Litt statikk

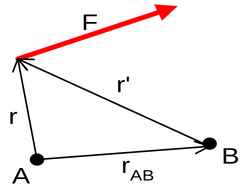
1. Betingelser for likevekt.

Vi skal nå sette opp betingelser for at et legeme skal være i ro. Vi vet allerede at vektor-summen av de kreftene som virker på legemet må være lik null for at massesenteret ikke skal akselerere. Dessuten må summen av alle kraftmomentene (regnet med fortegn, eller ved å bruke vektor-definisjonen) være lik null for at legemet ikke skal dreies.

Den oppmerksomme leser vil forhåpentlig reagere på at jeg ikke angir hvilket momentpunkt jeg bruker. Men det trenger jeg ikke å gjøre i denne situasjonen, fordi:

> Når vektorsummen av de ytre kreftene som virker på et legeme er lik null, er vektorsummen av kreftenes kraftmoment like stort uansett hvilket momentpunkt som benyttes.

For å bevise dette, kan vi bruke figuren nedenfor. Der har jeg tegnet inn *en* av de kreftene som virker på et legeme. Jeg har også merket av to tilfeldig valgte momentpunkter A og B.



Kraftens moment er:
Om A: $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$.
Om B: $\mathbf{r}'\times\mathbf{F}$.

Men $\mathbf{r}=\mathbf{r}_{AB}+\mathbf{r}'$, slik at kraftmomentet om A kan skrives

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F}=(\mathbf{r}_{AB}+\mathbf{r}')\times\mathbf{F}=\mathbf{r}_{AB}\times\mathbf{F}+\mathbf{r}'\times\mathbf{F}.$$

Men kraften $\mathbf{F}$ er ikke alene. Legemet påvirkes av n krefter $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, …, $\mathbf{F}_n$ som har vektorene $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, …, $\mathbf{r}_n$ fra aksen A og $\mathbf{r}_1'$, $\mathbf{r}_2'$, ..., $\mathbf{r}_n'$ fra B. Det samlede kraftmomentet om A er da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_A &= \mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1+\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2+\cdots+\mathbf{r}_n\times\mathbf{F}_n=\sum\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i=\sum(\mathbf{r}_{AB}\times\mathbf{F}_i+\mathbf{r}_i'\times\mathbf{F}_i)\\ &=\mathbf{r}_{AB}\times\sum\mathbf{F}_i+\sum\mathbf{r}_i'\times\mathbf{F}_i=\mathbf{r}_{AB}\times\mathbf{0}+\boldsymbol{\tau}_B=\boldsymbol{\tau}_B\end{aligned}$$

Her har jeg benyttet at $\sum\mathbf{F}_i=\mathbf{0}$. Vi ser at kraftmomentet er like stort om begge de vilkårlig valgte momentpunktene.

Nå kan vi sette opp betingelsene for at et legeme skal være i ro:

> ***Likevektsbetingelsene:***
> 1. Vektorsummen av de ytre kreftene som virker på legemet må være lik null.
> 2. Summen av kraftmomentene (regnet med fortegn) om et vilkårlig valgt momentpunkt må være lik null.

Før vi viser eksempler på bruken av disse betingelsene, må vi se hvordan vi kan handtere tyngdekraften.

2. Tyngdepunkt.

Vi skal nå ta for oss et legeme som er satt sammen av *n* partikler som har masser m_1, m_2, …, m_n og posisjonsvektorer $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, …, $\mathbf{r}_n$ i forhold til et momentpunkt A. Tyngdene til disse partiklene gir da et samlet kraftmoment om A:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{g} + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{g} + \cdots + \mathbf{r}_n \times m_n\mathbf{g} = \left(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n\right) \times \mathbf{g} = \left(\sum m_i\mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g}\,.$$

Her har vi forutsatt at **g** er konstant. Men massesenterets posisjon er gitt ved

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum m_i\mathbf{r}_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum m_i\mathbf{r}_i = M \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{CM}}$$

der *M* er den samlede massen til hele legemet. Dermed blir

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\sum m_i\mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g} = M\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{\mathrm{CM}} \times \left(M\mathbf{g}\right).$$

Dette betyr at kraftmomentet til tyngden av alle partiklene som legemet består av er lik kraftmomentet til en partikkel med samme masse som legemet, og som befinner seg i legemets massesenter.

