, og er fylt med en væske opp til høyden $h$. Trykket over væsken er $p_1$. Væsken renner ut med fart $v_2$ gjennom et lite hull i bunnen med tverrsnittsareal $A_2$. Trykket ved utløpet er $p_2$. Av Bernoullis likning får vi

$$p_1 + \rho gh + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 .$$

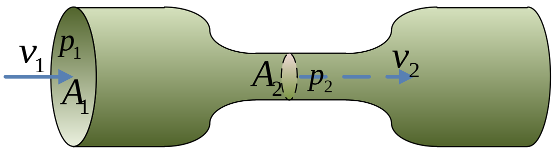
Dersom $A_1 >> A_2$, gir kontinuitetslikningen $A_1 v_1 = A_2 v_2$ at $v_1 << v_2$. Da kan vi se bort fra leddet $\tfrac{1}{2}\rho v_1^2$, og likningen blir

$$p_1 + \rho gh = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + 2gh}}}$$

Dersom tanken er åpen, vil trykket være lik lufttrykket både oppe og nede slik at $p_1 = p_2$. Likningen over reduseres da til

$$v_2 = \underline{\underline{\sqrt{2gh}}}$$

som er kjent som ***Torricellis lov***.




Figuren til venstre viser prinsippet for et ***venturimeter***, som brukes til å måle strømningsfarten i et fluid. Fluidet passerer en innsnevring slik figuren viser. Ved å måle forskjellen mellom trykket *før* og trykket *i* innsnevringen, kan strømningsfarten beregnes.

Anta at *før* innsnevringen er rørets areal $A_1$, fluidets fart $v_1$ og trykket $p_1$. I innsnevringen er arealet $A_2$, fluidets fart $v_2$ og trykket $p_2$. Det er ingen høydeforskjell, slik at Bernoullis likning reduseres til

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 .$$

Kontinuitetslikningen gir nå at

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 .$$

Dette settes inn i Bernoullis likning, og vi får

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho \left(\frac{A_1}{A_2} v_1\right)^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 v_1^2 .$$

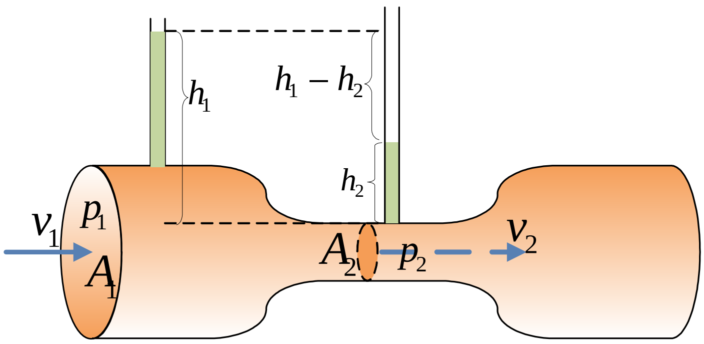
Vi merker oss at $A_1 > A_2$ slik at $\frac{A_1}{A_2} > 1$, og ordner dette til

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 v_1^{\,2} - \tfrac{1}{2}\rho v_1^{\,2} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\rho v_1^{\,2}\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right) = p_1 - p_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\cdot\frac{p_1 - p_2}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}}}}$$

Likningen over forutsetter et ideelt fluid. Slike fluider eksisterer ikke. I praksis vil det alltid være friksjon i fluidet og mellom fluid og rør. Dessuten følger ikke strømlinjene rørets form helt nøyaktig. Disse forholdene gjør at formelen må modifiseres for praktisk bruk.

Legg merke til at det kun er trykk*forskjellen* $p_1 - p_2$ som må måles. De andre størrelsene vil være kjent på forhånd. Figuren nedenfor til venstre viser hvordan vi i prinsippet kan gå fram for å måle denne trykkforskjellen. Dersom trykket over de åpne rørene er $p_0$, og væsken i rørene har tettheten $\rho$, har vi at




$$p_1 = p_0 + \rho g h_1$$

og

$$p_2 = p_0 + \rho g h_2 .$$

Da blir

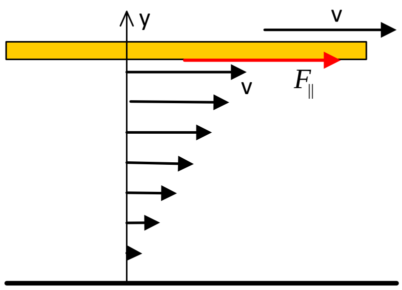
$$p_1 - p_2 = \rho g h_1 - \rho g h_2 = \rho g\left(h_1 - h_2\right)$$

Denne høydeforskjellen lar seg lett måle selv med primitivt utstyr.

## *9.4. Reelle fluider. Viskositet.*

### 9.4.1. Definisjon av viskositet.

Hittil har vi forutsatt at vi har et *ideelt* fluid, der vi bl.a. ser helt bort fra friksjon mellom molekylene i fluidet. Virkeligheten er nok mer komplisert.




Figuren til venstre viser ei plate som trekkes gjennom et fluid med konstant fart *v*. Da viser det seg at plata vil dra med seg fluid-partiklene nærmest plata, slik at de også vil flytte seg med farten *v*. Partikler litt lenger vekk fra plata vil også dras med, men med lavere fart. Vi får en *hastighetsprofil* slik figuren viser.

For å forklare dette, kan vi tenke oss at fluidet består av en mengde tynne, plane sjikt. Når plata trekkes gjennom fluidet, vil det nærmeste sjiktet trekkes med. Det må altså være en *skjærkraft* $F_{\parallel}$ som virker på fluid-sjiktet. Dette første tynne sjiktet vil trekke med seg det neste sjiktet, og slik fortsetter det inntil virkningen av at plata trekkes gjennom fluidet ikke kan merkes.

Vi definerer nå størrelsen $\frac{v}{y}$ (eller bedre $\frac{dv}{dy}$) som *hastighetsgradienten* til fluidet. Det viser seg at denne er proporsjonal med skjærspenningen, slik at:

$$\frac{F_{\parallel}}{A} = \mu \cdot \frac{v}{y}$$

der $\mu$ kalles ***viskositeten*** til fluidet, eller mer presist den ***dynamiske viskositeten***.

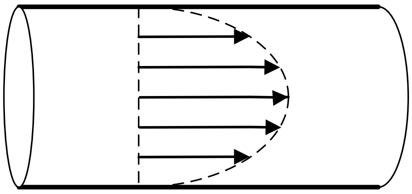
Viskositeten måles i $\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$ som kan omformes til $\mathrm{kg}/(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s})$. I praksis brukes ofte enheten ***poise***, der $1\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} = 10\,\mathrm{poise}$.

Fluider med liten viskositet er svært lettflytende, mens seige væsker har stor viskositet. Vanligvis vil viskositeten for et fluid være sterkt temperaturavhengig. For vann ved $20^{\circ}\mathrm{C}$ er viskositeten omtrent $1.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$, mens gasser har viskositet i størrelsesorden $10^{-5}\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$. Viskositeten avhenger av temperaturen. For vann avtar viskositeten fra $1.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$ ved $20^{\circ}\mathrm{C}$ til $0.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$ ved $95^{\circ}\mathrm{C}$.

Noen ganger benyttes også ***den kinematiske viskositeten*** $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ der $\mu$ er den dynamiske viskositeten mens $\rho$ er fluidets tetthet. Den kinematiske viskositeten måles i $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

## *9.4.2. Strømning i rør.

Når et fluid strømmer gjennom et rør, vil viskositeten sørge for at et svært tynt fluid-sjikt nærmest rørveggen er tilnærmet i ro, og at tynne fluid-sjikt lengre vekk fra rørveggen får stadig større fart. I et tillegg har vi regnet på dette, og resultatet er at strømningsfarten *v* avhenger av avstanden fra rørveggen som vist på figuren nedenfor. Vi får en *hastighetsprofil*.



