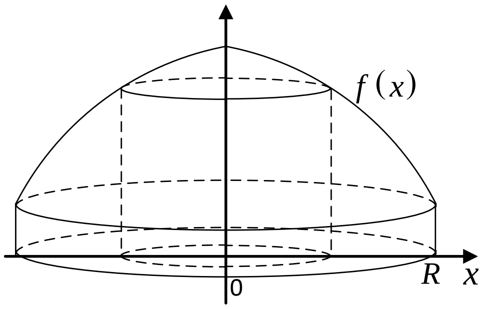


Vi kan finne treghetsmomentet for rotasjons-symmetriske legemer om symmetriaksen ved å integrere med sylinderskall-metoden. Ei sylinderflate i avstand x fra symmetriaksen har areal

$$A = 2\pi x \cdot f(x)$$

slik at et sylinderskall med tykkelse dx utenpå denne flata har volum

$$dV = A \cdot dx = 2\pi x \cdot f(x)\,dx\,.$$

Så benytter vi at når legemet er homogent, er tettheten

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \frac{m}{V}\cdot dV = \frac{m}{V}\cdot 2\pi x \cdot f(x)\,dx\,.$$

Da blir treghetsmomentet om symmetriaksen

$$I = \int_{x=0}^{x=R} x^2 dm = \int_0^R x^2 \cdot \frac{m}{V}\cdot 2\pi x \cdot f(x)\,dx = \underline{\underline{2\pi \cdot \frac{m}{V}\int_0^R x^3 f(x)\,dx}}\,.$$

Dette resultatet skal vi benytte i eksemplene nedenfor:

Eksempel 6.3.2: Beregn treghetsmomentet for disse homogene legemene om deres symmetri-akse. Legemene har masse m.

a) En rett sylinder med radius R og høyde H.

b) En rett kjegle med grunnflateradius R og høyde H.

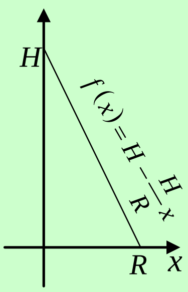
c) Ei kule med radius R.

Løsning:

a) I en sylinder er $f(x) = H$, og volumet er $V = \pi R^2 \cdot H$, slik at treghetsmomentet blir

$$I = 2\pi \cdot \frac{m}{V}\int_0^R x^3 \cdot f(x)\,dx = \frac{2\pi \cdot m}{\pi R^2 H}\int_0^R x^3 \cdot H\,dx = \frac{2m}{R^2}\cdot\left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^R = \frac{m}{2R^2}\cdot R^4 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}mR^2}}\,.$$

b)



En rett kjegle har volum $V = \frac{1}{3}\cdot \pi R^2 H$. Av figuren til venstre ser vi at kjeglen dannes ved at ei rett linje med stigningstall $-\dfrac{H}{R}$ roterer om symmetriaksen. Linja skjærer symmetriaksen i $y = H$, slik at likningen for linja blir

$$f(x) = H - \frac{H}{R}x\,.$$

Da blir treghetsmomentet om symmetriaksen

$$I = 2\pi \cdot \frac{m}{V}\int_0^R x^3 \cdot f(x)\,dx = \frac{2\pi \cdot m}{\frac{1}{3}\pi R^2 H}\int_0^R x^3\left(H - \frac{H}{R}x\right)dx = \frac{6m}{R^2}\cdot\int_0^R\left(x^3 - \frac{1}{R}x^4\right)dx$$

$$= \frac{6m}{R^2}\cdot\left[\tfrac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5R}x^5\right]_0^R = \frac{6m}{R^2}\cdot\left(\tfrac{1}{4}R^4 - \tfrac{1}{5}R^4\right) = \frac{6m}{R^2}\cdot\tfrac{1}{20}R^4 = \underline{\underline{\tfrac{3}{10}mR^2}}$$

c) Ei kule med radius R og sentrum i origo er gitt ved

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\,.$$

Høyden av et sylinderskall i avstand x fra symmetriaksen er $2y$, slik at treghetsmomentet om denne aksen blir

$$I = 2\pi \frac{m}{V} \int_0^R x^3 \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}dx = 4\pi \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R x^3 \sqrt{R^2 - x^2}dx = \frac{3m}{R^3} \int_0^R x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \cdot xdx\,.$$

Den siste omformingen har jeg foretatt fordi jeg vil benytte substitusjonen

$$u^2 = R^2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = R^2 - u^2$$

som med implisitt derivasjon gir

$$2u \cdot \frac{du}{dx} = -2x \quad \Leftrightarrow \quad x\,dx = -u\,du\,.$$

Så må grensene tilpasses:

$$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = R,\ x = R \quad \Leftrightarrow \quad u = 0\,.$$

Da blir

$$I = \frac{3m}{R^3} \int_0^R x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \cdot xdx = \frac{3m}{R^3} \int_R^0 (R^2 - u^2) \cdot u \cdot (-u\,du) = \frac{3m}{R^2} \int_0^R (R^2u^2 - u^4)du$$

$$= \frac{3m}{R^2}\left[R^2 \cdot \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5 \right]_0^R = \frac{3m}{R^2}\left(\tfrac{1}{3}R^5 - \tfrac{1}{5}R^5 \right) = \frac{3m}{R^2} \cdot \frac{2}{15} R^5 = \underline{\underline{\frac{2}{5}mR^2}}$$