Utledningen ovenfor forutsetter at tyngdens akselerasjon er den samme for alle partiklene i legemet. For legemer av normal størrelse er dette alltid oppfylt. Men dersom dette kravet ikke er oppfylt, kan vi definere et ***tyngdepunkt*** der vi tenker oss at legemets masse plasseres ved beregning av kraftmomentet. For alle praktiske formål faller massesenter og tyngdepunkt sammen, og vi bruker ofte disse begrepene om hverandre.

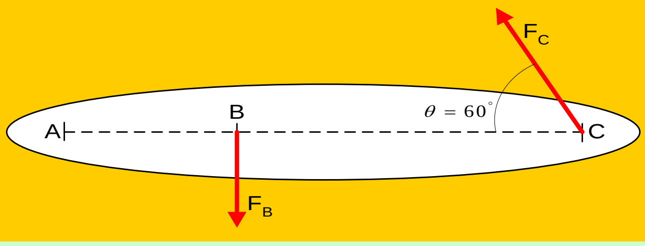
3. Litt statikk.

Vi har nå skaffet oss det verktøyet vi trenger for å utføre beregninger på legemer som er i ro. Utgangspunktet er *likevektsbetingelsene* som ble formulert ovenfor. Selv om disse betingelsene virker enkle, kan det være vanskelig å benytte dem i praksis. Jeg vil anbefale denne framgangsmåten:

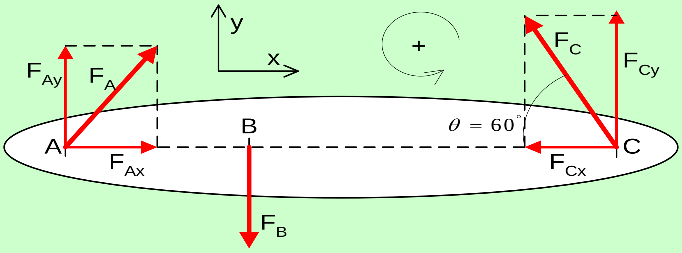
1. Tegn en *god* figur.
2. Definer en *x*- og en *y*-akse, og angi positive retninger.
3. Tegn inn de kreftene som virker. Kjente krefter tegnes inn på korrekt sted med korrekt retning og korrekt størrelse. Tyngdekrefter tegnes inn i legemets massesenter. Ukjente krefter tegnes (om mulig) inn på korrekt sted, med slik retning at både *x*- og *y*-komponentene blir positive.
4. Sett opp at vektorsummen av kreftene skal være lik null.
5. Velg et momentpunkt. Det kan være lurt å velge momentpunkt slik at ukjente krefter gir null kraftmoment. Definer en positiv dreieretning.
6. Sett opp at summen av kraftmomentene om det valgte momentpunktet er lik null. Moment som prøver å dreie i positiv retning regnes som positive, mens moment som prøver å dreie i negativ retning regnes som negative.
7. Om nødvendig gjentas punktene 5 og 6 med nye momentpunkt, inntil du har nok likninger til å finne alle de ukjente kreftene.

Eksemplene nedenfor viser hvordan denne teknikken kan brukes.

Eksempel 1: Figuren nedenfor viser et legeme der tre punkter A, B og C ligger etter hverandre på samme rette linje, slik at avstanden AB er 0.40 m og avstanden BC er 0.80 m. I punktet B virker en kraft med størrelse $F_B = 90\,\mathrm{N}$ med retning vinkelrett på linja ABC. I punktet C virker en kraft $\mathbf{F}_C$ med ukjent størrelse, men som danner en vinkel $\theta = 60^\circ$ med linja ABC slik figuren viser. I punktet A virker en ukjent kraft $\mathbf{F}_A$. Finn størrelsen av $\mathbf{F}_C$ og kraften $\mathbf{F}_A$ slik at legemet blir liggende i ro.