I tillegget har vi også vist at samlet volumstrøm blir

$$Q_{\mathrm{V}} = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\mu L}$$

der $p_1$ og $p_2$ er trykket i endene av røret, *R* og *L* er radius og lengde av røret, og $\mu$ er viskositeten.

Denne formelen kalles ***Poiseuilles formel***. Den viser bl.a. at volumstrømmen er proporsjonal med 4. potens av radien. Det vil for eksempel si at dersom radien dobles mens trykk-forskjellen holdes konstant, vil volumstrømmen 16-dobles. Vi ser også at dersom vi vil holde volumstrømmen konstant mens radien reduseres litt, må trykkforskjellen $p_1 - p_2$ økes mye.

Merk at formelen forutsetter at det ikke andre årsaker til trykkfallet enn viskositeten. I praksis vil det alltid være andre årsaker i tillegg, så som ujevnheter i røret og bend på røret.

***Eksempel 9.4.1:*** En blodåre innsnevres med 10% på grunn av diverse avleiringer. Hvor mange prosent må trykkforskjellen mellom endene av denne blodåren øke med for at blodstrømmen skal opprettholdes?

*Løsning:* Vi kaller den opprinnelige trykkforskjellen $p_1 - p_2 = \Delta p$. Etter innsnevringen blir trykkforskjellen $\Delta p_1$. Da gir Poiseuilles formel

$$\frac{\pi \cdot \Delta p \cdot R^4}{8\mu L} = \frac{\pi \cdot \Delta p_1 \cdot (0.90R)^4}{8\mu L} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta p_1 = \frac{\Delta p}{0.90^4} \approx \underline{1.52 \cdot \Delta p}.$$

Blodtrykket vil altså øke med 52%.

**Oppgave 9.4.1.**

Vi har tidligere presentert Bernoullis likning som

$$p_1 + \rho g h_1 + \tfrac{1}{2}\rho {v_1}^2 = p_2 + \rho g h_2 + \tfrac{1}{2}\rho {v_2}^2.$$

Men denne formen forutsatte at det ikke var noen former for friksjon. Vi har nå sett at denne forutsetningen ikke er realistisk. En bedre form for Bernoullis likning er

$$p_1 + \rho g h_1 + \tfrac{1}{2}\rho {v_1}^2 - \Delta p = p_2 + \rho g h_2 + \tfrac{1}{2}\rho {v_2}^2.$$

Her kan $\Delta p$ oppfattes som et trykktap. Dette trykktapet kan skyldes mange forhold:

- Når vi tar hensyn til fluidets viskositet, får vi et trykkfall $\Delta p$ gitt ved

  $$Q_V = \frac{\pi \cdot \Delta p \cdot R^4}{8\mu L} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta p = \frac{8\mu L}{\pi R^4} \cdot Q_V.$$

- Trykkfallet ovenfor skyldes bare fluidets viskositet. I tillegg kommer et trykkfall som følge av at rørveggen ikke er helt glatt. Dette trykkfallet er vanskelig å beregne, og vil vanligvis øke med tiden på grunn av begroing, skitt og lignende.
- Bend, innsnevringer eller andre forhindringer i røret vil også gi et trykkfall.

Vær oppmerksom på at alt vi har sagt så langt, forutsetter *laminær* strømning. Dersom det oppstår *turbulens*, får vi helt andre og mer uforutsigbare forhold.

## *9.5. Turbulens.

### 9.5.1. Reynolds tall.

Hittil har vi forutsatt at strømningen er ***laminær***, d.v.s. at strømlinjene i røret ligger pent og stabilt ved siden av hverandre. Men hvis strømningsfarten blir for stor, går strømningen over til å bli ***turbulent***, der strømlinjer vikler seg sammen i et irregulært mønster som hele tiden endres. Ved en slikt turbulent strømning kan vi ikke bruke vår modell med fluid-sjikt som glir ved siden av hverandre, slik at Poiseuilles formel ikke kan brukes. Vi kan heller ikke stole på Bernoullis lov, fordi det stadig oppstår uforutsigbare trykkforskjeller.

For en ingeniør er det viktig å kunne forutsi om strømning i et rør blir laminær eller turbulent. Da benyttes ***Reynolds tall***, som defineres ved

$$\mathrm{Re} = \frac{v\rho D}{\mu}$$

der $v$ er gjennomsnittlig strømningsfart i røret, $\rho$ er fluidets tetthet, $D$ er rørets diameter, og $\mu$ er viskositeten. Det viser seg at vi har laminær strømning dersom Reynolds tall er under ca. 2000, og turbulent strømning dersom Reynolds tall er større enn ca. 3000. Disse grensene er ikke absolutte, og det er vanskelig å forutsi strømningsforholdene dersom Reynolds tall ligger i området 2000 – 3000. Denne usikkerheten skyldes bl.a. at turbulens "trigges" lettere dersom det er ujevnheter i røret.

***Eksempel 9.5.1:*** Volumstrømmen gjennom et vannrør med indre diameter 10 cm er 1.2 liter pr sekund. Er strømningen laminær eller turbulent? Anta at viskositeten for vannet er $1.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$.

*Løsning:* Vi må først bruke kontinuitetslikningen for å finne strømningsfarten $v$:

$$v = \frac{Q_V}{A} = \frac{1.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}}{\pi \cdot (0.05\,\mathrm{m})^2} = \underline{0.15\,\mathrm{m/s}}.$$

Da blir Reynolds-tallet

$$\mathrm{Re} = \frac{v\rho D}{\mu} = \frac{(0.15\,\mathrm{m/s}) \cdot (1.0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}) \cdot (0.10\,\mathrm{m})}{1.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}} = \underline{1.5 \cdot 10^4}.$$

Dette tallet er såpass stort at vi er sikre på at strømningen er turbulent.

Når vi har turbulens, kan det oppstå store trykkforskjeller mellom deler av fluidet, for eksempel mellom fluid foran og bak en hindring. Noen steder kan trykket i en væske bli så lavt at væske spontant fordamper, og det dannes dampbobler. Når disse boblene kommer til områder med høyere trykk, går dampen raskt tilbake til væskeform: de "imploderer". Denne effekten kalles ***kavitasjon***, og kan oppstå for eksempel etter bend eller innsnevringer i rør, i pumper, eller ved propeller. Slik kavitasjon kan høres som en slags "knitring", og kan medføre stor slitasje.

### 9.5.2. Legeme som beveger seg i et fluid.

Hittil har vi latt fluidet strømme gjennom et rør. Men vi kan også la et legeme bevege seg gjennom et fluid i ro, eller vi kan la fluidet strømme rundt et legeme som står i ro i fluidstrømmen. Også da må vi skille mellom laminær og turbulent strømning, og vi bruker et Reynolds-tall også da. Dette Reynolds-tallet ser slik ut:

$$\mathrm{Re} = \frac{v\rho L}{\mu}.$$

Her er $L$ lengden til legemet i strømningsretningen, mens $v$ er farten mellom legemet og fluidet. $\rho$ og $\mu$ er henholdsvis tetthet og viskositet for fluidet.

Vi har tidligere sett på ***viskøs friksjon*** når et legeme beveger seg i et fluid, og har sagt at denne friksjonskraften er proporsjonal med farten og rettet mot bevegelsen. Nærmere undersøkelser viser at dette kun gjelder dersom vi har laminær strømning. Det er vanlig å anta at vi har rent laminær strømning dersom Reynolds-tallet ovenfor er mindre enn ca. 1.

For et kuleformet legeme er friksjonskraften mellom fluidet og legemet gitt ved ***Stokes lov***. Det er gitt en begrunnelse for denne loven i et tillegg.

Når et kuleformet legeme med radius $r$ beveger seg med fart $v$ i et fluid med viskositet $\mu$, er friksjonskraften gitt ved

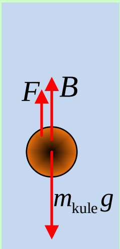
$$F = K \cdot r\mu v \,.$$

Det er vanlig å sette $K \approx 6\pi$.

For legemer som ikke er kuleformede, må formelen over modifiseres og verdien av $K$ endres.

***Eksempel 9.5.2:*** Ei kule med radius 4.0 mm er laget av et stoff som har massetetthet $\rho_{\text{kule}} = 2.60 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Kula slippes i ei væske som har massetetthet $\rho_{\text{væske}} = 0.94 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Når kula har falt et stykke blir farten konstant lik $v = 0.08\,\text{m/s}$. Beregn væskas viskositet.

*Løsning:* Når kula har fått konstant fart, er oppdriften $B$ pluss den viskøse kraften $F$ motsatt like stor som kulas tyngde:




$$6\pi r v\mu + m_{\text{væske}} g - m_{\text{kule}} g = 0$$

For begge massene er

$$m = \rho V = \rho \cdot \tfrac{4}{3}\pi r^3 \,,$$

slik at

$$6\pi r v\mu + \rho_{\text{væske}} \cdot \tfrac{4}{3}\pi r^3 g - \rho_{\text{kule}} \cdot \tfrac{4}{3}\pi r^3 g = 0$$

Ordning gir

$$\mu = \frac{2r^2 g\left(\rho_{\text{kule}} - \rho_{\text{væske}}\right)}{9v}$$

$$= \frac{2 \cdot \left(4.0 \cdot 10^{-3}\,\text{m}\right)^2 \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot \left(2.60 \cdot 10^3 - 0.94 \cdot 10^3\right)\text{kg/m}^3}{9 \cdot 0.08\,\text{m/s}} \approx \underline{\underline{0.72\,\text{Pa} \cdot \text{s}}}$$

Når Reynolds-tallet øker, kan turbulens oppstå. Men vi regner ikke med at det er rent turbulent strømning før Reynolds-tallet er ca. $10^3$. Mellom disse verdiene kan vi ha overgang mellom laminær og turbulent strømning.

***Eksempel 9.5.3:*** Undersøk om det oppsto turbulens da kula i forrige eksempel sank gjennom et fluid.

*Løsning:* Vi regner ut Reynolds-tallet:

$$\text{Re} = \frac{v\rho L}{\mu} = \frac{0.08\,\text{m/s} \cdot 0.94 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3 \cdot \left(2 \cdot 0.04\,\text{m}\right)}{0.72\,\text{Pa} \cdot \text{s}} = \underline{8.4}\,.$$

Dette tallet er litt for stort til at vi er helt trygge på at det har vært rent laminær strømning. Det er mulig at turbulens kan ha påvirket målingene.

Når det oppstår turbulens på grunn av fartsforskjellen mellom et legeme og et fluid, kan trykket bak legemet bli mye lavere enn trykket foran. Denne trykkforskjellen gir opphav til en kraft $F_t$ mot bevegelsen. I tillegget har vi gitt en begrunnelse for at denne kraften er gitt ved

$$F_t = C \cdot A \cdot \rho \cdot v^2 \,.$$

Her er $A$ legemets tverrsnittsareal vinkelrett på fartsretningen, $\rho$ er fluidets massetetthet, og $v$ er legemets fart gjennom fluidet. $C$ er en dimensjonsløs konstant, som bl.a. avhenger av legemets form. For "vanlige" legemer viser eksperimenter at $C$ har verdier i området 0.2 – 1.0.

Når vi skal beregne kraften som virker på et legeme som beveger seg i et fluid, er det vanlig å summere virkningene av laminær og turbulent kraft. Vi får da

$$F = K \cdot rv\mu + C \cdot A \cdot \rho v^2$$

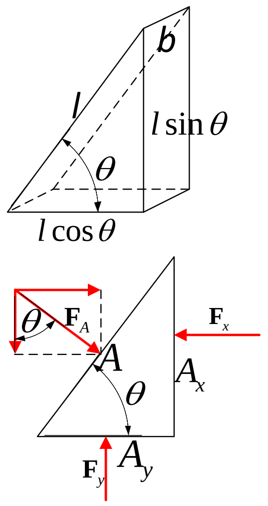
der det første leddet dominerer dersom Reynolds-tallet er lite, og det siste leddet dominerer dersom Reynolds-tallet er stort.

## *9.6. Tillegg.*

### 9.6.1. Mer om statisk trykk.

Vi skal nå begrunne denne setningen:

***I ethvert punkt i et fluid i ro er trykket like stort i alle retninger.***




Vi skal begrunne påstanden ved hjelp av figurene til venstre, som viser et *lite* fluid-prisme i vårt fluid som er i ro. Prismet er så lite at vi kan anta at trykket ikke varierer langs ei flate, og at vi kan neglisjere prismets tyngde sammenliknet med trykk-kreftene.

Den skrå flata har areal

$$A = b \cdot l\,,$$

og de to andre flatene har areal

$$A_x = l\sin\theta \cdot b = A\sin\theta\,,$$

$$A_y = l\cos\theta \cdot b = A\cos\theta\,.$$

Siden legemet er i ro, må vi ha at

$$F_A \sin\theta - F_x = 0$$

$$F_y - F_A \cos\theta = 0$$

Så benytter vi at $F = p \cdot A$, og kaller trykkene mot de tre flatene henholdsvis $p$, $p_x$ og $p_y$. Da omformes de to kraft-likningene slik:

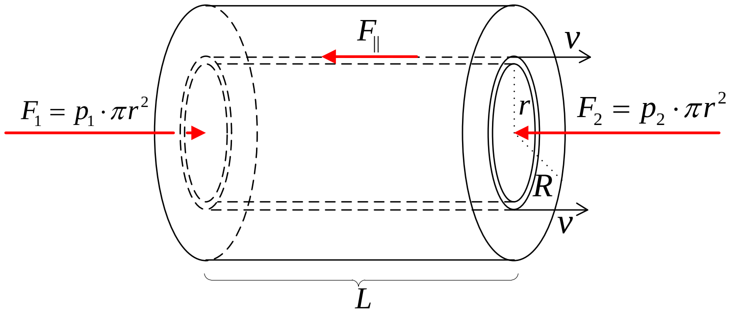
$$F_A \sin\theta - F_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_A A \cdot \sin\theta = p_x \cdot A_x = p_x \cdot A\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad p_A = p_x\,.$$

$$F_y - F_A \cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_A A \cdot \cos\theta = p_y \cdot A_y = p_y \cdot A\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad p_A = p_y\,.$$

Altså er $p_x = p_y = p_A$, som viser at trykket er det samme i alle retninger når legemet er så lite at vi kan betrakte det som et punkt.

## 9.6.2. Utledning av Poiseuilles formel.

Når et fluid strømmer gjennom et rør, vil viskositeten sørge for at et svært tynt fluid-sjikt nærmest rørveggen er tilnærmet i ro, og at tynne fluid-sjikt lengre vekk fra rørveggen får stadig større fart. Disse fluid-sjiktene vil være tynne sylinderskall dersom røret har sirkulært tverrsnitt.




Figuren viser et rør med lengde *L* og radius *R*. Trykket på venstre side er $p_1$, og på høyre side $p_2$. Det strømmer et fluid gjennom røret med retning fra venstre mot høyre. Vi snitter ut et tynt sylinderskall med radius *r* og tykkelse *dr*. På grunn av viskositeten vil dette sylinder-skallet påvirkes av en skjærkraft $F_{\|}$ gitt ved

$$\frac{F_{\|}}{A} = \mu \cdot \left( \frac{-dv}{dr} \right) \quad \Leftrightarrow \quad F_{\|} = (2\pi r \cdot L) \cdot \mu \cdot \frac{(-dv)}{dr}.$$

Her har vi erstattet $\frac{v}{y}$ fra definisjonslikningen for viskositet med $\frac{-dv}{dr}$, der minustegnet skyldes at hastigheten øker når radien avtar.