Løsning: Legger inn en *x*- og en *y*- akse med positive retninger som vist på figuren nedenfor. Der har jeg også dekomponert kraften $\mathbf{F}_C$, og tegnet inn en kraft $\mathbf{F}_A$ med sine komponenter. Videre har jeg definert en positiv dreieretning mot urviseren.



Setter først opp at vektorsummen av kreftene er lik null:

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -90\,\mathrm{N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_C \cos 60^\circ \\ F_C \sin 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} F_{Ax} - F_C \cdot \frac{1}{2} \\ F_{Ay} - 90\,\mathrm{N} + F_C \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette er to likninger med tre ukjente. Trenger en likning til. Velger A som momentpunkt for å bli kvitt den ukjente kraften $\mathbf{F}_A$. Summen av kraftmomentene om A blir:

$$F_C \cdot (0.40 + 0.80)\,\mathrm{m} \cdot \sin 60^\circ - F_B \cdot 0.40\,\mathrm{m} \cdot \sin 90^\circ = 0\,\mathrm{Nm}$$

$$F_C \cdot 1.20\,\mathrm{m} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - 90\,\mathrm{N} \cdot 0.40\,\mathrm{m} = 0\,\mathrm{Nm} \quad \Leftrightarrow \quad F_C = \frac{36\,\mathrm{Nm}}{0.60\sqrt{3}\,\mathrm{m}} \approx \underline{\underline{34.6\,\mathrm{N}}}$$

Nå kan vi finne komponentene til $\mathbf{F}_A$:

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} - F_C \cdot \frac{1}{2} \\ F_{Ay} - 90\,\mathrm{N} + F_C \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{N} \\ 0\,\mathrm{N} \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} F_{Ax} - 34.6\,\mathrm{N} \cdot \frac{1}{2} \\ F_{Ay} - 90\,\mathrm{N} + 34.6\,\mathrm{N} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{N} \\ 0\,\mathrm{N} \end{bmatrix}.$$

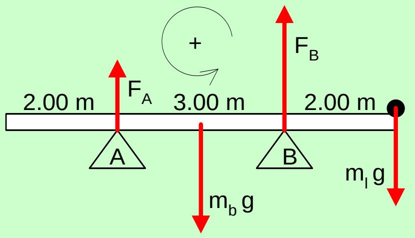
Dette gir to likninger:

$$F_{Ax} - \tfrac{1}{2} \cdot 34.6\,\mathrm{N} = 0\,\mathrm{N} \quad \Leftrightarrow \quad F_{Ax} = \underline{\underline{17.3\,\mathrm{N}}}.$$

$$F_{Ay} - 90\,\mathrm{N} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 34.6\,\mathrm{N} = 0\,\mathrm{N} \quad \Leftrightarrow \quad F_{Ay} = 90\,\mathrm{N} - 30.0\,\mathrm{N} = \underline{\underline{60\,\mathrm{N}}}.$$

Eksempel 2: En jamntykk bom er 7.00 m lang og har massen 100 kg. Den hviler på to punkter i samme høyde, i avstand 2.00 m fra hver ende. En punktformet last med masse 60 kg er plassert ytterst på den ene enden. Hvor stor kraft virker på bommen fra hvert støttepunkt?

Løsning:



Kaller støttepunktene for A og B slik figuren viser. Legger et momentpunkt i B slik at kraften F_B ikke får noe kraftmoment. Da vil bommens tyngde $m_b g$ gi kraftmoment i positiv retning, mens lastens tyngde $m_l g$ og kraften F_A gi negativt kraftmoment. Dette gir:

$$m_b g \cdot 1.50\,\mathrm{m} - F_\mathrm{A} \cdot 3.00\,\mathrm{m} - m_l g \cdot 2.00\,\mathrm{m} = 0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}$$

$$F_\mathrm{A} = \frac{m_b g \cdot 1.50\,\mathrm{m} - m_l g \cdot 2.00\,\mathrm{m}}{3.00\,\mathrm{m}} = \frac{(100\,\mathrm{kg}\cdot 1.50\,\mathrm{m} - 60\,\mathrm{kg}\cdot 2.00\,\mathrm{m})\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}{3.00\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{98.1\,\mathrm{N}}}\,.$$