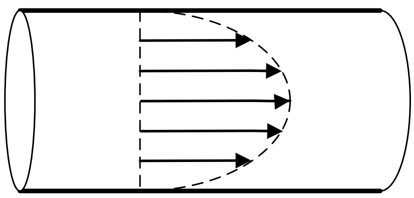
For at fluidet skal strømme med konstant fart, må differansen mellom trykk-kreftene i endene av røret motvirke denne skjærkraften, slik at

$$F_1 - F_2 - F_{\|} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 \cdot \pi r^2 - p_2 \cdot \pi r^2 - 2\pi r L \cdot \mu \cdot \frac{(-dv)}{dr} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (p_1 - p_2) \cdot r = -2\mu L \cdot \frac{dv}{dr} \quad \Leftrightarrow \quad (p_1 - p_2) \cdot r\, dr = -2\mu L\, dv$$

Denne differensiallikningen integreres fra en start-radius *r* til *R*. Da vil farten endres fra *v* til 0. (Vi overser at jeg bruker *r* og *v* både for startverdier og som integrasjonsvariabler). Vi får

$$(p_1 - p_2)\left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_r^R = -2\mu L [v]_v^0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{v(r) = \frac{(p_1 - p_2)(R^2 - r^2)}{4\mu L}}.$$



Farten er størst når $r = 0$. Da blir

$$v_{\max} = (p_1 - p_2) \frac{R^2}{4\mu L}.$$

Hastighetsprofilen for andre verdier av *r* vil følge en andregradskurve som vist i figuren til venstre.

Volumstrømmen gjennom vårt sylinderskall blir

$$dQ_V = v \cdot dA = \frac{(p_1 - p_2)(R^2 - r^2)}{4\mu L} \cdot (2\pi r \cdot dr) = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{2\mu L} (R^2 r - r^3)\, dr.$$

Samlet volumstrøm blir integralet av dette uttrykket fra $r = 0$ til $r = R$. Vi får

$$Q_V = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\mu L}\int_0^R \left(R^2 r - r^3\right)dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\mu L}\left[R^2 \cdot \tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\right]_0^R$$
$$= \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\mu L}\left(\tfrac{1}{2}R^4 - \tfrac{1}{4}R^4\right) = \underline{\underline{\frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\mu L}}}$$

Dermed har vi utledet ***Poiseuilles formel***.

## 9.6.3. Stokes lov.

Dersom ei kule faller i et fluid (eller et fluid strømmer forbi en kuleformet hindring), og farten er så liten at vi har laminær strømning, vil fluidet virke på kula med en kraft *F*. Vi skal nå benytte en teknikk som kalles ***dimensjonsanalyse*** til å lage et utkast til en formel for denne kraften.

Vi finner det rimelig å anta at kraften avhenger av kulas radius *r*, kulas fart *v* og viskositeten $\mu$ til fluidet. Mer presist antar vi at

$$F = K \cdot r^\alpha v^\beta \mu^\gamma$$

der *K* er en dimensjonsløs konstant. Vi skal nå finne eksponentene $\alpha$, $\beta$ og $\gamma$ ved å kreve at likningen skal være konsistent med hensyn på måleenheter. Vi får da:

$$\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{m}^\alpha \cdot \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^\beta \cdot \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}}\right)^\gamma .$$

Vi sorterer ut:

kg: $1 = \gamma$ .
m: $1 = \alpha + \beta - \gamma$ .
s: $-2 = -\beta - \gamma$ .

Dette likningssystemet løses lett, og vi får $\gamma = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$. Altså er

$$F = K \cdot rv\mu .$$

Det viser seg at konstanten $K \approx 6\pi$ . Da får vi

***Stokes lov:*** $F = 6\pi rv\mu$

## 9.6.4. Friksjonskraft når det er turbulens.

Når det oppstår turbulens på grunn av fartsforskjellen mellom et legeme og et fluid, får vi en kraft $F_t$ mot bevegelsen. Vi antar at denne kraften avhenger av legemets tverrsnittsareal *A*, fluidets massetetthet $\rho$ og farten *v*, og foretar en dimensjonsanalyse:

$$F_t = C \cdot A^\alpha \rho^\beta v^\gamma .$$

Dimensjoner:

$$\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=\left(\mathrm{m}^2\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)^{\beta}\cdot\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{\gamma}.$$

Vi sorterer ut:

kg: $1=\beta$.

m: $1=2\alpha-3\beta+\gamma$.

s: $-2=-\gamma$.

Dette likningssystemet løses lett, og vi får $\beta=1$, $\gamma=2$ og $\alpha=1$. Da blir

$$F_t=C\cdot A\cdot\rho\cdot v^2$$

der $C$ er en dimensjonsløs konstant som bl.a. avhenger av legemets form.

## *9.7.Sammendrag.*

***Hydrostatisk trykk***: $p=p_0+\rho\cdot g\cdot h$.

***Arkimedes lov***: Når et legeme er helt eller delvis nedsenket i et fluid, så påvirkes legemet av en kraft fra fluidet som peker rett oppover og som er like stor som tyngden til det fortrengte fluidet. Kraften angriper i tyngdepunktet til det fortrengte fluidet.

***Kontinuitetslikningen:***

For et kompressibelt fluid er $Q_\mathrm{m}=\rho_1A_1v_1=\rho_2A_2v_2$.

For et inkompressibelt fluid er $Q_\mathrm{V}=A_1v_1=A_2v_2$.

***Bernoullis likning*** (tapsfritt)***:*** $p_1+\rho gh_1+\frac{1}{2}\rho v_1^{\ 2}=p_2+\rho gh_2+\frac{1}{2}\rho v_2^{\ 2}$.

***Viskositet*** $\mu$ ***:*** $\frac{F_{\parallel}}{A}=\mu\cdot\frac{v}{y}$.

***Poiseuilles formel:*** $Q_\mathrm{V}=\frac{\pi\left(p_1-p_2\right)R^4}{8\mu L}$.

***Reynolds tall*** (strømning gjennom rør)***:*** $\mathrm{Re}=\frac{v\rho D}{\mu}$.

***Reynolds tall*** (bevegelse gjennom fluid): $\mathrm{Re}=\frac{v\rho L}{\mu}$.

***Stokes lov:*** $F=K\cdot r\mu v$ der $K\approx 6\pi$ ved kuleformet legeme.

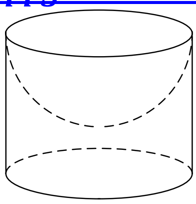
## *9.8. Oppgaver med løsningsforslag.*

### 9.8.1. Småoppgaver i teksten.

***Oppgave 9.1.1:***

Ei stue har gulvareal på $30\,\mathrm{m}^2$ og takhøyde på $2.40\,\mathrm{m}$. Hvor mange kg luft er det i stua når tettheten til luft er $1.29\,\mathrm{kg/m}^3$?

### Oppgave 9.1.2:



En massiv, rett sylinder har grunnflateradius $R$ og høyde $H = \frac{3}{2}R$. I den ene enden freser vi ut et hulrom som er formet som en halvkule med radius $R$. Massen av sylinderen med utfrest hulrom er $m$. Hva var massen til sylinderen før utfresingen?

### Oppgave 9.2.1:

Hvor langt ned under overflaten i ferskvann må du dykke for at trykket skal dobles? Gå ut fra at lufttrykket ved vannets overflate er 1 atmosfære.

### Oppgave 9.2.2:

Et gammeldags barometer består av et U-formet rør der det er fylt kvikksølv (Hg) i den ene greina. Over kvikksølvet er det vakuum. Den andre greina er åpen. Lufttrykket angis da som "mm Hg". Hvor mange mm Hg svarer til 1 atmosfæres trykk? Tettheten til Hg er $13.6 \cdot 10^3$ kg/m$^3$.

### Oppgave 9.2.3:

Overtrykket inne i menneskers blodårer er normalt 5980 Pa. En pasient får intravenøs næring gjennom en slange som er forbundet til en beholder som er festet en høyde $h$ over pasienten. Hva er den minste verdien $h$ kan ha for at flytende næring skal strømme inn i blodåren når vi antar at næringsblandingen har tetthet $1050\,\text{kg/m}^3$?

### Oppgave 9.2.4:

Et isflak med areal $A$ er 80 cm tykt. Når det flyter på vann med tetthet $1.00 \cdot 10^3$ kg/m$^3$ stikker 9.0 cm over vannflata. Finn tettheten til isen i isflaket.

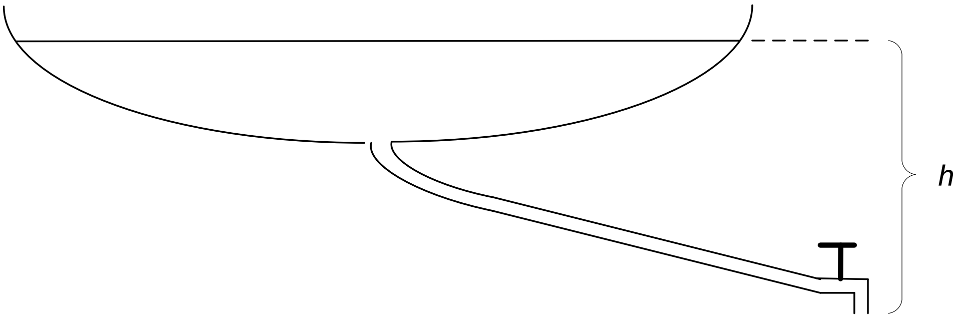
### Oppgave 9.3.1:

Du bruker 25 sekunder på å fylle et 10 liters spann med vann fra springen. Hvor stor er volumstrømmen, og hvor stor er massestrømmen til vannet? Hvor stor fart har vannet når det kommer ut av springen når den indre diameteren i springen er 8.0 mm? Hvor stor fart har vannet et annet sted der vannrøret har indre diameter 12.0 mm? Gå ut fra at røret er fullstendig fylt med vann.

### Oppgave 9.3.2:

Det strømmer en inkompressibel, ideell væske med massetetthet $\rho$ gjennom et horisontalt rør. I et punkt der røret har tverrsnittsareal $A_0$ er farten $v_0$ og trykket er $p_0$. Finn væskens fart og trykk i et annet punkt der tverrsnittsarealet er $2A_0$.

### Oppgave 9.3.3:



Figuren viser en vannkran som er koplet til et vannreservoar med en slange. Når kranen er fullt åpen, er kranens indre diameter $D = 9.44 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Vi antar at reservoaret er så stort at vannflaten ikke synker merkbart under tapping. Kranens åpning ligger en høyde $h = 3.26\,\mathrm{m}$ under vannflaten i reservoaret.

a) Hvor stor fart har vannet når det kommer ut av kranen? Se bort fra alle former for friksjon, og gå ut fra at lufttrykket er like stort ved kranen som ved vannoverflaten.

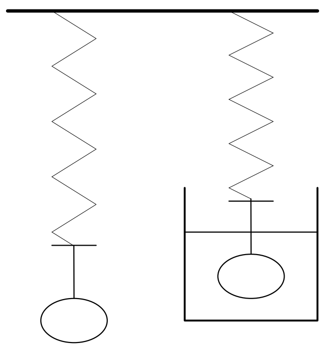
b) Hvor lang tid tar det å fylle en 5 liters beholder når kranen er fullt åpen?

***Oppgave 9.4.1:***

Et vannrør er 50 m langt og har indre diameter på 5.0 cm. Når trykkforskjellen mellom endene på røret er $0.020 \cdot 10^{5}\,\mathrm{Pa}$ strømmer det 6.0 liter vann pr sekund gjennom røret. Hvor stor er da vannets viskositet når vi forutsetter at Poiseuilles formel er gyldig?

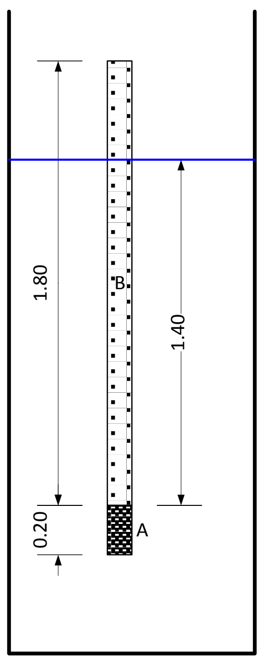
## 9.8.2. Blandede oppgaver.

***Oppgave 9.1:***



Vi ønsker å finne massetettheten til et ukjent legeme. Vi fester da legemet til ei fjærvekt slik figuren til venstre viser.
Når legemet henger i ro i luft, viser fjærvekta $F_1 = 11.3\,\mathrm{N}$.
Når legemet er helt nedsenket i vann med massetetthet $\rho_v = 1.00 \cdot 10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}$, viser fjærvekta $F_2 = 8.83\,\mathrm{N}$ når legemet henger i ro.
Bestem massetettheten til det ukjente legemet.
Se bort fra oppdriften i luft.

***Oppgave 9.2:***




To homogene, jamntykke staver A og B med samme tverrsnitt er satt sammen til en sammenhengende stav slik figuren viser.

Stav A er 0.20 m lang, og er laget av et stoff som har massetetthet $\rho_A = 4.30 \cdot 10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}$.

Stav B er 1.80 m lang, og er laget av et stoff som har massetetthet $\rho_B = 0.75 \cdot 10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}$.

Den sammensatte staven plasseres i en væske med ukjent massetetthet $\rho_X$. Da vil hele stav A og 1.40 m av stav B være nedsenket i væsken.

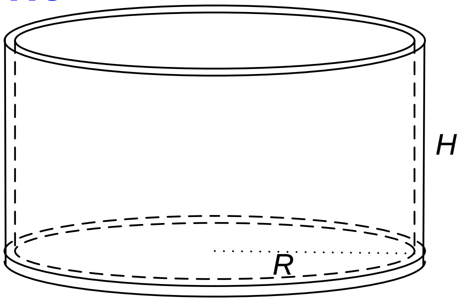
Finn væskens massetetthet $\rho_X$.

Hint: Kall stavenes tverrsnittsareal *F*, og vis at *F* kan forkortes bort etter at Newtons 2. lov er satt opp.

## Oppgave 9.3:

Et høyt vannspann har indre diameter på 14.0 cm. Du lar spannet stå på et horisontalt underlag, og fyller rent ferskvann i spannet til det står 10.0 cm over bunnen. Så slipper du en rektangulær trekloss der sidekantene er 72 mm, 72 mm og 60 mm opp i spannet uten at noe vann renner over kanten. Når klossen flyter fritt, står vannet 11.6 cm over bunnen. Finn tettheten til treklossen.

## Oppgave 9.4:




Et fat uten lokk har form som en rett sylinder, og består av en bunn med radius $R$ og en sideflate med høyde $H$. Hele fatet er laget av samme materiale med massetetthet $\rho$ (gitt i $\text{kg/m}^2$).

Vi prøver å la fatet flyte på vannet.