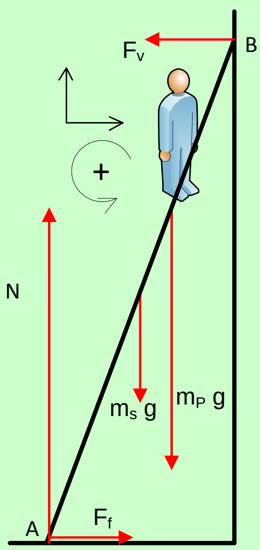
Nå kan vi finne F_B på tilsvarende måte ved å legge momentpunktet i A (prøv!). Men det er enklere å benytte at kraftsummen i vertikal retning er lik null:

$$F_\mathrm{A} + F_\mathrm{B} - m_b g - m_l g = 0$$

$$F_\mathrm{B} = m_b g + m_l g - F_\mathrm{A} = (100\,\mathrm{kg} + 60\,\mathrm{kg})\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} - 98.1\,\mathrm{N} = \underline{\underline{1470\,\mathrm{N}}}$$

Eksempel 3: En stige er 6.00 meter lang og har masse 20 kg. Vi antar at massen er jevnt fordelt over hele stigen. Stigen står på et horisontalt underlag, og lener seg mot en vegg slik at vinkelen mellom stigen og underlaget er 70°. Vi antar at det ikke er friksjon mellom stigen og veggen. Per har masse 60 kg, og står i stigen 4.00 m fra dens nedre ende. Hvor stort må friksjonstallet mellom stige og underlag minst være for at stigen ikke skal gli?

Løsning:



Figuren til venstre viser de kreftene som virker på stigen. Jeg har underslått de kreftene som virker på Per: hans tyngde og en like stor motkraft fra stigen siden han står i ro. Da må det virke en like stor kraft fra Per mot stigen med retning nedover. Denne kraften er kalt $m_\mathrm{P} g$ på figuren.

For at stigen ikke skal gli, må friksjonstallet minst være

$$\mu = \frac{F_f}{N}\,.$$

Vi vet også at siden det ikke er friksjon mellom stige og vegg, står kraften F_v fra veggen mot stigen vinkelrett på veggen og har dermed ingen komponent i y-retning. Vi finner da N ved å benytte at summen av kreftene i y-retning skal være lik null:

$$N - m_s g - m_\mathrm{P} g = 0\,\mathrm{N} \quad \Leftrightarrow \quad N = (m_s + m_\mathrm{P})g = (20 + 60)\,\mathrm{kg}\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{\underline{785\,\mathrm{N}}}\,.$$

For å finne friksjonskraften F_f , legges momentpunkt i B (stigens berøringspunkt med veggen) slik at den ukjente kraften F_v ikke får noe kraftmoment. Vi regner ut avstandene fra B til kreftenes angrepspunkter som hoderegning, og vet at $90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$. Da blir:

$$m_\mathrm{P} g \cdot 2.00\,\mathrm{m} \cdot \sin 20^\circ + m_s g \cdot 3.00\,\mathrm{m} \cdot \sin 20^\circ + F_f \cdot 6.00\,\mathrm{m} \cdot \sin 70^\circ - N \cdot 6.00\,\mathrm{m} \cdot \sin 20^\circ = 0\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

$$\left(60\,\mathrm{kg} \cdot 2.00\,\mathrm{m} + 20\,\mathrm{kg} \cdot 3.00\,\mathrm{m}\right) \sin 20^\circ \cdot 9.81\,\mathrm{m/s}^2 + F_f \cdot 6.00\,\mathrm{m} \cdot \sin 70^\circ = 785\,\mathrm{N} \cdot 6.00\,\mathrm{m} \cdot \sin 20^\circ$$

$$F_f = \frac{1611\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} - 604\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}{5.64\,\mathrm{m}} = \underline{179\,\mathrm{N}}$$

(Vi kunne fått litt lettere regninger ved å legge momentpunktet i A og funnet F_v , og deretter benyttet at F_v og F_f er motsatt like store. Prøv selv!)

Friksjonstallet må minst være

$$\mu = \frac{F_f}{N} = \frac{179\,\mathrm{N}}{785\,\mathrm{N}} \approx \underline{\underline{0.23}}.$$