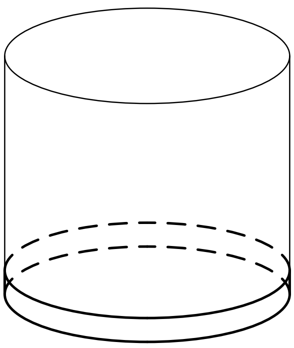
a) Vis at dersom fatet flyter, stikker det en dybde

$$y = \frac{\rho}{\rho_\text{V}} \frac{R + 2H}{R}$$

ned i vannet, der $\rho_\text{V}$ er vannets massetetthet (gitt i $\text{kg/m}^3$).

b) Hva er den minste verdien $H$ kan ha (uttrykt ved $R$, $\rho$ og $\rho_\text{V}$) for at fatet skal kunne flyte?

## Oppgave 9.5:



Et legeme består av ei metallskive som er festet under et sylinderformet trestykke slik figuren til venstre viser. Både metallskiva og trestykket har konstant tverrsnittsareal $A$. Metallskiva har høyde $h_\text{M} = 0.010\,\text{m}$. Hvor høyt er trestykket når legemet så vidt flyter i vann?

Noen tettheter:

Metallet: $\rho_\text{M} = 7400\,\text{kg/m}^3$.

Trestykket: $\rho_\text{T} = 735\,\text{kg/m}^3$.

Vannet: $\rho_\text{V} = 1000\,\text{kg/m}^3$.

## Oppgave 9.6:

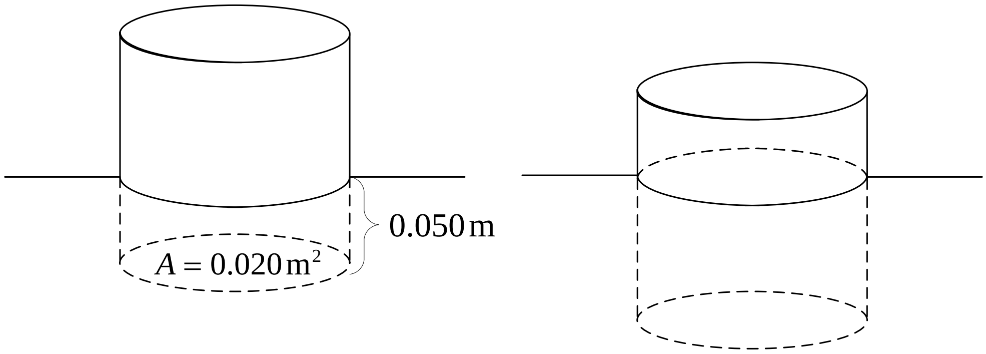
Du har fått utlevert et metallstykke, og vil gjerne bestemme tettheten av dette metallet. Dine eneste hjelpemidler er ei lett spiralfjær med ukjent fjærkonstant, og et sylindrisk beger med indre diameter 6.0 cm. For å finne tettheten, utfører du disse to eksperimentene:

1) Du henger metallstykket i fjæra, og ser at fjæra forlenges 3.9 cm når den henger i ro.

2) Mens metallstykket henger i fjæra, senker du det ned i begeret som står på et horisontalt underlag, og inneholder rent ferskvann. Når hele metallstykket er dekket med vann, er fjæra forlenget med 3.2 cm mens vann-nivået er økt med 2.0 cm. Metallstykket henger da fritt i vannet.

Bruk disse opplysningene til å finne metallets tetthet når vannets tetthet er
$\rho_{\text{vann}} = 1.00 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3$

## *Oppgave 9.7:*

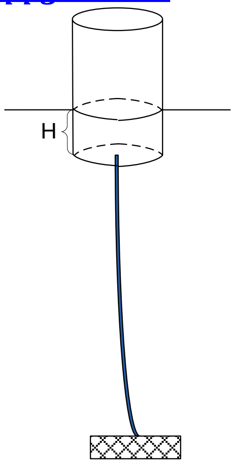



a) En beholder har tverrsnittsareal $A = 0.0200\,\text{m}^2$. Når beholderen flyter i ferskvannvann, stikker den $0.0500\,\text{m}$ ned i vannet. Finn beholderens masse.

b) Vi heller olje med tetthet $\rho_O = 750\,\text{kg/m}^3$ inn i beholderen. Hvor dypt stikker beholderen ned i vannet når oljen står like høyt inni beholderen som vannflaten utenfor?

I hele oppgaven skal du se bort fra tykkelsen til bunn og vegg i beholderen, og du skal gå ut fra at beholderens bunn er horisontal.

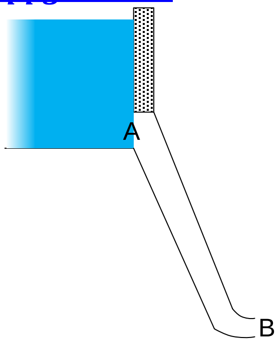
## *Oppgave 9.8:*




Du skal bruke et sylinderformet fat til å lage en fortøyningsbøye. Fatet har masse $m = 25\,\text{kg}$ og tverrsnittsradius $R = 0.20\,\text{m}$. Fatet skal festes til en betongblokk på sjøbunnen med et tau som er 20 m langt, har tverrsnittsareal $A = 5.0 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$ og er laget av et materiale som har massetetthet $\rho = 1.5 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3$. Gå ut fra at tauet ikke hviler på bunnen, og at det ikke er vertikale krefter mellom tauet og blokka på bunnen.

Finn ut hvor dypt $H$ bøya vil stikke i vannet.

## *Oppgave 9.9:*




Figuren til venstre viser en prinsippskisse for et lite vannkraftverk. Ei rørgate fører vannet fra en dam og ned til turbinen. Innløpet til rørgata (A) ligger 30 m under vannflata i dammen. Utløpet fra rørgata (B) ligger 120 m under innløpet. Gå ut fra at atmosfæretrykket er like stort ved rørgatas utløp som ved dammens overflate, og at vann-nivået i dammen ikke endrer seg vesentlig under tappingen. Se bort fra alle former for friksjon.

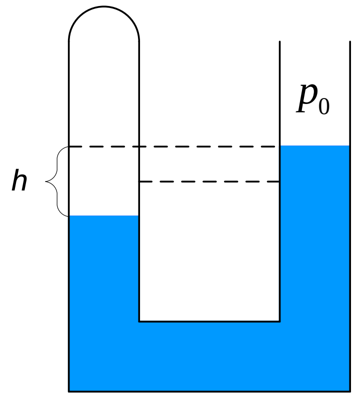
a) Hvor stor fart har vannet ved utløpet av rørgata (B)?

b) Rørgatas diameter er 20.0 cm ved innløpet (A), og 12.0 cm ved utløpet (B). Hvor stor fart har vannet ved innløpet av rørgata (A), og hvor stort er trykket der? Anta at atmosfæretrykket er $p_0 = 1.013 \cdot 10^5\,\text{Pa}$.

***Oppgavene nedenfor forutsetter at du kan tilstandslikningen for en ideell gass:***

$$pV = NRT \;\; \textbf{\textit{eller}} \;\; \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

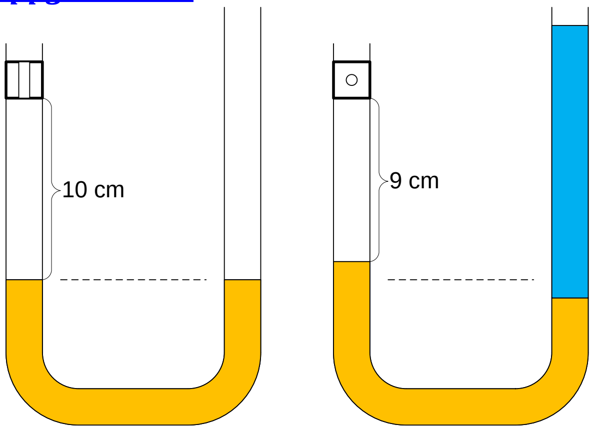
## *Oppgave 9.10:*




Et U-formet glassrør har konstant tverrsnittsareal $A = 10\,\text{cm}^2$. Den ene greina er lukket, den andre er åpen. Vi heller kvikksølv i røret, slik at det stenges av et luftvolum i den lukkede greina. Trykket over den åpne greina er hele tiden $p_0 = 1.01 \cdot 10^5\,\text{Pa}$.

Når temperaturen er $7^\circ\text{C}$, er volumet i den lukkede greina $V_0 = 0.30 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3$, og kvikksølvet står da like høyt i begge greinene.
Vi varmer opp den avstengte lufta inntil kvikksølvet står en høyde $h = 4.0\,\text{cm}$ høyere i den åpne greina enn i den lukkede.
Hva er temperaturen i lufta nå?
Anta at lufta er en ideell gass, og se bort fra termisk utvidelse av glasset og kvikksølvet.
Massetettheten til kvikksølv er $\rho = 13.6 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3$.

## Oppgave 9.11:

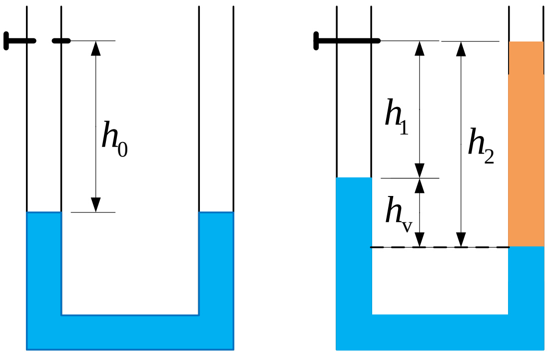



Vi har et jamntykt, U-formet rør med kvikksølv (Hg) i bunnen slik figuren til venstre viser. I den ene greina stenger vi av en 10.0 cm lang luftsøyle der trykket er $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Pa . I den andre greina heller vi vann som ikke blander seg med kvikksølvet. Hvor lang er vannsøylen når lengden av luftsøylen er redusert til 9.0 cm?

Anta at luft følger tilstandslikningen for en ideell gass, og at temperaturen er konstant hele tiden.

Massetettheten til kvikksølv er $13.6 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, og massetettheten til vann er $1.00 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.
H11

## Oppgave 9.12:




Et U-formet glassrør med konstant tverrsnittsareal er åpent i begge ender. Vi heller vann i røret, slik at vannflaten står en høyde $h_0$ under en kran. Så stenger vi krana, og heller deretter olje med ukjent massetetthet $\rho_X$ ned i den åpne enden. Olja blander seg ikke med vannet. Når høyden av oljesøyla er $h_2$, er høyden av den avstengte luftsøyla $h_1 = \frac{4}{5} h_0$.

1) Forklar at da står vannet en høyde $h_V = \frac{2}{5} h_0$ over grenseflaten mellom vann og olje (se figuren ovenfor).
2) Temperaturen holdes konstant, og lufta kan betraktes som en ideell gass. Finn oljas massetetthet $\rho_X$ uttrykt ved vannets massetetthet $\rho_V$, det ytre trykket $p_0$, tyngdens akselerasjon *g*, og høydene $h_0$ og $h_2$.

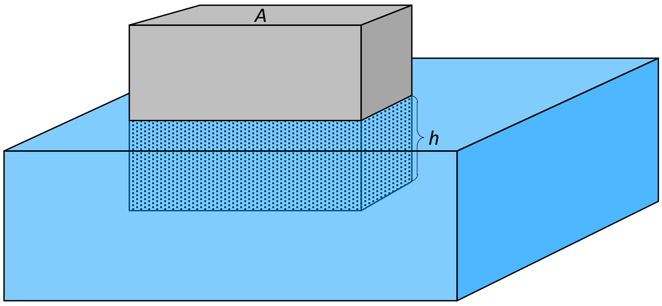
## Oppgave 9.13:

En luftboble dannes på bunnen av et vann, og stiger oppover. Trykket inne i boblen er hele tiden lik trykket utenfor. Vi antar at lufta inne i boblen kan betraktes som en ideell gass, og at temperaturen hele tide er konstant. Trykket ved vannflata er $p_0$, og boblens volum idet den kommer opp til vannflata er $V_0$. Vannets tetthet er $\rho$ og tyngdens akselerasjon er *g*.

a) Finn et uttrykk for boblens volum $V$ når den er en strekning $h$ under vannflata uttrykt ved $h$ og de størrelsene som er definert ovenfor.

b) Vi antar at når boblen har en fart $v$, utsettes den for en motstandskraft med størrelse $k \cdot v$ og retning mot fartsretningen. Bruk dette til å finne $v$ som funksjon av $h$ og de størrelsene som er definert i innledningen til oppgaven. Gå ut fra at vi kan neglisjere massen av lufta i boblen.

***Oppgave 9.14:***




En kloss med massen $m$ og grunnflate-arealet $A$ flyter på en stillestående ukjent væske med massetetthet $\rho$. Klossens bunnflate er en lengde $h$ under overflaten.

a) Vis at sammenhengen
$$\rho g h A = mg$$
må gjelde.

b) Vi måler høyden $h$ til å være 4.60 cm. Når den samme klossen flyter på vann, så stikker den $h_\text{v} = 5.13\,\text{cm}$ ned i vannet. Vis at massetettheten $\rho$ må være $1.12 \cdot 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Bruk at vann har massetettheten $\rho_\text{v} = 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

c) Vi fyller en sylinderformet tank med den ukjente væska. Tanken er 2.00 m høy, åpen i toppen og står på bunnen av et 1.80 m dypt basseng som er fylt med vann. Vi stikker et lite hull nederst på siden av tanken. Hvor stor fart har væska som kommer ut av dette hullet?

## 9.8.3. Løsning på småoppgaver.

***Oppgave 9.1.1:***

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho \cdot V = \left(1.29\,\text{kg/m}^3\right) \cdot \left(30\,\text{m}^2 \cdot 2.40\,\text{m}\right) = \underline{\underline{92.9\,\text{kg}}}\,.$$

***Oppgave 9.1.2:***

Før utfresingen var sylinderens volum
$$V_\text{S} = \pi R^2 H = \pi R^2 \cdot \tfrac{3}{2} R = \tfrac{3}{2}\pi R^3\,.$$
Siden volumet av ei kule er $\frac{4}{3}\pi R^3$, blir volumet etter utfresingen
$$V = V_\text{S} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{3}{2}\pi R^3 - \tfrac{2}{3}\pi R^3 = \tfrac{5}{6}\pi R^3\,.$$
Tettheten er den samme hele tiden. Kaller massen av den opprinnelige sylinderen $m_\text{S}$ og massen etter utfresingen $m$. Da er
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_\text{S}}{V_\text{S}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{\frac{5}{6}\pi R^3} = \frac{m_\text{S}}{\frac{3}{2}\pi R^3} \quad \Leftrightarrow \quad m_\text{S} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{6}} m = \underline{\underline{\tfrac{9}{5} m}}\,.$$

***Oppgave 9.2.1:***
Når du er kommet en høyde *h* under overflaten, er trykket

$$p = p_0 + \rho g h .$$

Dobling av trykket betyr at

$$p = 2p_0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0 + \rho g h = 2p_0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho g h = p_0$$

$$h = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}{\left(1.00 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right)\cdot\left(9.81\,\mathrm{m/s^2}\right)} = \underline{\underline{10.3\,\mathrm{m}}}$$

***Oppgave 9.2.2:***
Siden det er vakuum over kvikksølvsøylen, må

$$\rho_{\mathrm{Hg}} g h = p_0 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{p_0}{\rho_{\mathrm{Hg}} g} = \frac{1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}{\left(13.6 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right)\cdot\left(9.81\,\mathrm{m/s^2}\right)} = \underline{\underline{0.76\,\mathrm{m}}} .$$

***Oppgave 9.2.3:***
Trykket inni blodåren er

$$p = p_0 + \rho g h .$$

Da må trykket i næringsblandingen minst være like stort som *overtrykket* $p - p_0$, slik at

$$\rho g h \geq p - p_0 \quad \Leftrightarrow \quad h \geq \frac{p - p_0}{\rho g} = \frac{5980\,\mathrm{Pa}}{\left(1050\,\mathrm{kg/m^3}\right)\cdot\left(9.81\,\mathrm{m/s^2}\right)} = \underline{\underline{0.58\,\mathrm{m}}} .$$

***Oppgave 9.2.4:***
Når isflaket flyter, er isflakets tyngde lik oppdriften. Isflakets masse er

$$m_{\mathrm{is}} = \rho_{\mathrm{is}} \cdot V_{\mathrm{is}} = \rho_{\mathrm{is}} \cdot \left( A \cdot h_{\mathrm{is}} \right)$$

slik at isflakets tyngde er

$$G_{\mathrm{is}} = m_{\mathrm{is}} g = \rho_{\mathrm{is}} \cdot \left( A \cdot h_{\mathrm{is}} \right) \cdot g$$

mens oppdriften er lik tyngden av fortrengt vannmengde:

$$G_{\mathrm{vann}} = m_{\mathrm{vann}} g = \rho_{\mathrm{vann}} \cdot \left( A \cdot h_{\mathrm{vann}} \right) \cdot g .$$

Da blir

$$G_{\mathrm{is}} = G_{\mathrm{vann}} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{\mathrm{is}} \cdot \left( A \cdot h_{\mathrm{is}} \right) \cdot g = \rho_{\mathrm{vann}} \cdot \left( A \cdot h_{\mathrm{vann}} \right) \cdot g$$

$$\rho_{\mathrm{is}} = \rho_{\mathrm{vann}} \cdot \frac{h_{\mathrm{vann}}}{h_{\mathrm{is}}} = 1.00 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot \frac{\left(0.80 - 0.09\right)\mathrm{m}}{0.80\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{890\,\mathrm{kg/m^3}}}$$

***Oppgave 9.3.1:***
Volumstrømmen er

$$Q_{\mathrm{V}} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}}{25\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{4.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s}}} .$$

Siden tettheten til vann er $\rho = 1.0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, blir massestrømmen

$$Q_{\mathrm{m}} = \rho \cdot Q_{\mathrm{V}} = 1.0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 4.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s} = \underline{\underline{0.40\,\mathrm{kg/s}}} .$$

Videre er

$$Q_{\mathrm{V}} = A \cdot v \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{Q_{\mathrm{V}}}{A} = \frac{4.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s}}{\pi\left(\frac{1}{2} \cdot 0.008\,\mathrm{m}\right)^2} = \underline{\underline{8.0\,\mathrm{m/s}}} .$$

Av kontinuitetslikningen får vi at

$$A_1 \cdot v_1 = A \cdot v \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = \frac{A}{A_1} v = \frac{\pi\left(\frac{1}{2} \cdot 0.008\,\text{m}\right)^2}{\pi\left(\frac{1}{2} \cdot 0.012\,\text{m}\right)^2} \cdot 8.0\,\text{m/s} = \underline{\underline{3.6\,\text{m/s}}}.$$

***Oppgave 9.3.2:***
Bruker først kontinuitetslikningen, og kaller farten i det nye punktet for *v*. Da er

$$A_0 v_0 = (2A_0) v \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{A_0}{2A_0} v_0 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} v_0}}.$$

Bruker Bernoullis likning for å finne trykket $p$ i det nye punktet:

$$p_0 + \rho g h_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 = p + \rho g h + \tfrac{1}{2}\rho v^2.$$

Siden røret er horisontalt, er $h = h_0$. Videre er $v = \frac{1}{2} v_0$. Da blir

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 = p + \tfrac{1}{2}\rho\left(\tfrac{1}{2} v_0\right)^2 = p + \tfrac{1}{8}\rho v_0^2$$

$$p = \underline{\underline{p_0 + \tfrac{3}{8}\rho v_0^2}}$$

***Oppgave 9.3.3:***
a) Vi bruker Bernoullis likning, der indeks $_0$ refererer til vannflaten i reservoaret, mens $_1$ refererer til åpningen i kranen:

$$p_0 + \rho g y_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 = p_1 + \rho g y_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2$$

Her er $p_0 = p_1$ (vanlig lufttrykk) og $v_0 = 0$. Videre legger vi nullnivå for potensiell energi i kranens åpning, slik at $y_0 = h$ og $y_1 = 0$. Da får vi:

$$\rho g h = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 3.26\,\text{m}} = \underline{\underline{8.00\,\text{m/s}}}.$$

b) Volumstrømmen er gitt ved

$$Q = A \cdot v_1 = \left(\pi r^2\right) \cdot v_1 = \pi \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot 9.44 \cdot 10^{-3}\,\text{m}\right)^2 \cdot 8.00\,\text{m/s} = \underline{5.60 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3/\text{s}}.$$

Når volumet av beholderen er $V = 5.00 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3$, er tiden $t$ for å fylle beholderen gitt ved

$$Q = \frac{V}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{V}{Q} = \frac{5.00 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}{5.60 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3/\text{s}} \approx \underline{\underline{8.93\,\text{s}}}.$$

***Oppgave 9.4.1:***
Bruker Poiseuilles formel:

$$Q_\text{V} = \frac{\pi\left(p_1 - p_2\right) R^4}{8\mu L}$$

$$\mu = \frac{\pi\left(p_1 - p_2\right) R^4}{8LQ} = \frac{\pi \cdot \left(0.020 \cdot 10^5\,\text{Pa}\right) \cdot \left(0.025\,\text{m}\right)^4}{8 \cdot \left(50\,\text{m}\right) \cdot \left(6.0 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}\right)} = \underline{\underline{1.0 \cdot 10^{-3}\,\text{Pa} \cdot \text{s}}}$$

## 9.8.4. Svar på blandede oppgaver.

***Oppgave 9.1:***
$\rho = 4.56 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3$.

***Oppgave 9.2:***
$\rho_{\mathrm{X}} = 1.38 \cdot 10^3 \,\mathrm{kg/m^3}$.

***Oppgave 9.3:***
$\rho = 791 \mathrm{kg/m^3}$.

***Oppgave 9.4:***
$$H > \frac{R}{R\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{\rho} - 2}.$$

***Oppgave 9.5:***
$h = 0.24 \,\mathrm{m}$

***Oppgave 9.6:***
$\rho = 5.58 \cdot 10^3 \,\mathrm{kg/m^3}$

***Oppgave 9.7:***
$m = 1.00 \,\mathrm{kg}$, $h = 0.20 \,\mathrm{m}$

***Oppgave 9.8:***
$h = 0.24 \,\mathrm{m}$

***Oppgave 9.9:***
$v_{\mathrm{B}} = 54.2 \,\mathrm{m/s}$, $v_{EA} = 19.5 \,\mathrm{m/s}$, $p_{\mathrm{A}} = 2.05 \cdot 10^5 \,\mathrm{Pa}$

***Oppgave 9.10:***
$T = 40\,^{\circ}\mathrm{C}$

***Oppgave 9.11:***
$h_{\mathrm{vann}} = 1.43 \,\mathrm{m}$

***Oppgave 9.12:***
$$\rho_{\mathrm{X}} = \tfrac{1}{4}\frac{p_0}{gh_2} + \tfrac{2}{5}\rho_{\mathrm{V}}\frac{h_0}{h_2}$$

***Oppgave 9.13:***
$$V = \frac{p_0 V_0}{p_0 + \rho g h}, \qquad v = \frac{\rho g}{k} \cdot \frac{p_0 V_0}{p_0 + \rho g h}$$

***Oppgave 9.14:***
$\rho_{\mathrm{X}} = 1.12 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$, $v_1 = 2.78 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$